讲义说明

由于时间仓促和编者水平有限，编写中难免出现错误或不当之处，希望家长及同学们能直言不讳地给我们提出宝贵的意见，以便今后修订升级．若有发现，非常期待家长和同学们将修改意见发送至顺为教育教研部邮箱(*jiaoyan@shunweijiaoyu．com*)！我们会定期评选出突出贡献者，并给予丰厚的奖励！

目录

第 1 讲 全等和相似综合（2）

模块一 旋转型相似

【例1】 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$，$BC=6$， $\angle ACB=30°$， 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转，得到 $\triangle A_1BC_1$.

（1）如图 1，当点 C_1 在线段 CA 的延长线上时，求 $\angle CC_1A_1$ 的度数；

（2）如图 2，连接 AA_1、CC_1 . 若 $\triangle CBC_1$ 的面积为 3，求 $\triangle ABA_1$ 的面积；

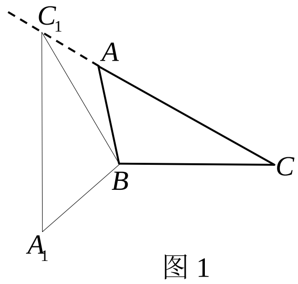


图 1

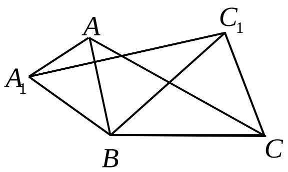


图 2

【解析】（1）如图 1，依题意得：$\triangle A_1C_1B \cong \triangle ACB$.

$\therefore BC_1=BC$， $\angle A_1C_1B=\angle C=30°$.

$\therefore \angle BC_1C=\angle C=30°$. $\therefore \angle CC_1A_1=60°$.

（2）如图 2，由（1）知：$\triangle A_1C_1B \cong \triangle ACB$.

$\therefore A_1B=AB$， $BC_1=BC$， $\angle A_1BC_1=\angle ABC$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$， $\dfrac{A_1B}{C_1B}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \triangle A_1BA \backsim \triangle C_1BC$， $\therefore \dfrac{S_{\triangle A_1BA}}{S_{\triangle C_1BC}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

$\because S_{\triangle C_1BC}=3$， $\therefore S_{\triangle A_1BA}=\dfrac{4}{3}$.

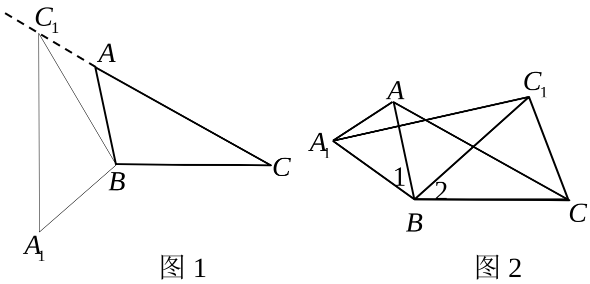


图 1　　　　　图 2

【教师备课提示】这道题主要总结，一大一小两个共端点相似的图形，一般会产生共端点旋转型的全等，反过来，如果在一个图形中，有共端点旋转型的全等，一定会产生一大一小两个共端点的相似图形.

【例2】

填空或解答：点 B、C、E 在同一直线上，点 A、D 在直线 CE 的同侧，$AB=AC$，$EC=ED$，$\angle BAC=\angle CED$，直线 AE、BD 交于点 F.

（1）如图 1，若 $\angle BAC=60^\circ$，则 $\angle AFB=$__________；

如图 2，若 $\angle BAC=90^\circ$，则 $\angle AFB=$__________；

（2）如图 3，若 $\angle BAC=\alpha$，则 $\angle AFB=$__________（用含 α 的式子表示）；

（3）将图 3 中的△ABC 绕点 C 旋转（点 F 不与点 A、B 重合），得图 4 或图 5.

在图 4 中，$\angle AFB$ 与 $\angle\alpha$ 的数量关系是____________；

在图 5 中，$\angle AFB$ 与 $\angle\alpha$ 的数量关系是____________．请你任选其中一个结论证明.

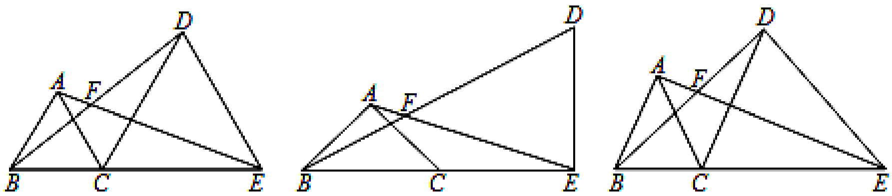


图 1　　图 2　　图 3

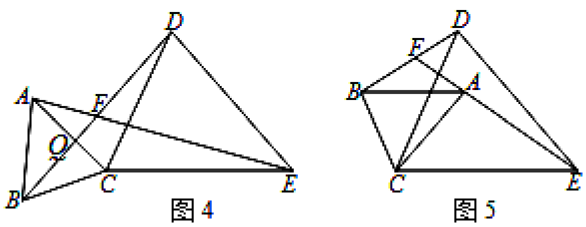


图 4　　图 5

【解析】（1）$\angle AFB=60^\circ$，$\angle AFB=45^\circ$；

（2）$\angle AFB=90^\circ-\dfrac{1}{2}\alpha$；

（3）图 4 中：$\angle AFB=90^\circ-\dfrac{1}{2}\alpha$；

图 5 中：$\angle AFB = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

$\angle AFB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ 的证明如下：

如图 4，设 AC 与 BD 的交点为 Q

$\because AB = AC$， $EC = ED$， $\angle BAC = \angle CED$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle EDC$，

$\therefore \angle ACB = \angle ECD$， $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$， $\angle BCD = \angle ACE$

$\therefore \triangle BCD \backsim \triangle ACE$，得 $\angle CBD = \angle CAE$

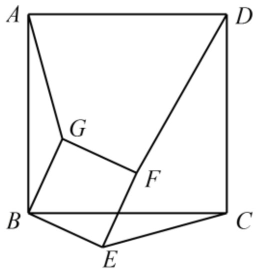
$\because \angle AQF = \angle BQC$

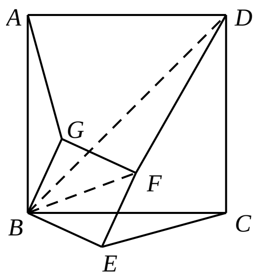
$\therefore \angle AFB = \angle ACB = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

【教师备课提示】这道题主要总结，一大一小两个共端点相似的图形，不一定会产生共端点旋转型的全等，一般会产生共端点旋转型的相似.

【例3】

如图，四边形 $ABCD$ 和 $BEFG$ 均为正方形，求 $AG : DF : CE =$ _________.





【解析】连接 BD，BF

$\because AB \perp BC, BG \perp BE \Rightarrow \angle ABG = \angle CBE$

$AB = BC, BG = BE \therefore \Delta ABG \cong \Delta CBE$

$\therefore AG = CE$， $\because EF \perp BE, EF = BE$

$\therefore \angle EBF = 45°, BF = \sqrt{2}BE$

$\because BC \perp CD, BC = CD$

$\therefore \angle CBD = 45°, BD = \sqrt{2}BC$

$\therefore \angle FBD=\angle CBE$， $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BF}{BE}=\sqrt{2}$

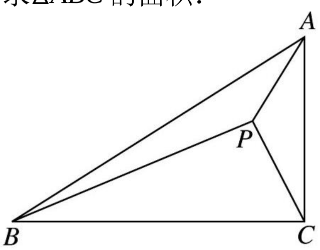
$\therefore \Delta FBD\backsim\Delta EBC$， $\therefore \dfrac{DF}{EC}=\dfrac{BD}{BF}=\sqrt{2}$

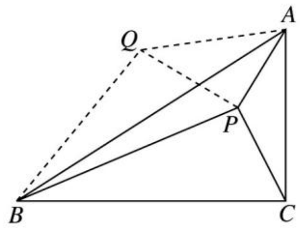
$\therefore AG:DF:CE=1:\sqrt{2}:1$

【教师备课提示】这道题主要是让孩子们练习下，主要是去找旋转型的相似.

【例4】 如图，$\triangle ABC$中， $\angle BAC=60°$， $AB=2AC$．点P在$\triangle ABC$内，且$PA=\sqrt{3}$，

$PB=5$， $PC=2$，求$\triangle ABC$的面积.





【解析】如图，作$\triangle ABQ$，使得$\angle QAB=\angle PAC,\angle ABQ=\angle ACP$,

则$\triangle ABQ\backsim\triangle ACP$．由于 $AB=2AC$，所以相似比为 2.

于是 $AQ=2AP=2\sqrt{3},\ BQ=2CP=4$．

$\angle QAP=\angle QAB+\angle BAP=\angle PAC+\angle BAP=\angle BAC=60°$．

由$AQ:AP=2:1$知， $\angle APQ=90°$， 于是 $PQ=\sqrt{3}AP=3$．

所以 $BP^2=25=BQ^2+PQ^2$， 从而$\angle BQP=90°$．

于是 $AB^2=PQ^2+(AP+BQ)^2=28+8\sqrt{3}$．

故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{\sqrt{3}}{8}AB^2=\dfrac{6+7\sqrt{3}}{2}$．

【教师备课提示】这道题主要考查旋转型相似的构造，相对较难.

模块二　从全等到相似

【例5】 如图，$\triangle ABC$ 中，$AG\perp BC$ 于点 G，以 A 为直角顶点，分别以 AB、AC 为直角边，向 $\triangle ABC$ 外侧作 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle ACF$，过点 E、F 作射线 GA 的垂线，垂足分别为 P、Q.

（1）若 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle ACF$ 都是等腰三角形，直接写出 EP 与 FQ 有怎样的数量关系；

（2）若 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle ACF$ 中满足 $AB=kAE$，$AC=kAF$ 时，（1）中的结论还成立吗？若成立，请证明；若不成立，请探究 EP 与 FQ 有怎样的数量关系？

（3）若 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle ACF$ 中满足 $AB=kAE$，$AC=mAF$ 时，连接 EF 交射线 GA 于点 D，试探究 ED 与 FD 有怎样的数量关系？

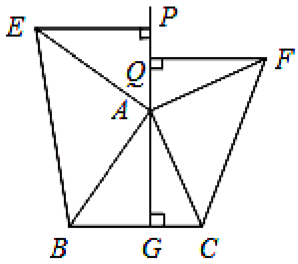


图 1

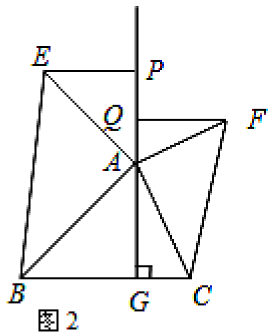


图 2

【解析】（1）$EP=FQ$.

（2）$EP=FQ$.

理由：∵四边形 $ABME$ 是矩形，∴$\angle BAE=90°$，∴$\angle BAG+\angle EAP=90°$.

∵$AG\perp BC$，∴$\angle BAG+\angle ABG=90°$，∴$\angle ABG=\angle EAP$.

∵$\angle AGB=\angle EPA=90°$，∴$\triangle ABG\backsim\triangle EAP$，

∴$\dfrac{AG}{EP}=\dfrac{AB}{EA}$. ∵$AB=kAE$，∴$\dfrac{AG}{EP}=k$，

同理$\triangle ACG\backsim\triangle FAQ$，

∴$\dfrac{AG}{FQ}=\dfrac{AC}{FA}=k$，∴$\dfrac{AG}{EP}=\dfrac{AG}{FQ}$.

∴$EP=FQ$.

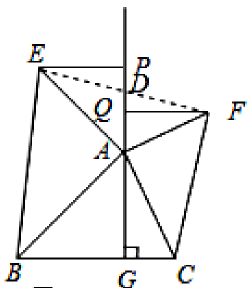


图 2

（3）结论：$\dfrac{ED}{FD}=\dfrac{m}{k}$.

由（2）可知：∴$\dfrac{AB}{EA}=k$，$\dfrac{AC}{FA}=m$

∴$\dfrac{AG}{EP}=k$，$\dfrac{AG}{FQ}=m$. ∴$\dfrac{EP}{FQ}=\dfrac{m}{k}$，∵$EP\perp GA$，$FQ\perp GA$，∴$EP\parallel FQ$.

∴$\dfrac{ED}{FD}=\dfrac{EP}{FQ}=\dfrac{m}{k}$.

【教师备课提示】这道题主要想理解下，弦图的全等是三垂直的一种特殊关系，体会下全等和相似的关系.

【例6】 如图 1，将一个直角三角板的直角顶点 P 放在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上滑动，并使其一条直角边始终经过点 A，另一条直角边与 BC 相交于点 E.

（1）求证：$PA=PE$；

（2）若将（1）中的正方形变为矩形，其余条件不变（如图 2），且 $AD=10$，$DC=8$，求 $AP:PE$；

（3）在（2）的条件下，当 P 滑动到 BD 的延长线上时（如图 3），请你直接写出 $AP:PE$ 的比值.

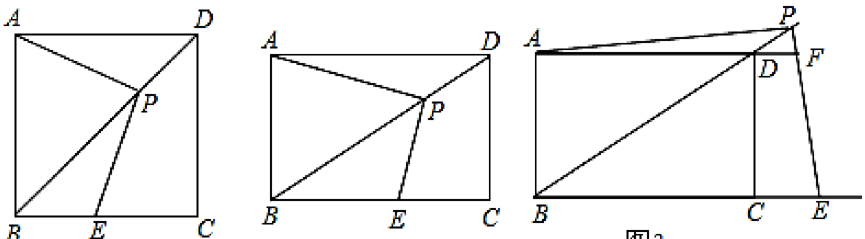


图1 图2 图3

【解析】（1）证明：过 P 作 $PM\perp AB$ 于 M，$PN\perp BC$ 于 N，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$\angle ABD=45°$，

∴$\angle MPB=45°=\angle ABD$，∴$PM=BM$，

同理 $BP=BN$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle ABC=90°=\angle BMP=\angle BNP$，

∴四边形 $BMPN$ 是正方形，

∴$PM=PN$，$\angle MPN=90°$，

∵$\angle APE=90°$，∴$\angle APM=\angle NPE$，

∵$PM\perp AB$，$PN\perp BC$，∴$\angle AMP=\angle PNE$，

在 $\triangle APM$ 和 $\triangle EPN$ 中

$$\begin{cases}\angle AMP=\angle ENP\\ PM=PN\\ \angle APM=\angle EPN\end{cases}$$

∴$\triangle APM\cong\triangle EPN(\text{ASA})$，∴$AP=PE$；

（2）解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$\angle BAD=\angle C=90°$，

∵$\angle PMB=ϖPNB=90°$，∴$PM\parallel AD$，$PN\parallel CD$，

∴$\triangle BPM\backsim\triangle BDA$，$\triangle BNP\backsim\triangle BCD$，

∴$\dfrac{PM}{AD}=\dfrac{BP}{BD}$，$\dfrac{PN}{CD}=\dfrac{BP}{BD}$，∴$\dfrac{PM}{AD}=\dfrac{PN}{CD}$，

∴$\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$，

∵$\angle AMP=\angle ENP=90°$，$\angle MPA=\angle EPN$，

∴$\triangle APM\backsim\triangle EPN$，

$\therefore \dfrac{AP}{PE}=\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{5}{4}$， $AP:PE=5:4$；

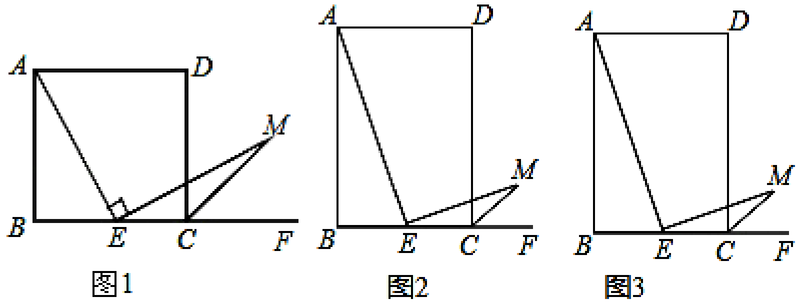
（3） $AP:PE=5:4$.

【例7】 在矩形 $ABCD$ 中，E 为 BC 的中点，点 F 在 BC 的延长线上，CM 平分$\angle DCF$，连接 AE，作 $EM\perp AE$ 交 CM 于点 M.

（1）如图 1，当 $AB=BC$ 时，请判断 AE 与 EM 的数量关系并证明；

（2）如图 2，当 $AB=nBC$ 时，请判断 AE 与 EM 的数量关系并证明；

（3）如图 3，当 $AB=n\cdot BC$，$BE=m\cdot EC$ 时，请判断 AE 与 EM 的数量关系并证明.



【解析】（1）$AE=EM$，理由如下：如图 1，取 AB 的中点 G，连接 GE.

∵$\angle AEM=90°$，∴$\angle MEC+\angle AEB=90°$，

又∵$\angle B=90°$，　　∴$\angle EAG+\angle AEB=90°$，∴$\angle EAG=\angle MEC$.

∵点 E，G 分别为正方形 $ABCD$ 的边 BC 和 AB 的中点，

∴$AG=EC$．又可知△BGE 是等腰直角三角形，

∴$\angle AGE=135°$．又∵CM 平分$\angle DCF$，∴$\angle ECM=135°$.

在△AEG 与△EMC 中，

$$\begin{cases}\angle EAG=\angle MEC\\ AG=EC\\ \angle AGE=\angle ECM\end{cases},$$

∴△AEG≌△EMC(ASA)，∴$AE=EM$；

（2）当 $AB=nBC$ 时， $AE=(2n-1)EM$，理由如下：

如图 2，在 AB 上截取 $BG=BE$，连接 GE，则△BGE 为等腰直角三角形，

∴$\angle BGE=45°$，∴$\angle AGE=\angle ECM=135°$.

∵$\angle AEM=90°$，∴$\angle MEC+\angle AEB=90°$，

又∵$\angle B=90°$，∴$\angle EAG+\angle AEB=90°$，

∴$\angle EAG=\angle MEC$.

在△AEG 与△EMC 中， $\angle AGE=\angle ECM$， $\angle EAG=\angle MEC$，

∴△AEG∽△EMC，∴$AE:EM=AG:EC$，

∵$AB=nBC$，$BC=2BE=2EC$，$BG=BE$，

∴$AG+BG=2nEC$，∴ $AG=(2n-1)EC$，

∴AE:EM=$AGLEC$=$(2n-1)$，∴ $AE=(2n-1)EM$ ；

（3）当 AB=n•BC，BE=m•EC 时， $AE=(mn+n-m)\,EM$，理由如下：

如图 3，在 AB 上截取 BG=BE，连接 GE，则△BGE 为等腰直角三角形，
∴∠BGE=45°，∴∠AGE=∠ECM=135°.
∵∠AEM=90°，∴∠MEC+∠AEB=90°，
又∵∠B=90°，∴∠EAG+∠AEB=90°，∴∠EAG=∠MEC.
在△AEG 与△EMC 中，
$\angle AGE=\angle ECM$ ， $\angle EAG=\angle MEC$ ，∴△AEG∽△EMC，
∴AE:EM=AG:EC，∵BE=m•EC，∴BC=BE+EC=$(m+1)EC$，
∵AB=n•BC，BG=BE，∴AG+BG=$n(m+1)EC$，
∴AG+MEC=$n(m+1)EC$，∴AG=$(mn+n-m)EC$，
∴AE:EM=AG:EC=$(mn+n-m)$，∴AE=$(mn+n-m)EM$.

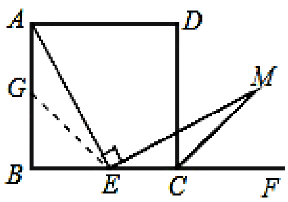


图1

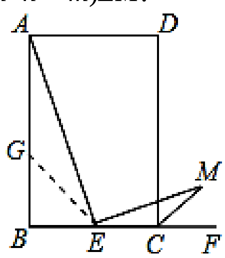


图2

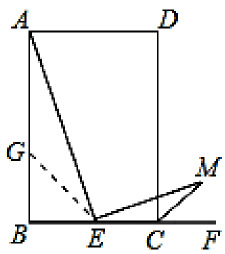


图3

【教师备课提示】这两道题是由以前的两道经典的全等题目上的拓展，让同学们体会下实际上全等是相似的一种特殊情况，可以从特殊的全等上找相似的方法.

【例8】 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB>AC$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，点 E 在 DC 的延长线上，且 $\dfrac{DE}{BD}=k$，过 E 作 $EF\parallel AB$ 交 AC 的延长线于 F.

（1）如图 1，当 $k=1$ 时，求证：$AF+EF=AB$；

（2）如图 2，当 $k=2$ 时，直接写出线段 AF、EF、AB 之间满足的数量关系；

（3）如图 3，当 $\dfrac{DE}{BD}=k$ 时，请猜想线段 AF、EF、AB 之间满足的数量关系（含 k），并证明你的结论.

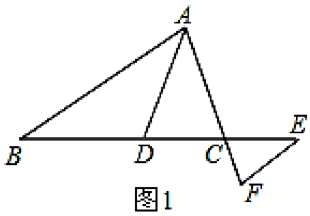


图1

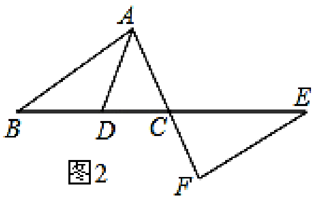


图2

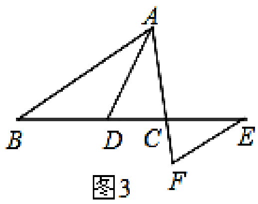


图3

【解析】（1）证明：如图 1，延长 AD、EF 交于点 G，当 $k=1$ 时，$DE=BD$

$\because EF\parallel AB$，$\therefore \angle BAD=\angle EGD$，

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle GED$ 中，$\begin{cases}\angle BAD=\angle EGD\\ \angle BDA=\angle EDC\\ BD=ED\end{cases}$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle GED(\text{AAS})$，$\therefore AB=GE$，

又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\angle DAC$，$\therefore \angle FGD=\angle DAC$，

$\therefore AF=GF$，$\therefore AF+EF=AB$；

（2）解：如图 2，延长 AD、EF 交于点 G，当 $k=2$ 时，

$\because EF\parallel AB$，$\therefore \angle BAD=\angle EGD$，又 $\because \angle BDA=\angle EDG$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle GED$，

$\therefore \dfrac{GE}{AB}=\dfrac{DE}{BD}=2$，即 $GE=2AB$，又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle DAC$，

$\therefore \angle FGD=\angle DAC$，$\therefore AF=GF$，

$\therefore AF+EF=2AB$；

（3）猜想：$AF+EF=kAB$.

证明：如图 3，延长 AD、EF 交于点 G，当 $\dfrac{DE}{BD}=k$ 时，

$\because EF\parallel AB$，$\therefore \angle BAD=\angle EGD$，又 $\because \angle BDA=\angle EDG$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle GED$，

$\therefore \dfrac{GE}{AB}=\dfrac{DE}{BD}=k$，即 $GE=kAB$，又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\angle DAC$，

$\therefore \angle FGD=\angle DAC$，$\therefore AF=GF$，$\therefore AF+EF=kAB$.

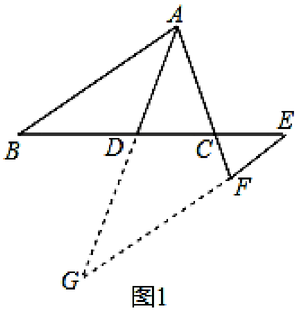


图1

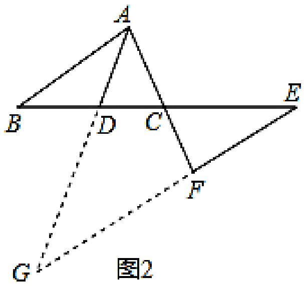


图2

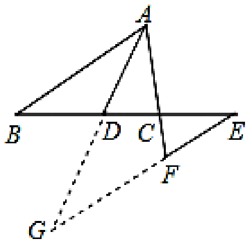


图3

笔记整理

课后作业

【演练1】如图 1，$Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle DBE$，$AB=BC，DB=EB$，D 在 AB 上，连接 AE、CD，易证：$AE=CD$，$AE\perp CD$.

（1）类比：将（1）中的 $Rt\triangle DBE$ 绕点逆时针旋转一个锐角，如图 2，问（1）中线段 AE 和 CD 间的数量关系和位置关系还成立吗？若成立，请给与证明；若不成立，请说明理由.

（2）拓展：在图 2 中，将"$AB=BC$，$DB=EB$"改成"$BC=kAB$，$DB=kEB，k>1$"其它条件均不变，如图 3 所示，问（1）中线段 $AE，CD$ 间的数量关系和位置关系还成立吗？若成立，请给与证明；若不成立，请说明理由.

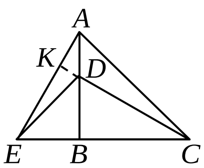


图 1

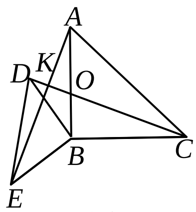


图 2

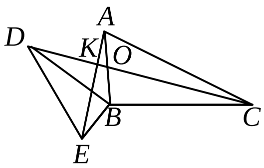


图 3

【解析】（1）$AE=CD，AE\perp CD$，

$\because \angle DBE=\angle ABC=90^\circ$，$\therefore \angle ABE=\angle DBC$，

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CDB$ 中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABE=\angle DBC \\ BE=BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle CDB$，$\therefore AE=CD，\angle EAB=\angle DCB$，

$\because \angle DCB+\angle COB=90^\circ，\angle AOK=\angle COB$，

$\therefore \angle KOA+\angle AOK=90^\circ$，$\therefore \angle AKC=90^\circ$，$\therefore AE\perp CD$；

（3）$AE\neq CD，AE\perp CD$，

$\because BC=kAB，DB=kEB$，$\therefore \dfrac{BE}{AB}=\dfrac{BD}{BC}$，

$\because \angle DBE=\angle ABC=90^\circ$，$\therefore \angle ABE=\angle DBC$，

$\therefore \triangle AEB\backsim\triangle CDB$，

$\therefore \dfrac{AE}{CD}=\dfrac{AB}{BC}$，$\angle EAB=\angle DCB$，

$\therefore kAE=CD$，$\because k>1$，$\therefore AE\neq CD$，

$\because \angle DCB+\angle COB=90^\circ，\angle AOK=\angle COB$，

$\therefore \angle KAO+\angle AOK=90^\circ$，

$\therefore \angle AKC=90^\circ$，$\therefore AE\perp CD$.

【演练2】如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DCE$ 中，$BC=kAC$，$CE=kCD$，$\angle ACB=\angle DCE=\alpha$，连接 AD、BE.

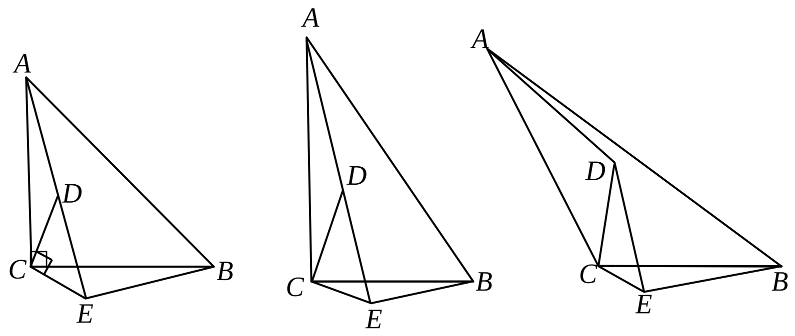


图 1　　　　图 2　　　　图 3

（1）如图 1，α=90°，$k=1$，直接写出 AD 与 BE 的关系：________；

（2）如图 2，α=90°，$k\neq1$ 时，上述关系是否成立？说明理由.

（3）如图 3，$\alpha>90°$，$k\neq1$ 时，(1) 中关系是否成立？如果成立，请加以证明；若不成立，AD 与 BE 关系又怎样？请加以证明.

【解析】（1）∵ $\angle ACB=\angle DCE=90°$，

∴ $\angle ACD+\angle DCB=90°$，$\angle ECB+\angle DCB=90°$，

∴ $\angle ACD=\angle BCE$，

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACD=\angle BCE \\ CD=CE \end{cases}$，

∴ $\triangle ACD\cong\triangle BCE$，∴ $AD=BE$；

（2）∵ $\angle ACB=\angle DCE=90°$，

∴ $\angle ACD+\angle DCB=90°$，$\angle ECB+\angle DCB=90°$，

∴ $\angle ACD=\angle BCE$，

∵ $BC=kAC$，$CE=kCD$，

∴ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CE}{CD}$，

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle BCE$，

∴ $\dfrac{BE}{AD}=k$，即 $BE=kAD$；

（3）∵ $\angle ACB=\angle DCE=\alpha$，

∴ $\angle ACD+\angle DCB=\alpha$，$\angle ECB+\angle DCB=\alpha$，

∴ $\angle ACD=\angle BCE$，

∵ $BC=kAC$，$CE=kCD$，

∴ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CE}{CD}$，

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle BCE$，

∴ $\dfrac{BE}{AD}=k$，即 $BE=kAD$.

【演练3】如图，直线 MN 与线段 AB 相交于点 O，点 C 和点 D 在直线 MN 上，且 $\angle ACN=\angle BDN=45^\circ$.

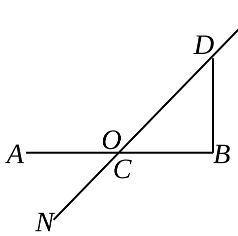


图 1

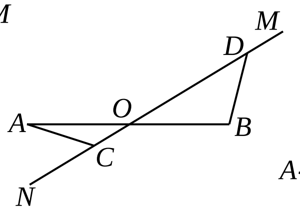


图 2

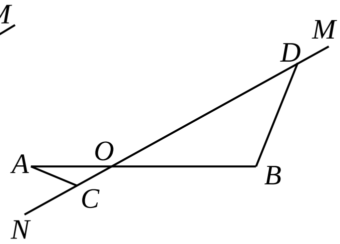


图 3

（1）如图 1 所示，当点 C 与点 O 重合时，且 $AO=OB$，请写出 AC 与 BD 的数量关系和位置关系；

（2）将图 1 所示中的 MN 绕点 O 顺时针旋转到如图 2 所示的位置，$AO=OB$，（1）中的 AC 与 BD 的数量关系和位置关系是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由；

（3）将图 2 中的 OB 拉长为 AO 的 k 倍得到如图 3，求 $\dfrac{AC}{BD}$.

【解析】（1）$AC=BD$，$BD\perp AC$　　　　理由：$\because\angle AON=\angle DOB$，且 $\angle ACN=\angle BDN=45^\circ$

$\therefore\angle BOD=\angle BDO=45^\circ$．$\therefore BD=BC$．$\because AC=BC$，$\therefore AC=BD$．

$\because\angle BOD+\angle BDO+\angle B=180^\circ$，$\therefore\angle B=90^\circ$，$\therefore BD\perp AC$．

（2）$AC=BD$，$BD\perp AC$

理由：作 $AE\perp MN$ 于 E，$BF\perp MN$ 于 F，延长 AC 交 DB 的延长线于点 G，

$\therefore\angle AEC=\angle BFO=\angle BFD=90^\circ$．$\because\angle ACN=\angle GCM$，且 $\angle ACN=\angle BDN=45^\circ$，

$\therefore\angle GCM=45^\circ$，$\therefore\angle G=90^\circ$，$\therefore AC\perp DB$．在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOF$ 中 $\begin{cases}\angle AEO=\angle BFO\\ \angle AOE=\angle BOF\\ AO=BO\end{cases}$，$\therefore\triangle AOE$ $\cong\triangle$ BOF(AASI，$\therefore AE=BF$．在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BDF$ 中 $\begin{cases}\angle ACN=\angle BDN\\ \angle AEC=\angle BFD\\ AE=BF\end{cases}$，$\therefore\triangle ACE\cong\triangle BDF$(AAS)，$\therefore AC=BD$；

（3）作 $AE\perp MN$ 于 E，$BF\perp MN$ 于 F，$\therefore\angle AEC=\angle BFO=\angle BFD=90^\circ$.

$\because\angle AOE=\angle BOF$，$\therefore\triangle AEO\backsim\triangle BFO$，$\therefore\dfrac{AE}{BF}=\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{1}{k}$.

$\because\angle ACN=\angle BDN$，$\angle AEC=\angle BFD$，$\therefore\triangle ACE\backsim\triangle BDF$，$\therefore\dfrac{AE}{BF}=\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{1}{k}$.

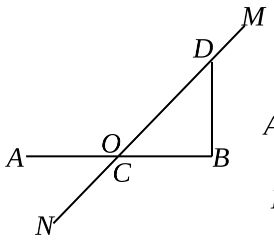


图 1

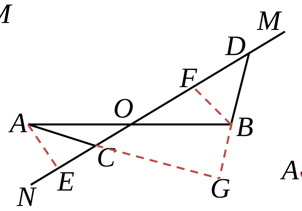


图 2

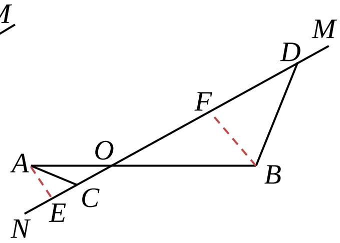


图 3

第 2 讲 二次函数的图像和性质

知识集锦

模块一：二次函数的定义

1．定义：一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）的函数，叫做二次函数．其中 x 是自变量，a，b，c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项．

注意：二次函数的二次项系数 $a\neq 0$，而 b、c 可以为零．

模块二：二次函数的图象和性质

1．二次函数的图象为抛物线，图象注意以下几点：开口方向，对称轴，顶点．

2．二次函数 $y=ax^2\ (a\neq 0)$ 的性质：

（1）函数 $y=ax^2$ 的图象与 a 的符号关系．

①当 $a>0$ 时 $\Leftrightarrow$ 抛物线开口向上 $\Leftrightarrow$ 顶点为其最低点；

②当 $a<0$ 时 $\Leftrightarrow$ 抛物线开口向下 $\Leftrightarrow$ 顶点为其最高点；

③ $|a|$ 决定抛物线的开口大小：$|a|$ 越大，抛物线开口越小；$|a|$ 越小，抛物线开口越大．

（2）抛物线 $y=ax^2$ 的顶点是坐标原点 $(0, 0)$，对称轴是 $x=0$（y 轴）．

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a>0$	向上	$(0, 0)$	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x=0$ 时，y 有最小值 0．
$a<0$	向下	$(0, 0)$	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x=0$ 时，y 有最大值 0．

3．二次函数 $y=ax^2+c\ (a\neq 0)$ 的性质：

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a>0$	向上	$(0, c)$	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x=0$ 时，y 有最小值 c．
$a<0$	向下	$(0, c)$	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x=0$ 时，y 有最大值 c．

4．二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ ($a\neq 0$)的性质：

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a>0$	向上	（h，k）	$x=h$	$x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x=h$ 时，y 有最小值 k．
$a<0$	向下	（h，k）	$x=h$	$x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x=h$ 时，y 有最大值 k．

5．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的性质：

配方：二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a>0$	向上	（$-\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$）	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$．
$a<0$	向下	（$-\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$）	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$．

注意：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与坐标轴的交点：①与 y 轴的交点：$(0,c)$；②与 x 轴的交点：使方程 $ax^2+bx+c=0$ 成立的 x 值．

模块三：二次函数的图像判断

1．二次函数图象与系数的关系

（1）a 的正负性决定抛物线的开口方向

当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下．

$|a|$ 决定抛物线的开口大小：$|a|$ 越大，抛物线开口越小；$|a|$ 越小，抛物线开口越大．

温馨提示：几条抛物线的解析式中，若$|a|$相等，则其形状相同，即若 a 相等，则开口及形状相同，若a互为相反数，则形状相同、开口相反．

（2）a和b共同决定抛物线对称轴的位置（抛物线的对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$）

当 $b=0$时，抛物线的对称轴为y轴；

当 a、b同号时，对称轴在y轴的左侧；

当 a、b异号时，对称轴在y的右侧．

（3）c的正负性决定抛物线与y轴交点的位置（抛物线与y轴的交点坐标为$(0,c)$）

当 $c=0$时，抛物线与y轴的交点为原点；

当 $c>0$时，交点y轴的正半轴；

当 $c<0$时，交点在y轴的负半轴．

2．二次函数的图象信息

（1）根据抛物线的开口方向判断a的正负性：上正下负．

（2）根据抛物线的对称轴与y轴的位置关系判断b的正负性：左同右异，重合为零．

（3）根据抛物线与y轴的交点与原点的位置关系判断c的正负性：上正下负，重合为零．

（4）根据抛物线与x轴的交点个数，判断b^2-4ac的正负性．

（5）根据抛物线的顶点纵坐标，判断$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$的正负性．

（6）根据抛物线的对称轴可得$-\dfrac{b}{2a}$与±1的大小关系，可得$2a\pm b$的正负性．

（7）根据抛物线所经过的已知坐标的点，可得到关于a、b、c的等式．

常见的点有：$(1,a+b+c)$、$(-1,a-b+c)$、$(2,4a+2b+c)$、$(-2,4a-2b+c)$、$(3,9a+3b+c)$、$(-3,9a-3b+c)$

模块一　二次函数的定义

【例1】

判断下列函数是不是二次函数．如果是，则指出二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项．

（1） $y=\sqrt{3}x^2+2xz+5$；　　（2） $y=-5+8x-x^2$；

（3） $y=(3x+2)(4x-3)-12x^2$；　　（4） $y=\sqrt{3}x^2+\dfrac{1}{2}x+1$；

（5） $y=x^2+\dfrac{5}{x^2}+6$；　　（6） $y=mx^2+x$（m是常数）；

（7） $y=x^2+kx+20$（k为常数）；　　（8） $y=1-ax^2+\sqrt{3}x$（a是常数）．

【解析】

（1）不是，函数中有两个自变量 x，z；

（2）是，系数分别为 -1，8，-5；

（3）不是，函数化简得 $y=-x-6$，该函数是一次函数；

（4）是，系数分别为 $\sqrt{3}$，$\dfrac{1}{2}$，1；　（5）不是，它不是关于自变量的整式；

（6）不是，m 可能为 0；（7）是，系数分别为 1，k，20；（8）不是，a 可能为 0.

【教师备课提示】这道题主要讲二次函数的定义，判断是否是二次函数满足以下三点：

（1）函数解析式在等号两边都是整式；

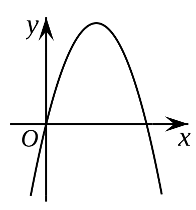
（2）含有一个自变量，且自变量的最高次数时 2；

（3）二次项系数不等于零.

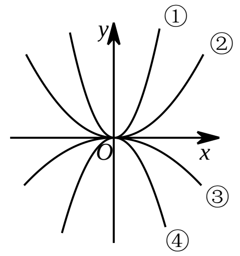
模块二　二次函数的图像和性质

【例2】

（1）若二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-2$（a，b 为常数）的图象如图，则 a 的值为________.



（2）如图，抛物线①②③④对应的解析式为 $y=a_1x^2$ ， $y=a_2x^2$ ， $y=a_3x^2$ ， $y=a_4x^2$ ，将 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 从小到大排列为______.



【解析】

（1） $-\sqrt{2}$ ；

（2） $a_4<a_3<a_2<a_1$.

【教师备课提示】这道题主要考查二次函数中，a 的作用：

（1）a 的正负性决定抛物线的开口方向； $a>0$ ，开口向上； $a<0$ ，开口向下.

（2） $|a|$ 决定抛物线的开口大小： $|a|$ 越大，开口越小； $|a|$ 越小，开口越大.

【例3】

（1）二次函数 $y=x^2-2(k+1)x+4$ 的顶点在 y 轴上，则 $k=$________，若顶点在 x 轴上，则 $k=$________.

（2）若点 $A(2,y_1)$ ， $B(-3,y_2)$ ， $B(5,y_3)$ 三点在抛物线 $y=x^2-4x-m$ 的图象上，则 y_1、y_2、y_3 的大小关系是（ ）

A． $y_1>y_2>y_3$ B． $y_2>y_1>y_3$ C． $y_2>y_3>y_1$ D． $y_3>y_2>y_1$

（3）（2015 成都模拟）已知二次函数 $y=(x-3)^2+1$ ．下列说法：①其图象的开口向下；②其图象的对称轴为直线 $x=3$ ；③其图象顶点坐标为 $(3,-1)$ ；④当 $x<3$ 时，y 随 x 的增大而减小．则其中说法正确的有（ ）

A．1 个 B．2 个 C．3 个 D．4 个

【解析】

（1） -1，1 或 -3． （2）C （3）B

【教师备课提示】这道题主要考查二次函数的基础性质.

【例4】

（1）已知 $y=2x^2+9x+34$，当 x 取不同的值 x_1 ， x_2 时函数值相等，则当 $x=x_1+x_2$ 时的值（ ）

A．与 $x=1$ 的函数相等．　　　　　　B．与 $x=0$ 的函数相等．

C．与 $x=\frac{1}{4}$ 的函数相等．　　　　　　D．与 $x=-\frac{9}{4}$ 的函数相等．

（2）抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(-2,7)$，$B(6,7)$，$C(3,-8)$，则该抛物线上纵坐标为 -8 的另一个点 D 的坐标是____．

【解析】

（1）B；（2）$(1,-8)$

【教师备课提示】这道题主要考查二次函数的对称性，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 是以直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴的轴对称图形，不难得到如下性质：

（1）抛物线上对称两点的纵坐标相等；抛物线上纵坐标相同的两点是对称点．

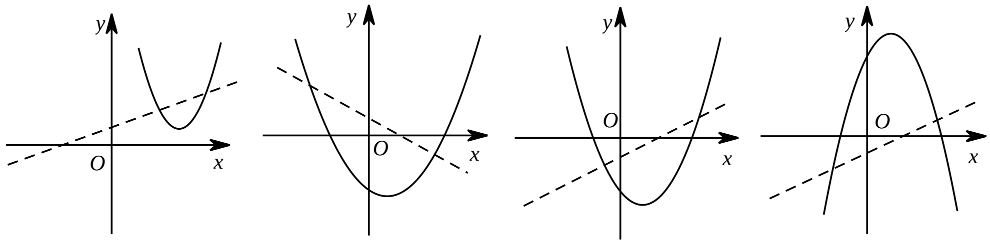
（2）如果抛物线交 x 轴于两点，那么这两点是对称点．

（3）若设抛物线上对称两点的横坐标分别为 x_1 、 x_2，则抛物线的对称轴为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$．

（4）若已知抛物线与 x 轴相交的其中一个交点是 $A(x_1,0)$，且其对称轴是 $x=m$，则另一个交点 B 的坐标可以用 x_1，m 表示出来．

【例5】

如图，已知函数 $y=ax+b$ 和 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，那么它们的图象可以是（　）．



A．　　B．　　C．　　D．

【解析】

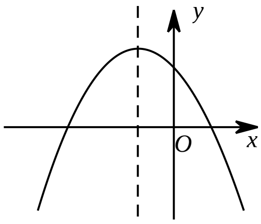
选 C．在 A 选项中，由图像得 $y=ax+b$ 中 $a>0,b>0$，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中，$a>0,b<0$，矛盾；B 选项中，由图像得 $y=ax+b$ 中 $a<0,b>0$，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中，$a>0,b<0$，矛盾；D 选项中，由图像得 $y=ax+b$ 中 $a>0,b<0$，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中，$a<0,b>0$，矛盾；C 符合要求．

【教师备课提示】这道题主要考查一次函数和二次函数图像综合,考查二次函数的性质．

模块三 二次函数的图像判断

【例6】

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则点 $P(a,bc)$ 在第____象限.



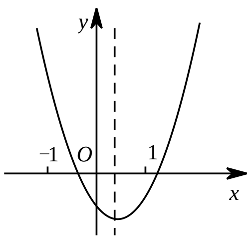
【解析】

由图象可知，$a<0$，$b<0$，$c>0$．$\therefore bc<0$．$\therefore P(a,bc)$ 在第三象限.

【教师备课提示】这道题主要考查二次函数图像判断的第一重境界，根据图像判断 a、b、c 及相互乘积的正负性.

【例7】

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如下右图所示，判断 a，b，c，b^2-4ac，$2a+b$，$a+b+c$，$a-b+c$ 的符号.



【解析】

由图象可知，$a>0$，$b<0$，$c<0$.

同时 $x=-\dfrac{b}{2a}<1$，所以 $2a+b>0$；

函数图象与 x 轴有两个不同的交点，所以 $b^2-4ac>0$；

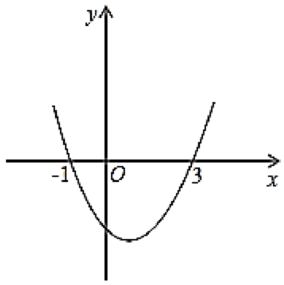
$x=1$ 所对应的函数小于 0，所以 $a+b+c<0$；

$x=-1$ 所对应的函数大于 0，所以 $a-b+c>0$.

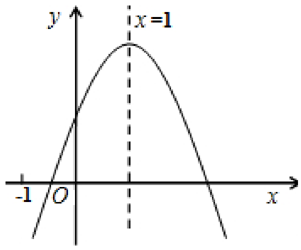
【教师备课提示】这道题主要考查二次函数图像判断的第二重境界，根据图像判断 b^2-4ac，$2a\pm b$ 及 an^2+bn+c 的正负性.

【例8】

（1）（嘉祥月考）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像如图所示，它与 x 轴两个交点分别为 $(-1,0)$，$(3,0)$．对于下列命题：① $b-2a=0$；② $abc<0$；③ $-a-\frac{1}{2}b+c<0$；④ $8a+c>0$．其中正确的有______.（填写序号）



（2）（成外半期）二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图所示，有下列 5 个结论：① $abc<0$；② $b<a+c$；③ $4a+2b+c>0$；④ b^2-4ac；⑤ $a+b>m(am+b)$，（ $m\neq 1$ 的实数），其中正确的结论的有______.（填写序号）



【解析】

（1）③④;

（2）由图象可知， $a<0$， $b>0$， $c>0$，

∴ $abc<0$，故①准确；

当 $x=-1$ 时， $y=a-b+c<0$，即 $b>a+c$，故②错误；

由题意得，二次函数的对称轴为 $x=1$，则 $x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值一样的，

∴当 $x=2$ 时， $y=4a+2b+c=c>0$，故③准确；

由图象知，二次函数的图像和 x 轴有两个不同的交点，故 $b^2-4ac>0$，故④准确；

由题意对称轴为 $x=1$，则 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$，得 $b=-2a$，

所以 $a+b=-a$，$m(am+b)=m(m-2)a$，

$\therefore$ $m(am+b)-(a+b)=(m-1)^2a<0$，故⑤准确.

故①③④⑤.

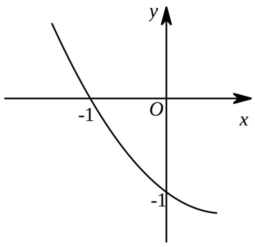
【教师备课提示】这道题主要考查二次函数图象判断的第三重境界，根据图像判断只含有 a 和 b 或者 a 和 c 的式子或者 a、b、c 式子的综合.

【例9】

已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的一段图象如图所示.

（1）确定 a、b、c 的符号；

（2）求 $a+b+c$ 的取值范围.



【解析】

（1）由抛物线开口向上，所以 $a>0$．又抛物线经过点 $(0,-1)$，所以 $c=-1<0$．因为抛物线的对称轴在 y 轴的右侧，从而 $-\dfrac{b}{2a}>0$，结合 $a>0$ 便可知 $b<0$．

所以 $a>0$，$b<0$，$c<0$．

（2）设 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$，由图象及(1)可知

$$\begin{cases} f\left(-1\right)=a-b+c=0, \\ a>0, \\ b<0, \\ c=-1, \end{cases}，即 \begin{cases} a-b=1, \\ b<a<1, \\ -1<b<0, \\ c=-1. \end{cases}$$

因为 $a+b+c=\left(b+1\right)+b-1=2b$，

所以 $-2<a+b+c<0$．

笔记整理

课后作业

【演练1】

（1）下列函数关系中，可以看作二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 模型的是（　　）

A．在一定距离内，汽车行驶的速度与行驶的时间的关系

B．我国人口的自然增长率为 1%，这样我国总人口数随年份变化的关系

C．矩形周长一定时，矩形面积和矩形边长之间的关系

D．圆的周长与半径之间的关系

（2）已知函数 $y=(m^2+m)x^{m^2-m}+(m^2+3m+2)x+m^2+2m$，当 m 是什么数时，函数是二次函数．

【解析】

（1）C；

（2）由二次函数的定义可以知道： $m^2-m=2$，且 $m^2+m\neq 0$

解 $m^2-m=2$ 得： $m=2$ 或 $m=-1$．由 $m^2+m\neq 0$ 知： $m\neq -1$ 且 $m\neq 0$．

所以， $m=2$．此时函数为： $y=6x^2+12x+8$．

【演练2】

（1）已知二次函数 $y_1=-3x^2$、$y_2=-\dfrac{1}{3}x^2$、$y_3=\dfrac{3}{2}x^2$，它们的图象开口由小到大的顺序是（　）

A． y_1，y_2，y_3　　B． y_3，y_2，y_1　　C． y_1，y_3，y_2　　D． y_2，y_3，y_1

（2）抛物线 $y=x^2-x-2$ 的对称轴是_________，顶点坐标为_________，当 x＝_____时，y 有最______值是________.

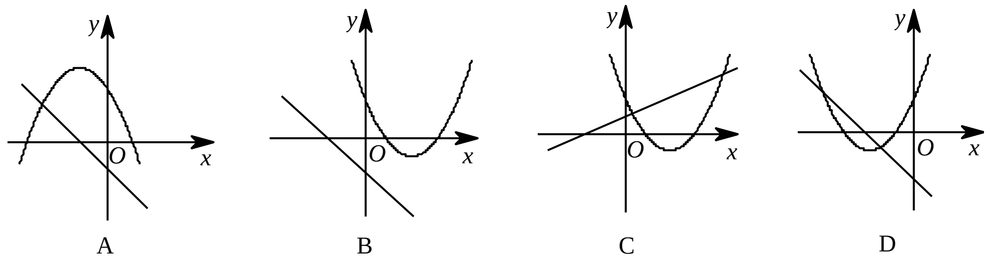
（3）已知点 $A(x_1,5)$， $B(x_2,5)$ 是函数 $y=x^2-2x+3$ 上两点，则当 $x=x_1+x_2$ 时，函数值 $y=$_________.

【解析】

（1）C　（2）$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{9}{4}\right)$，$\dfrac{1}{2}$，小，$-\dfrac{9}{4}$　（3）3

【演练3】

在同一直角坐标系中，函数 $y=mx+m$ 和函数 $y=-mx^2+2x+2$（m 是常数，且 $m\neq 0$）的图象可能是（　）

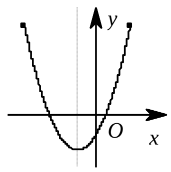


【解析】

考察函数图象与系数的关系．由一次函数的图象判断出 m 的取值范围，再由 m 的取值范围判断二次函数的图象的位置．选 D.

【演练4】

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则一次函数 $y=ax-\frac{b}{c}$ 的图象不经过第__象限.



【解析】

由图象可知，$a>0$，$b>0$，$c<0$.

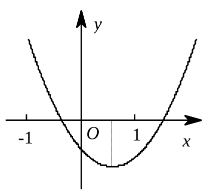
$\therefore \frac{b}{c}<0$.

$\therefore$ 一次函数 $y=ax-\frac{b}{c}$ 的图象不经过第四象限.

【演练5】

$y=ax^2+bx+c$ 的图象如图，

判断 $M=|a+b+c|-|a-b+c|+|2a+b|-|2a-b|$ 的正负性.



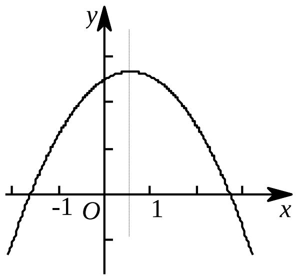
【解析】

由题意得 $a>0$，$0<-\frac{b}{2a}<1$，$\therefore$ $b<0$，$2a+b>0$，$2a-b>0$，

又当 $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$，当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$，

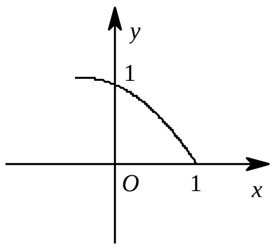
故 $M=-(a+b+c)-(a-b+c)+(2a+b)-(2a-b)=-2(a-b+c)<0$

【演练6】
已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的图象如图所示，判断 abc，$2a+b$，$a-b+c$，$a+c$ 的符号.



【解析】
由图象可知，$a<0$，$b>0$，$c>0$．∴ $abc<0$．
又 $x=-\dfrac{b}{2a}<1$，∴ $2a+b<0$ 当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$，
当 $x=1$ 时，$y=a+b+c>0$，∴ $a+c>0$

【演练7】
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的一部分如图所示，求 a 的取值范围．



【解析】
根据二次函数图象可知 $a<0$，
又此二次函数图象经过 $(1，0)$，$(0，1)$
则有 $a+b+c=0$，$c=1$，得 $b=-(1+a)$，
于是 $y=ax^2-(1+a)x+1=a(x-\dfrac{1+a}{2a})^2+\dfrac{4a-(1-a)^2}{4a}$
根据函数图象可知 $x=\dfrac{1+a}{2a}<0$，$\dfrac{4a-(1-a)^2}{4a}>1$
于是有 $-1<a<0$．

第 3 讲 二次函数的解析式和图像变换

知识集锦

模块一：二次函数的解析式

1．一般式： $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

如果已知二次函数的图象上的三点坐标（或称函数的三对对应值）(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，那么方程组$\begin{cases}y_1=ax_1{}^2+bx_1+c\\ y_2=ax_2{}^2+bx_2+c\\ y_3=ax_3{}^2+bx_3+c\end{cases}$就可以唯一确定 a、b、c，从而求得函数解析式 $y=ax^2+bx+c$.

温馨提示：已知任意 3 点坐标，可用一般式求解二次函数解析式.

2．顶点式： $y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$

由于 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，所以当已知二次函数图象的顶点坐标$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$时，就可以设二次函数形如 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，从而利用其他条件，容易求得此函数的解析式．这里直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 又称为二次函数图象的对称轴.

温馨提示：已知顶点坐标或对称轴时，可用顶点式求解二次函数解析式.

3．交点式： $y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$

我们知道， $y=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，这里 x_1， x_2 分别是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根．当已知二次函数的图象与 x 轴有交点（或者说方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根）时，就可以令函数解析式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，从而求得此函数的解析式.

温馨提示：已知抛物线与 x 轴的两个交点坐标，可用交点式求解二次函数解析式.

4．对称式： $y=a(x-x_1)(x-x_2)+k(a\neq 0)$

温馨提示：当抛物线经过点 (x_1,k) 、(x_2,k) 时，可以用对称式来求二次函数的解析式.

注意：任何二次函数的解析式都可以化成一般式或顶点式，但并非所有的二次函数都可以写成交点式，只有抛物线与 x 轴有交点，即 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，抛物线的解析式才可以用交点式表示．二次函数解析式的这三种形式可以互化.

模块二：二次函数的图象变换

1．二次函数图象的平移

$$\begin{tikzcd} & y=ax^2+bx+c+m & \\ y=a(x+m)^2+b(x+m)+c & y=ax^2+bx+c \arrow[l, "\text{左移}m"'] \arrow[r, "\text{右移}m"] \arrow[u, "\text{上移}m"] \arrow[d, "\text{下移}m"] & y=a(x+m)^2+b(x+m)+c \\ & y=ax^2+bx+c-m & \end{tikzcd}$$

平移规律：在原有函数的基础上“左加右减”，“上加下减”．

2．二次函数图象的对称

二次函数图象的对称一般有五种情况，可以用一般式或顶点式表达．

（1）关于 x 轴对称

$y=ax^2+bx+c$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2-bx-c$.

$y=a(x-h)^2+k$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y=-a(x-h)^2-k$.

（2）关于 y 轴对称

$y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y=ax^2-bx+c$.

$y=a(x-h)^2+k$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y=a(x+h)^2+k$.

（3）关于原点对称

$y=ax^2+bx+c$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2+bx-c$.

$y=a(x-h)^2+k$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y=-a(x+h)^2-k$.

（4）关于顶点对称

$y=ax^2+bx+c$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2-bx+c-\dfrac{b^2}{2a}$.

$y=a(x-h)^2+k$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y=-a(x-h)^2+k$

（5）关于点 (m,n) 对称

$y=a(x-h)^2+k$ 关于点 (m,n) 对称后，得到的解析式是 $y=-a(x+h-2m)^2+2n-k$

根据对称的性质，显然无论作何种对称变换，抛物线的形状一定不会发生变化，因此 $|a|$ 永远不变．求抛物线的对称抛物线的表达式时，可以依据题意或方便运算的原则，选择合适的形式，习惯上是先确定原抛物线（或表达式已知的抛物线）的顶点坐标及开口方向，再确定其对称抛物线的顶点坐标及开口方向，然后再写出其对称抛物线的表达式．

3．二次函数图象的翻折

（1）关于 x 轴翻折（下翻上）

函数 $y=|f(x)|$ 的图象可以由函数 $y=f(x)$ 通过关于 x 轴的翻折变换得到．

具体规则为函数 $y=f(x)$ 图象在 x 轴上方的部分不变，在 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方．

（2）关于 y 轴翻折（消去左边，右抄左）

函数 $y=f(|x|)$ 的图象可以由函数 $y=f(x)$ 通过关于 y 轴的翻折变换得到．

具体规则为先擦去函数 $y=f(x)$ 的图象在 y 轴左边的部分，然后将该函数图象在 y 轴右边的部分翻折复制到左边.

模块一　二次函数的解析式

【例1】

（1）已知一个二次函数过$(0,0)$、$(-1,11)$、$(1,9)$三点，求二次函数的解析式.

（2）已知二次函数过点$(0,-1)$，且顶点为$(-1,2)$，求函数解析式.

（3）若抛物线$y=ax^2+bx+c$过$(-3,0)$，$(1,0)$，且与y轴交点为$\left(0，4\right)$，求二次函数的解析式.

【解析】

（1）设二次函数的解析式为：$y=ax^2+bx+c$，

∵函数图象经过$\left(0，0\right)$，$\left(-1，11\right)$，$\left(1，9\right)$三点，

∴$\begin{cases}0=c,\\11=a-b+c,\\9=a+b+c.\end{cases}$解此方程组，得：$\begin{cases}a=10,\\b=-1,\\c=0.\end{cases}$

∴二次函数的解析式为：$y=10x^2-x$.

（2）设二次函数的解析式为：$y=a(x+1)^2+2$，

∵二次函数过点$\left(0，-1\right)$，

∴$-1=a(0+1)^2+2$，即：$-1=a+2$．∴$a=-3$.

∴二次函数的解析式为$y=-3(x+1)^2+2$，

化为一般式得：$y=-3x^2-6x-1$.

（3）设二次函数的解析式为：$y=a(x+3)(x-1)$，

由题意得，$-3a=4$，解得$a=-\dfrac{4}{3}$

∴二次函数的解析式为$y=-\dfrac{4}{3}(x+3)(x-1)$

化为一般式得：$y=-\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x+4$

【教师备课提示】这道题主要讲解遇到一个给定条件求解析式的情况下，选用哪种方法求解析式最简单.

总结：（1）遇到三个没有特征的点，设为一般式比较简单.

（2）遇到顶点已知时，设为顶点式比较简单.

（3）遇到与 x 轴两个交点已知时，设为交点式比较简单.

【例2】

（1）已知二次函数图象经过点 $A(1,3)$ 、 $B(0,2)$ 、 $C(5,3)$ 三点，求此二次函数解析式.

（2）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=2$ ，且经过点 $(1,4)$ 、 $(5,0)$ ，求二次函数的解析式.

【解析】

（1）解法一：设对称点式

$\because$ 抛物线经过 $A(1,3)$ 、 $C(5,3)$ ，

$\therefore$ 设抛物线的解析式为： $y=a(x-1)(x-5)+3$.

将 $B(0,2)$ 代入得： $5a+3=2$ ，解得 $a=-\dfrac{1}{5}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{5}(x-1)(x-5)+3$ ，化为一般式得 $y=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{6}{5}x+2$.

解法二：设顶点式

$\because$ 抛物线经过 $A(1,3)$ 、 $C(5,3)$ ， $\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x=3$.

设抛物线的解析式为： $y=a(x-3)^2+h$ ，

将 $A(1,3)$ 、 $B(0,2)$ 代入得： $\begin{cases}4a+h=3\\9a+h=2\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\h=\dfrac{19}{5}\end{cases}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{5}(x-3)^2+\dfrac{19}{5}$ ，化为一般式为： $y=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{6}{5}x+2$.

解法三：设一般式

设此二次函数解析式为： $y=ax^2+bx+c$ ，

由已知得： $\begin{cases}a+b+c=3\\c=2\\25a+5b+c=3\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\b=\dfrac{6}{5}\\c=2\end{cases}$

∴此二次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{6}{5}x+2$.

（2）∵二次函数的对称轴为 $x=2$ ，且经过点 $(5,0)$ ，

∴二次函数与 x 轴的另一个交点坐标是 $(-1,0)$ ，

设二次函数的解析式为： $y=a[x-(-1)](x-5)$ ，即： $y=a(x+1)(x-5)$ ，

又∵图象经过点 $(1,4)$ ，

∴ $4=a(1+1)(1-5)$ ， ∴ $a=-\frac{1}{2}$.

∴二次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x+1)(x-5)$ ． 化为一般式得 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$.

【教师备课提示】这道题主要通过讲解遇到一个求二次函数解析式题目的时候，三种设法一般顺序是对称式（交点式），顶点式，一般式，然后练习下第（2）个小题.

【例3】
设二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(0,2)$ 、 $B(1,-1)$ ，且其图象在 x 轴上所截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ ．求这个二次函数的解析式.

【解析】

由题意得， $\begin{cases}c=2,\\a+b+c=-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}c=2,\\b=-(a+3),\end{cases}$ 因此 $y=ax^2-(a+3)x+2$.

设图象与 x 轴的交点坐标为 $(x_1,0)$ ， $(x_2,0)$ ，则

x_1 和 x_2 是方程 $ax^2-(a+3)x+2=0$ 的两根，

由韦达定理， $x_1+x_2=\frac{a+3}{a}$ ， $x_1x_2=\frac{2}{a}$ ，

∴ $2\sqrt{2}=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\frac{a+3}{a}\right)^2-4\times\frac{2}{a}}$ ，

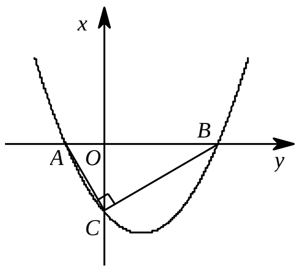
整理得 $7a^2+2a-9=0$ ，则 $a=1$ 或 $a=-\frac{9}{7}$.

∴ $y=x^2-4x+2$ ，或 $y=-\frac{9}{7}x^2-\frac{12}{7}x+2$.

【教师备课提示】这是求解析式的一个变形，较一般的求解析式要难点.

【例4】

如图，已知抛物线 $y=x^2+px+q$ 与 x 轴交于点 A、B，交 y 轴负半轴于 C 点，点 B 在点 A 的右侧，$\angle ACB=90°$，$\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}=\frac{2}{OC}$．求抛物线的解析式.



【解析】

设点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$.

由于抛物线 $y=x^2+px+q$ 与 x 轴交于 A、B 两点，点 B 在点 A 的右侧，且与 y 轴负半轴交于点 $C(0,q)$，

$\therefore$ $x_1<0, x_2>0, q<0$.

由一元二次方程根系关系可得 $x_1+x_2=-p, x_1x_2=q$.

$\because$ $AC\perp CB$，$OC\perp AB$，$\therefore$ $OC^2=OA\cdot OB$，

$\therefore$ $(-q)^2=(-x_1)\cdot x_2=-x_1x_2=-q\Rightarrow q_1=0, q_2=-1$，但 $q=0$ 显然不合题意，故 $q=-1$.

$\because$ $\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}=\frac{2}{OC}$，$\therefore$ $-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=-\frac{2}{q}\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{q}$，

$\therefore$ $\frac{-p}{q}=\frac{2}{q}\Rightarrow p=-2$，故该抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-1$.

模块二　二次函数的图像变换

【例5】

（1）（七中高新半期）二次函数 $y=-2x^2+4x+1$ 的图象如何移动就得到 $y=-2x^2$ 的图象（　）.

A．向左移动 1 个单位，向上移动 3 个单位

B．向右移动 1 个单位，向上移动 3 个单位

C．向左移动 1 个单位，向下移动 3 个单位

D．向右移动 1 个单位，向下移动 3 个单位

（2）一抛物线向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后得抛物线 $y=-2x^2+4x$，则平移前抛物线的解析式为________________.

（3）如果将抛物线 $y=-2x^2+8$ 向右平移 a 个单位后，恰好过点 $(3,6)$，那么 a 的值为_________.

【解析】

（1）将 $y=-2x^2+4x+1$ 配方得： $y=-2(x-1)^2+3$，

要将二次函数 $y=-2(x-1)^2+3$ 的图象平移得到到 $y=-2x^2$，应选 C .

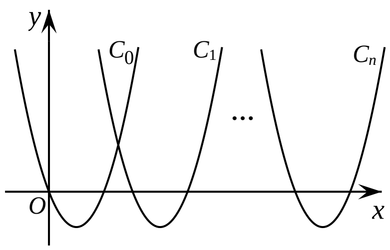
（2）先将得到的函数转化为顶点式 $y=-2\left(x-1\right)^2+2$，则先向上平移 2 个单位，再向左平移 3 个单位得到原抛物线解析式 $y=-2\left(x+2\right)^2+4$，即 $y=-2x^2-8x-4$.

（3） 2 或 4

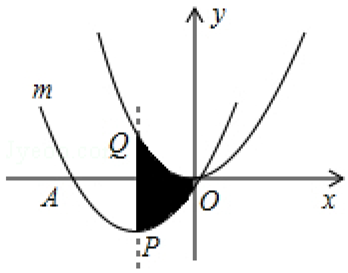
【教师备课提示】这道题主要讲解二次函数的平移，二次函数的平移转化为顶点式，二次函数的平移即为顶点的平移.

【例6】

（1）如图所示，已知抛物线 C_0 的解析式为 $y=x^2-2x$，则抛物线 C_0 的顶点坐标___________；将抛物线 C_0 每次向右平移 2 个单位，平移 n 次，依次得到抛物线 C_1、C_2、C_3、…、C_n（n 为正整数），则抛物线 C_n 的解析式为___________.



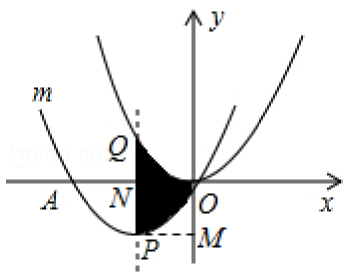
（2）如图，把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 平移得到抛物线 m，抛物线 m 经过点 $A(-6,0)$ 和原点 $O(0,0)$，它的顶点为 P，它的对称轴与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 交于点 Q，则图中阴影部分的面积为___________.



【解析】

（1）$(1,-1)$， $y=x^2-(4n+2)x+4n^2+4n$.

（2）过点 P 作 $PM\perp y$ 轴于点 M,



∵抛物线平移后经过原点 O 和点 $A(-6,\ 0)$，

∴平移后的抛物线对称轴为 x=－3,

得出二次函数解析式为： $y=\frac{1}{2}(x+3)^2+h$ ，

将 $A(-6,\ 0)$ 代入得： $\frac{9}{2}+h=0$ ，

解得： $h=-\frac{9}{2}$， ∴点 P 的坐标是 $\left(-3,-\frac{9}{2}\right)$，

根据抛物线的对称性可知，阴影部分的面积等于矩形 $NPMO$ 的面积，∴ $S=\frac{27}{2}$

【教师备课提示】这道题主要讲解平移中两种比较常考的较难题型，一个是找规律，还有一个是求面积.

【例7】

已知二次函数 $y=x^2-2x-1$，求：

（1）与此二次函数关于 x 轴对称的二次函数解析式为____________________；

（2）与此二次函数关于 y 轴对称的二次函数解析式为____________________；

（3）与此二次函数关于原点对称的二次函数解析式为____________________.

【解析】

（1） $y=-x^2+2x+1$；

（2） $y=x^2+2x-1$；

（3） $y=-x^2-2x+1$．

【教师备课提示】这道题主要讲解二次函数的对称，总结所有函数关于 x 轴，y 轴对称规律为：关于谁对称谁不变，原点对称可以看做先关于 x 轴对称，再关于 y 轴对称.

【例8】
已知二次函数 $y=ax^2+4ax+4a-1$ 的图象是 C_1．
（1）求 C_1 关于点 $R(1,0)$ 中心对称的图象 C_2 的解析式；
（2）设曲线 C_1 、 C_2 与 y 轴的交点分别为 A，B，当 $|AB|=18$ 时，求 a 的值.

【解析】

（1）设 C_1 上任意一点为 (x_1,y_1)，

C_2 上关于 $R(1,0)$ 中心对称的点为 (x_2,y_2)，

则有 $\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=1\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2-x_2\\ y_1=-y_2\end{cases}$

由点 (x_1,y_1) 在 $y=ax^2+4ax+4a-1$ 的图象上可知， $y_1=a{x_1}^2+4ax_1+4a-1$，即

$-y_2=a(2-x_2)^2+4a(2-x_2)+4a-1$．即 $y_2=-a(x_2-2)^2+4a(x_2-2)+1-4a$．

故图象 C_2 的解析式为： $y=-a(x-2)^2+4a(x-2)+1-4a=-ax^2+8ax+1-16a$．

（2）令 $y=ax^2+4ax+4a-1$ 中 $x=0$，可得 $y=4a-1$，故 $A(0,4a-1)$；

令 $y=-ax^2+8ax+1-16a$ 中 $x=0$，可得 $y=1-16a$，故 $B(0,1-16a)$．

又 $|AB|=18$，故 $|20a-2|=18\Rightarrow a=1$ 或 $a=-\dfrac{4}{5}$．

【教师备课提示】这道题主要讲解二次函数的对称,关于某点对称.

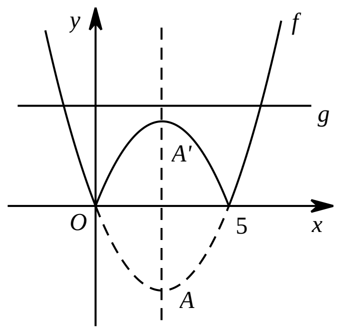
【例9】

当 a 在什么范围内取值时，对于方程 $|x^2-5x|=a$，①没有实根；②有两个实根；③有三个实根；④有四个实根.

【解析】

构造 $y_1=|x^2-5x|$ 和 $y_2=a$． 方程 $|x^2-5x|=a$ 的解也即函数 y_1 与 y_2 图象的交点.

函数 $y_2=a$ 的图象是截距为 a，与 x 轴平行的直线；而函数 $y_1=|x^2-5x|$ 的图象可以由抛物线 $y=x^2-5x$ 的图象经过关于 x 轴的翻折得到，如图：



由于函数 $y=x^2-5x$ 的顶点为 $A\left(\frac{5}{2},-\frac{25}{4}\right)$，

因此 $A'\left(\frac{5}{2},\frac{25}{4}\right)$． 于是根据图象有：

①当 $a<0$ 时，原方程没有实根；

②当 $a=0$ 时，原方程有且只有两个实数根；

③当 $0<a<\frac{25}{4}$ 时，原方程有 4 个不同实根；

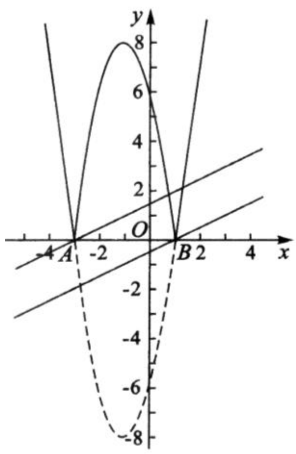
④当 $a=\frac{25}{4}$ 时，原方程有 3 个不同实根；

⑤当 $a>\frac{25}{4}$ 时，原方程有 2 个不同实根.

【教师备课提示】该题型属于用函数的观点看方程，用数形结合的方法解方程，首先引导 $y_1=y_2$ 的根就是两个函数 y_1 与 y_2 的交点，其次需要学生通过方程的形式灵活的构造函数.在课堂上用几何画板来解决该类问题更浅显易懂，是一个亮点.

【例10】
（成外周考）已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有实数根，k 为正整数.
（1）求 k 的值；
（2）当此方程有两个非零的整数根时，将关于 x 的二次函数 $y=2x^2+4x+k-1$ 的图象向下平移 8 个单位，求平移后的图象的解析式；
（3）在（2）的条件下，将平移后的二次函数的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新的图象．请你结合这个新的图象回答：当直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ ($b<k$)与此图象有两个公共点时，b 的取值范围.

【解析】



（1）由题意得，$\triangle=16-8(k-1)\geqslant 0$.
∴ $k\leqslant 3$．∵ k 为正整数，
∴ $k=1$，2，3.
（2）当 $k=1$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有一根为零；
当 $k=2$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 无整数根；
当 $k=3$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有两个非零的整数根.
综上所述，$k=1$ 和 $k=2$ 不合题意，舍去；$k=3$ 符合题意.
当 $k=3$ 时，二次函数为 $y=2x^2+4x+2$，把它的图象向下平移 8 个单位得到的图象的解析式为
$y=2x^2+4x-6$.
（3）设二次函数 $y=2x^2+4x-6$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，则 $A(-3,0)$，$B(1,0)$.
依题意翻折后的图象如图所示.
当直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 经过 A 点时，可得 $b=\frac{3}{2}$；
当直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 经过 B 点时，可得 $b=-\frac{1}{2}$.
由图象可知，符合题意的 $b(b<3)$ 的取值范围为 $-\frac{1}{2}<b<\frac{3}{2}$.
【教师备课提示】二次函数图像翻折变换解答题为月考、周考的压轴题．分值在 10 分左右，在分析过程中最需要关注的是变化过程中的临界位置，从而结合一元二次方程根的判别式解决交点问题.

笔记整理

课后作业

【演练1】

（1）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过 $A(-1，-1)$、 $B(0，2)$ 、$C(1，3)$，求二次函数的解析式.

（2）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=1$，且图像过点 $A(3,0)$ 和 $B(-2,5)$，求此函数的解析式.

【解析】

（1） $y=-x^2+2x+2$；（2） $y=x^2-2x-3$

【演练2】

设二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=3$ 时取得最大值为 10，并且它的图象在 x 轴上截得的线段长为 4．求二次函数的解析式.

【解析】

因为对称轴为 $x=3$，且在 x 轴上截得的线段长为 4，

则图象可知，与 x 轴的交点的横坐标为 1、5，

可设 $y=a\left(x-1\right)\left(x-5\right)$，$\therefore$ $-4a=10$ 解得 $a=-\dfrac{5}{2}$．$\therefore$ $f\left(x\right)=-\dfrac{5}{2}x^2+15x-\dfrac{25}{2}$．

【演练3】

已知函数 $y=x^2-|x|-12$ 的图象与 x 轴交于相异两点 A、 B，另一抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 A、 B，顶点为 P，且 $\triangle APB$ 是等腰直角三角形，求 a、b、c.

【解析】

由已知得 $A\left(4，0\right)$、 $B\left(-4，0\right)$，故设另一抛物线为 $y=a\left(x-4\right)\cdot\left(x+4\right)$．

又 ΔAPB 是等腰直角三角形，则 P 点坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,-4)$，

$$\therefore\begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\ b=0,\\ c=-4,\end{cases}\quad 或\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4},\\ b=0,\\ c=4.\end{cases}$$

【演练4】

（1）（树德实验半期）把抛物线 $y=-x^2$ 向左平移 1 个单位，然后向上平移 3 个单位，则平移后的抛物线的解析式为（　）

A． $y=-(x-1)^2-3$　　　　B． $y=-(x+1)^2-3$

C． $y=-(x-1)^2+3$　　D． $y=-(x+1)^2+3$

（2）将函数 $y=x^2+x$ 的图象向右平移 $a(a>0)$ 个单位，得到函数 $y=x^2-3x+2$ 的图象，则 a 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

（3）在平面直角坐标系中，先将抛物线 $y=x^2+x-2$ 关于 x 轴作轴对称变换，再将所得的抛物线关于 y 轴作轴对称变换，那么经两次变换后所得的新抛物线的解析式为（　　）

A． $y=-x^2-x+2$　B． $y=-x^2+x-2$　C． $y=-x^2+x+2$　D． $y=x^2+x+2$

【解析】

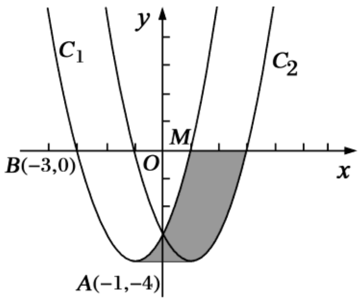
（1）D;（2）B;（3）C

【演练5】

如图，在平面直角坐标 xOy 中，抛物线 C_1 的顶点为 $A(-1,-4)$，且过点 $B(-3,0)$

（1）将抛物线 C_1 向右平移 2 个单位得抛物线 C_2，设 C_2 的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，求 a，b，c 的值;

（2）写出阴影部分的面积 $S=$____________.



【解析】

（1） $a=1$，$b=-2$，$c=-3$　（2） 8

【演练6】

（1）若方程 $x^2+2a|x|+4a^2-3=0$ 有且只有一个实数根，则实数 $a=$____.

（2）已知关于 x 的方程 $x^2-2|x|+2=m$ 恰有三个实数根，求 m 的值.

【解析】

（1）设函数 $y=x^2+2a|x|+4a^2-3$，则显然 y 的图象关于 y 轴对称.

$\because$ $y=0$ 有且只有一个实数根，$\therefore$这个实数根只有可能为 0

因此 $f(0)=0$，$4a^2-3=0$，解得 $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

经检验当 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，原方程有三个不同的实数根，舍去.

而当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，原方程只有一个实数根，符合题意.

（2）由图象可得，$m=2$.

第4讲 二次函数的区间最值

知识集锦

二次函数的区间最值问题可以分为以下四个类:

1．定轴定区间

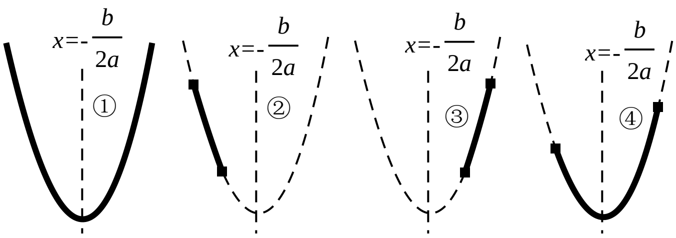
对于二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$ 在 $m\leqslant x\leqslant n$ 上的最值问题（其中 a、b、c、m 和 n 均为定值，$y_{\max}$ 表示 y 的最大值，$y_{\min}$ 表示 y 的最小值）

（1）若自变量 x 为全体实数，如图①，函数在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，取到最小值，无最大值.

（2）若 $n<-\dfrac{b}{2a}$，如图②，当 $x=m$，$y=y_{\max}$；当 $x=n$，$y=y_{\min}$.

（3）若 $m>-\dfrac{b}{2a}$，如图③，当 $x=m$，$y=y_{\min}$；当 $x=n$，$y=y_{\max}$.

（4）若 $m\leqslant-\dfrac{b}{2a}\leqslant n$，$n+\dfrac{b}{2a}>-\dfrac{b}{2a}-m$，如图④，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$，$y=y_{\min}$；当 $x=n$，$y=y_{\max}$.



2．定轴动区间

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$，若 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 为定值，在 $m\leq x\leq n$（m，n 为参数）条件下，函数的最值需要分别讨论 m，n 与 $-\dfrac{b}{2a}$ 的大小.

3．动轴定区间

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$，若 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 为参数，在 $m\leq x\leq n$（m，n 为定值）条件下，函数的最值需要分别讨论 m，n 与 $-\dfrac{b}{2a}$ 的大小.

4．动轴动区间

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$，若 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 为参数，在 $m\leq x\leq n$（m，n 为参数）条件下，函数的最值需要分别讨论 m，n 与 $-\dfrac{b}{2a}$ 的大小.

模块一　定轴定区间

【例1】

分别求出在下列条件下，函数$y=-2x^2+3x+1$的最值：
（1）x取任意实数；（2）当$-2\leqslant x\leqslant 0$时；（3）当$1\leqslant x\leqslant 3$时；（4）当$-1\leqslant x\leqslant 2$时.

【解析】

（1）$y=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$，∴当$x=\dfrac{3}{4}$时，函数的最大值为$\dfrac{17}{8}$，无最小值；

（2）∵$x=\dfrac{3}{4}$在$-2\leqslant x\leqslant 0$右侧，
∴当$x=0$时，函数取得最大值1；当$x=-2$时，函数取得最小值-13；
（3）∵$x=\dfrac{3}{4}$在$1\leqslant x\leqslant 3$左侧，
∴当$x=1$时，函数取得最大值2；当$x=3$时，函数取得最小值-8；
（4）∵$-1\leqslant\dfrac{3}{4}\leqslant 2$，且$\left|-1-\dfrac{3}{4}\right|>\left|\dfrac{3}{4}-2\right|$，
∴当$x=\dfrac{3}{4}$时，函数取得最大值$\dfrac{17}{8}$；当$x=-1$时，函数取得最小值-4.
【教师备课提示】这道题主要讲解定轴定区间最值的求法.

【例2】试求$y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$在$-3\leqslant x\leqslant 3$的最值.

【解析】

令$t=x^2+5x$，则有$y=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)+5=(t+4)(t+6)+5=t^2+10t+29$

∵当$-3\leqslant x\leqslant 3$时，t的取值范围是$-\dfrac{25}{4}\leqslant t\leqslant 24$，

∴原题转化为当$-\dfrac{25}{4}\leqslant t\leqslant 24$时，求$y=t^2+10t+29$的最大值和最小值.

∵$y=(t+5)^2+4$，故当$t=-5$时，$y_{\min}=4$. 而当$-5=x^2+5x$解得：$x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$，

又∵$-3\leqslant x\leqslant 3$，∴当$x=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$时，$y_{\min}=4$.

当 $t=-\frac{25}{4}$ 时，$y=5\frac{9}{16}$；当 $t=24$ 时，$y=845$，而 $845>5\frac{9}{16}$，

∴当 $t=24$ 时，即 $x=3$ 时，$y_{\max}=845$．

【教师备课提示】这道题主要是高次函数利用换元转化为二次函数区间最值.

模块二 定轴动区间

【例 3】
已知函数 $y=x^2-2x+2$ 在 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 范围内的最小值为 s，写出函数 s 关于 t 的函数解析式，并求出 s 的取值范围.

【解析】

二次函数 $y=x^2-2x+2$ 的对称轴是 $x=1$，

①当 $t>1$ 时，对称轴在 $x=t$ 左边，∴ $s=t^2-2t+2$；
②当 $t\leqslant 1\leqslant t+1$，即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，最小值 s 在顶点处取得，∴ $s=1$；
③当 $t+1<1$，即 $t<0$ 时，对称轴在 $x=t+1$ 右边，∴ $s=t^2+1$．

综上所述：$s=\begin{cases}t^2+1\,(t<0)\\1\,(0\leqslant t\leqslant 1)\\t^2-2t+2\,(t>1)\end{cases}$

∴ s 的取值范围为 $s\geqslant 1$．
【教师备课提示】这道题主要讲解定轴动区间最值的求法，分类讨论.

【例 4】
若函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ ($b>a$)上的最小值为 $2a$，最大值为 $2b$．求 a、b 的值.

【解析】
函数的对称轴为 $x=0$，下面分三种情况加以讨论：
（1）若 $0\leqslant a<b$ 时，即函数在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上单调递减，有

$\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2b\\-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2a\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$．

（2）若 $a<0<b$ 时，则由函数图象知，函数在 $a\leqslant x\leqslant 0$ 上单调递增，在 $0\leqslant x\leqslant b$ 上单调递减，即区间过

了对称轴，因此在 $x=0$ 处有最大值 $2b$，即 $2b=\frac{13}{2}$，得 $b=\frac{13}{4}$．

而函数的最小值在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取得，

又由于 $a<0$，并且当 $x=b$ 时，$y=-\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}\right)^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}>0$，

故函数的最小值在 $x=a$ 处取得，则有 $2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$，

解得 $a=-2-\sqrt{17}$ 或 $a=-2+\sqrt{17}$（舍去）．从而 $\begin{cases}a=-2-\sqrt{17}\\ b=\frac{13}{4}\end{cases}$．

（3）当 $a<b\leqslant 0$ 时，即函数在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上单调递增，有

$\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2a\\ -\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2b\end{cases}$．

由于 a、b 是方程 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}=2x$ 的两个根，又因为两根之积为负数，即两根异号，这与 $a<b\leqslant 0$ 矛盾，故不存在．

综上所述，得 $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2-\sqrt{17}\\ b=\frac{13}{4}\end{cases}$．

模块三　动轴定区间

【例 5】

已知函数 $y=-9x^2-6ax-a^2+2a$ 在区间 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$ 有最大值 -3，求实数 a 的值．

【解析】

因为 $y=-9\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+2a$，$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，它的对称轴是直线 $x=-\frac{a}{3}$，

于是必须根据值 $x=-\frac{a}{3}$ 是否在 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$ 的范围内分三种情况讨论．

（1）当 $-\frac{a}{3}<-\frac{1}{3}$ 时，即 $a>1$ 时，y 在区间 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$ 随着 x 的增加而减少，

这时，当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，函数的最大值是 $-a^2+4a-1$，

∴ $-a^2+4a-1=-3$．得 $a=2\pm\sqrt{6}$．因 $a>1$，故 $a=2+\sqrt{6}$．

（2）当 $-\frac{1}{3}\le-\frac{a}{3}\le\frac{1}{3}$ 时，即 $-1\leqslant a\leqslant1$ 时，

这时，当 $x=-\frac{a}{3}$ 时，函数的最大值是 $2a$，∴ $2a=-3$ 得 $a=-\frac{3}{2}$，这与 $-1\leqslant a\leqslant1$ 矛盾．

（3）当 $-\frac{a}{3}>\frac{1}{3}$，即 $a<-1$ 时，y 在区间 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$ 随着 x 增加而增加，

这时，当 $x=\frac{1}{3}$ 时，函数的最大值是 $-a^2-1$，

∴ $-a^2-1=-3$，得 $a=\pm\sqrt{2}$．因为 $a<-1$，故 $a=-\sqrt{2}$．

综上所述，满足题意的 a 为 $2+\sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{2}$．

【教师备课提示】这道题主要讲解动轴定区间最值的求法，分类讨论，讨论对称轴在区间的左侧，右侧还是中间．

【例 6】

设 $y=x^2+ax+3-a$，当 $-2\leqslant x\leqslant2$ 时，y 的值恒为非负数，求实数 a 的取值范围．

【解析】

$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+3-a-\frac{a^2}{4}$．要使 $y\ge0$ 在 $-2\le x\le2$ 时恒成立，就是要使当 $-2\leqslant x\leqslant2$ 时，y 的最小值为非负．

①当 $-\frac{a}{2}<-2$，即 $a>4$ 时，二次函数在 $x=-2$ 时取得最小值 $7-3a$．

由 $7-3a\geqslant0$，得 $a\leqslant\frac{7}{3}$，这与 $a>4$ 矛盾，此时 a 不存在．

②当 $-2\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant2$，即 $-4\leqslant a\leqslant4$ 时，二次函数在 $x=-\frac{a}{2}$ 时取得最小值 $3-a-\frac{a^2}{4}$．

由 $3-a-\frac{a^2}{4}\geqslant0\Leftrightarrow a^2+4a-12\leqslant0\Leftrightarrow-6\leqslant a\leqslant2$，此时 $-4\leqslant a\leqslant2$．

③当 $-\frac{a}{2}>2$，即 $a<-4$ 时，二次函数在 $x=2$ 时取得最小值 $7+a$．

由 $7+a\geqslant0$，得 $a\geqslant-7$，此时 $-7\leqslant a<-4$．

综上所述，a 的取值范围是 $-7\leqslant a\leqslant2$．

【教师备课提示】这道题实际上是恒成立问题，转化为二次函数最值问题．

【例 7】

函数 $y=ax^2+(2a-1)x-3\ (a\neq 0)$ 在区间 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 上的最大值为 1，求实数 a 的值.

【解析】

因为是求闭区间上的最值，则最大值可能产生在抛物线的端点或顶点上．函数 y 的最大值只能在 $x_1=-\frac{3}{2}$ 或 $x_2=2$ 或 $x_0=\frac{1-2a}{2a}$ 处取得.

①当 $x=x_1=-\frac{3}{2}$ 时，取得最大值，解得 $a=-\frac{10}{3}$．此时 $x_0=\frac{1-2a}{2a}=\frac{23}{20}$，故函数 y 的最大值不可能在 $x_1=-\frac{3}{2}$ 处取得.

②当 $x=x_2=2$ 时，取得最大值，解得 $a=\frac{3}{4}$．此时 $x_0=\frac{1-2a}{2a}=-\frac{1}{3}$，故当 $a=\frac{3}{4}$ 时取得最大值 1.

③当 $x=x_0=\frac{1-2a}{2a}$ 时，取得最大值，解得 $a=\frac{-3\pm 2\sqrt{2}}{2}$，要使函数 y 在 x_0 处取得最大值，

必须且只需 $\alpha<0$ 且 $-\frac{3}{2}\leqslant x_0\leqslant 2$，经检验，只有 $a=-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

综上所述，所求的 a 值为 $a=\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

【例 8】设变量 x 满足 $x^2+bx\leqslant -x\left(b<-1\right)$，并且 x^2+bx 的最小值是 $-\frac{1}{2}$，求 b 的值．

【解析】

由 $x^2+bx\leqslant -x$ 得 $x\left[x+\left(b+1\right)\right]\leqslant 0$，而 $b<-1$，所以得到 $0\leqslant x\leqslant -\left(b+1\right)$.

令 $y=x^2+bx$，则 $y=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}$．下面来求函数在 $0\leqslant x\leqslant -\left(b+1\right)$ 范围内的最小值.

① 若 $-\left(b+1\right)<-\frac{b}{2}$，即 $-2<b<-1$，则函数 y 在 $x=-\left(b+1\right)$ 时取得最小值，

$y_{\min}=\left(\frac{b}{2}+1\right)^2-\frac{b^2}{4}=b+1$．$\therefore b+1=-\frac{1}{2}$，即 $b=-\frac{3}{2}$.

②若$-\frac{b}{2}\leqslant -(b+1)$，即$b\leqslant -2$，则函数$y$在$x=-\frac{b}{2}$时取得最小值

$y_{\min}=-\frac{b^2}{4}$，$\therefore -\frac{b^2}{4}=-\frac{1}{2}$，即$b=\pm\sqrt{2}$.

但是$b=\pm\sqrt{2}$不满足$b\leqslant -2$，所以$b=\pm\sqrt{2}$应当舍去.

综上所述，所求的b的值为$-\frac{3}{2}$.

【教师备课提示】这道题主要讲解动轴动区间的最值问题求解，实际上方法一样是分类讨论.

笔记整理

课后作业

【演练1】

（1）求函数$y=2x^2-x+1$的最小值；

（2）若$1\leqslant x\leqslant 2$，求$y=2x^2-x+1$的最大值、最小值；

（3）若$0\leqslant x\leqslant 1$，求$y=2x^2-x+1$的最大值、最小值；

（4）若$-2\leqslant x\leqslant 0$，求$y=2x^2-x+1$的最大值、最小值.

【解析】

（1）当$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$时，$y$的最小值是$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{7}{8}$；

（2）由图像可知：当$1\leqslant x\leqslant 2$时，函数$y=2x^2-x+1$单调递增，当$x=1$时，y最小，且

$y=2\times 1-1+1=2$，当$x=2$时，y最大，且$y=2\times 2^2-2+1=7$.

（3）由图像可知：当$0\leqslant x\leqslant 1$时，函数$y=2x^2-x+1$是先减后增，∴当$x=\frac{1}{4}$，y最小，且$y=\frac{7}{8}$. ∵当$x=0$时，$y=2\times 0-0+1=1$当$x=1$时，$y=2\times 1-1+1=2>1$，∴当$x=1$时，y最大，且$y=2$.

（4）由函数图像开口向上，且$-2\leqslant x\leqslant 0<\frac{1}{4}$，

故当$x=-2$时，y取最大值为11，当$x=0$时，y取最小值为1.

【演练2】

已知函数$y=x^2-4x+2$在$t\leqslant x\leqslant t+1$范围内的最小值为$s$，写出函数$s$关于$t$的函数解析式.

【解析】

二次函数$y=x^2-4x+2$的对称轴是$x=2$，

①当$t>2$时，对称轴在$x=t$左边，∴$s=t^2-4t+2$；

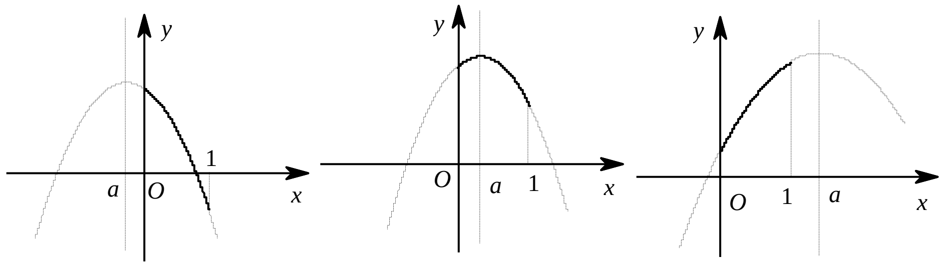
②当$t\leq 2\leq t+1$，即$1\leq t\leq 2$时，最小值s在顶点处取得，∴$s=-2$；

③当$t+1<2$，即$t<1$时，对称轴在$x=t+1$右边，∴$s=t^2-2t-1$.

综上所述：$s=\begin{cases}t^2-4t+2(t>2)\\-2(1\leq t\leq 2)\\t^2-2t-1(t<1)\end{cases}$

【演练3】
已知函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上有最大值 2，求 a 的值.

【解析】
按对称轴进行讨论：



当对称轴 $x=a<0$ 时，如左图所示.

当 $x=0$ 时，y 有最大值，$y_{\max}=1-a$，

$\therefore 1-a=2$，即 $a=-1$，且满足 $a<0$ $\quad\therefore a=-1$.
当对称轴 $0\leqslant x=a\leqslant 1$ 时，如中图所示，

当 $x=a$ 时，y 有最大值，$y_{\max}=-a^2+2a^2+1-a=a^2-a+1$.

$\therefore a^2-a+1=2$. 解得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（$\because 0\leqslant a\leqslant 1$，舍去）.
当对称轴 $x=a>1$ 时，如右图所示.

当 $x=1$ 时，y 有最大值，$y_{\max}=2a-a=2$，且满足 $a>1$，$\therefore a=2$.

综上可知：$a=-1$ 或 $a=2$.

【演练4】
当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，求函数 $y=x^2+ax+b$ 的最值.

【解析】

由题意得，$y=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$，要使 $-\dfrac{a}{2}$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内，就必须 $0\leqslant -\dfrac{a}{2}\leqslant 1$，即

$-2\leqslant a\leqslant 0$. 因此当 $a>0$ 和 $a<-2$ 时，$-\dfrac{a}{2}$ 就不在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内. 现分别探讨其极值如下：

（1）如果 $a>0$，则当 $x=0$ 时，$y=b$；当 $x=1$ 时，$y=1+a+b$. 由于 $a>0$，所以

$1+a+b>b$，所以 $y_{\max}=1+a+b$， $y_{\min}=b$．

（2）如果 $-2\leqslant a\leqslant 0$，则当 $x=-\frac{a}{2}$ 时， $y_{\min}=b-\frac{a^2}{4}$．

当 $x=0$ 时， $y=b$，当 $x=1$ 时， $y=1+a+b$，

假如 $a\geqslant -1$，则 $1+a+b\geqslant 0$，所以 $y_{\max}=1+a+b$．

假如 $a<-1$，则 $1+a+b<b$，所以 $y_{\max}=b$．

（3） $a<-2$，则当 $x=0$ 时， $y=b$；当 $x=1$ 时， $y=1+a+b$．
由于 $a<-2$，所以 $1+a<0$，故 $1+a+b<b$．

所以 $y_{\max}=b$， $y_{\min}=1+a+b$．

由此可得，当 $a>0$ 时， $y_{\max}=1+a+b$， $y_{\min}=b$；

当 $-1\leqslant a\leqslant 0$ 时， $y_{\max}=1+a+b$， $y_{\min}=b-\frac{a^2}{4}$；

当 $-2\leqslant a<-1$ 时， $y_{\max}=b$， $y_{\min}=b-\frac{a^2}{4}$；

当 $a<-2$ 时， $y_{\max}=b$， $y_{\min}=1+a+b$．

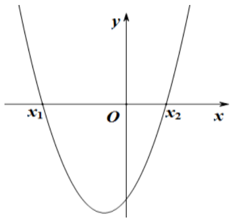
第 5 讲 二次方程根的分布问题

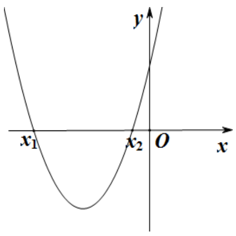
知识集锦

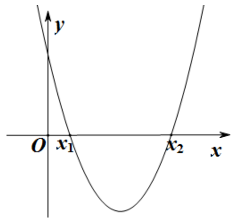
一元二次方程根的分布问题，即一元二次方程的实根在什么区间内的问题，实质就是其相应二次函数的零点（图象与 x 轴的交点）问题，因此，借助于二次函数及其图象利用数形结合的方法来研究是非常有益的.

模块一：0 分布和 *k* 分布

（1）0 分布：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两个实数根都大于 0 或两根都小于 0 或者一个实数根大于 0，一个实数根小于 0.（不妨设两实数根为 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$）

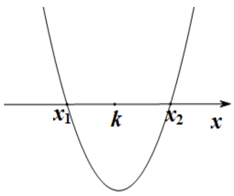


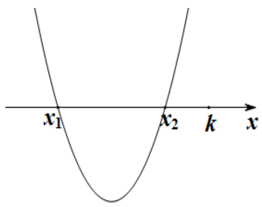


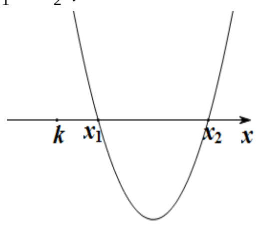


$x_1<0<x_2$　　$x_1<x_2<0$　　$0<x_1<x_2$

（2）k 分布：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根都大于 k 或两根都小于 k 或者一个实数根大于 k，一个实数根小于 k.（不妨设两实数根为 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$）





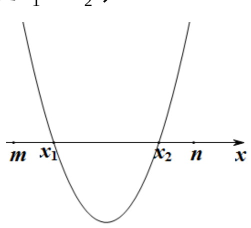


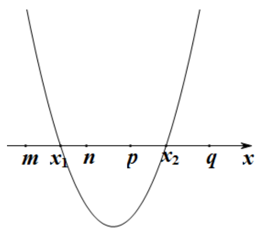
$x_1<k<x_2$　　$x_1<x_2<k$　　$k<x_1<x_2$

模块二：区间分布

单区间：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两个实数根都大于 m，小于 n.

双区间：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的一个实数根大于 m 小于 n，一个实数根大于 p 小于 q.（不妨设两实数根为 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$）





$m<x_1<x_2<n$　　$m<x_1<n<p<x_2<q$

模块一 0分布和k分布

【例1】

已知关于x的方程$x^2+(m-5)x+m-2=0$有实根，求实数m的取值范围，使方程的两根分别有以下情况：

（1）两根都大于0;

（2）两根都小于0;

（3）一根大于0，一根小于0.

【解析】

（1）设$y=x^2+\left(m-5\right)x+m-2$,

因为方程$x^2+\left(m-5\right)x+m-2=0$的两根都大于0，所以

$$\begin{cases}\Delta=(m-5)^2-4(m-2)\geqslant 0\\ -\dfrac{m-5}{2}>0\\ m-2>0\end{cases}\quad 解得\begin{cases}m\le 3或m\ge 11\\ m<5\\ m>2\end{cases}$$

$\therefore 2<m\leqslant 3$

（2）同理可得，$m\geqslant 11$

（3）同理可得，$m<2$

【**教师备课提示**】这道题主要考查二次方程的0分布，主要是数形结合解决.

【例2】

已知方程$x^2-11x+(30+a)=0$有两实根，且两根都大于5，证明：$0<a\le\dfrac{1}{4}$.

【解析】

设$y=x^2-11x+\left(30+a\right)$，对称轴$x=\dfrac{11}{2}>5$

因为方程$x^2-11x+\left(30+a\right)=0$的两根都大于5，所以有

$$\begin{cases}\Delta=121-4\left(30+a\right)\geqslant 0\\ 25-55+\left(30+a\right)>0\end{cases}\ 即\begin{cases}1-4a\geqslant 0\\ a>0\end{cases},$$

解得$0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$.

【**教师备课提示**】这道题主要考查k分布，其实方法和0分布是一样的.

【例3】

已知方程$ax^2+(a+2)x+9a=0$的两个实根x_1和x_2，且$x_1<1<x_2$，求实数a取值范围.

【解析】

设$y=ax^2+(a+2)x+9a$，由题意得，$a\neq 0$

∵方程$ax^2+(a+2)x+9a=0$的两个实根x_1和x_2，且$x_1<1<x_2$，

∴（1）当$a>0$时，由题意得，$a+(a+2)+9a<0$

解得$a<-\dfrac{2}{11}$，∴此时，无解；

（2）当$a<0$时，由题意得，$a+(a+2)+9a>0$

解得$a>-\dfrac{2}{11}$，∴$-\dfrac{2}{11}<a<0$

【教师备课提示】这道题主要讲解k分布，但是这道题和上道题不同在于二次项系数a的值不确定符号，所以要分类讨论，由题意得，$a\neq 0$，这道题也可以令$y=x^2+\dfrac{(a+2)x}{a}+9$，然后根据根的分布去求解,建议老师两种方法都讲下.

模块二　区间分布

【例4】

实数a在什么范围内取值时，关于x的方程$x^2-(2-a)x+5-a=0$的一个根大于0而小于2，另一个根大于4而小于6？

【解析】

设$y=x^2-\left(2-a\right)x+5-a$，

由题，抛物线与x轴的两交点分别落在$(0,2)$和$\left(4,6\right)$内，

$$\begin{cases}5-a>0,\\a+5<0,\\3a+13<0,\\5a+29>0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}a<5,\\a<-5,\\a<-\dfrac{13}{3},\\a>-\dfrac{29}{5}\cdot\end{cases}\quad 解得-\dfrac{29}{5}<a<-5.$$

∴满足条件的a的取值范围是$-\dfrac{29}{5}<a<-5$.

【教师备课提示】本题中，通过四个不等式即可将抛物线的“位置”确定，从而解不等式组求出a的范围．一般地，在讨论一元二次方程根的情形时，要充分利用数形结合的思想，即先根据条件“定”出图象位置，由所给条件画出满足条件的图象，再由图象列出不等式（组），最后解不等式（组）求解．

【例 5】

已知方程$7x^2-(p+13)x+p^2-p-2=0$的两根α、β满足$0<\alpha<1<\beta<2$，求实数p的取值范围.

【解析】

设$y=7x^2-\left(p+13\right)x+p^2-p-2$，

由题，方程$7x^2-\left(p+13\right)x+p^2-p-2=0$的两根$\alpha$、$\beta$满足$0<\alpha<1<\beta<2$，

$\begin{cases}p^2-p-2>0\\p^2-2p-8<0\\p^2-3p>0\end{cases}$ 解得，$\begin{cases}p<-1或p>2,\\-2<p<4,\\p<0或p>3,\end{cases}$

解得$-2<p<-1或3<p<4$.

∴满足条件的p的取值范围是$-2<p<-1或3<p<4$.

【教师备课提示】这道题主要考查二次方程的双区间分布，方法一样，主要是让学生们练习下，但是这个题的难点在于让学生们根据图象求解一元二次不等式.

【例 6】若方程$ax^2-2x+1=0$在区间$1<x<3$内有较大实根，另一根小于1，求实数a的取值范围．

【解析】

由题意得，$a\neq0$，原方程可化为$x^2-\dfrac{2}{a}x+\dfrac{1}{a}=0$，令$y=x^2-\dfrac{2}{a}x+\dfrac{1}{a}$，

因为方程$f\left(x\right)=0$较大实根在$\left(1,3\right)$内，且另一根小于1，

所以有$\begin{cases}f\left(1\right)=1-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a}<0\\f\left(3\right)=9-\dfrac{6}{a}+\dfrac{1}{a}>0\end{cases}$ 即$\begin{cases}1-\dfrac{1}{a}<0\\9-\dfrac{5}{a}>0\end{cases}$

解得$\begin{cases}0<a<1\\a>\dfrac{5}{9}或a<0\end{cases}$，所以$\dfrac{5}{9}<a<1$，

故当$\frac{5}{9}<a<1$时，方程在$(1,3)$内仅有较大实数根，且另一根小于1.

【教师备课提示】这道题主要考查二次方程的双区间分布，但是这道题对于学生们比较难的是开口方向不确定，可以转化.当然这道题分类讨论，也是可以的.
建议老师们讲解的时候，两种方法都讲解下.

【例7】若关于x的方程$4x^2-2mx+n=0$的解都位于$0<x<1$的范围中，求正整数m，n的值.

【解析】

设 $y=4x^2-2mx+n$，

因为方程$f(x)=0$的两个解都位于$0<x<1$中，所以m，n满足条件

$$\begin{cases}4m^2-16n\geqslant 0 & ① \\ 0<\frac{m}{4}<1 & ② \\ n>0 & ③ \\ 4-2m+n>0 & ④\end{cases}$$

由②得$0<m<4$，符合条件的m值为$1,2,3$. 由③得$n>0$.
把m各值代入④，得$n\geqslant -2$，$n>0$，$n>2$.

把m各值代入①，得$n\leq\frac{1}{4}$，$n\leqslant 1$，$n\leqslant\frac{9}{4}$.

符合条件的m，n的值是$m=2$，$n=1$.
【教师备课提示】这道题主要考查单区间的区间分布.

【例8】
已知关于x的方程$mx^2-(2m+1)x+5m+1=0$有实数解．若此方程

（1）在区间$\frac{3}{2}\leq x\leq 5$内有两个实根，求实数m的取值范围；

（2）在区间$\frac{3}{2}\leq x\leq 5$内有且仅有一个实根，求实数m的取值范围；

（3）在区间$\frac{3}{2}\leq x\leq 5$内有实根，求实数m的取值范围.

【解析】
当$m=0$时，原方程等价于$-x+1=0$，有一个实数解为1，不合题意;

当$m\neq 0$时，$\triangle=(2m+1)^2-4m(5m+1)=-16m^2+1\geqslant 0$，$\therefore m\leqslant\frac{1}{4}$.

当$m\neq 0$时，$mx^2-(2m+1)x+5m+1=0\Leftrightarrow x^2-\left(2+\frac{1}{m}\right)x+5+\frac{1}{m}=0$，

于是设 $y=x^2-\left(2+\frac{1}{m}\right)x+5+\frac{1}{m}$，则对称轴 $x=1+\frac{1}{2m}$；

当 $x=3$时，$y=\frac{17}{4}-\frac{1}{2m}$；当 $x=5$ 时，$y=20-\frac{4}{m}$；

（1）由题意得，

$$\begin{cases}\frac{17}{4}-\frac{1}{2m}\geqslant 0\\ \frac{3}{2}\le 1+\frac{1}{2m}\le 5\\ 20-\frac{4}{m}\ge 0\end{cases}$$，解得 $\frac{1}{5}\le m\le 1$，$\therefore \frac{1}{5}\le m\le\frac{1}{4}$

（2）同理可得，$\frac{2}{17}\le m<\frac{1}{5}$；

（3）综合（1）（2），可得，$\frac{2}{17}\le m\le\frac{1}{4}$

【教师备课提示】这道题实际上是单区间问题的一个拓展，有一定难度.

【例 9】

已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同实根，求证：方程 $ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$ 至少有一个根，在前一个方程的两根之间.（此处 $k\ne 0$）

【解析】

设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1，x_2 $\left(x_1\ne x_2\right)$，则有

$a{x_1}^2+bx_1+c=0$，$a{x_2}^2+bx_2+c=0$，且 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，$b^2-4ac>0$.

令 $f(x)=ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)$，

则 $f(x_1)=a{x_1}^2+bx_1+c+k\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)=k\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)$，

$f(x_2)=a{x_2}^2+bx_2+c+k\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)=k\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)$，

$f(x_1)f(x_2)=k^2\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)$

$=k^2\left[x_1x_2+\frac{b}{2a}(x_1+x_2)+\frac{b^2}{4a^2}\right]$

$$=k^2\left[\frac{c}{a}+\frac{b}{2a}\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$=\frac{k^2\left(4ac-b^2\right)}{4a^2}<0\cdot$$

所以抛物线 $y=f(x)$ 上的两点 $\left(x_1,\ f(x_1)\right)$，$\left(x_2,\ f(x_2)\right)$ 在 x 轴的两侧，则方程 $ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$ 至少有一根在前一方程两根之间.

笔记整理

课后作业

【演练1】
已知方程 $x^2+2px+1=0$ 的两个实根一个小于1，一个大于1，求 p 的取值范围.

【解析】

设 $y=x^2+2px+1$，

因为方程 $f\left(x\right)=0$ 的两个实数根一个小于 1，一个大于 1，

所以有 $\begin{cases}4p^2-4>0\\1+2p+1<0\end{cases}$

即 $\begin{cases}p^2>1\\2p+2<0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}p>1\text{或}p<-1\\p<-1\end{cases}$

所以 $p<-1$.

【演练2】
已知方程 $x^2-(k-1)x+k=0$ 有两个大于 2 的实根，求 k 的取值范围.

【解析】

因为 $x^2-\left(k-1\right)x+k=0$ 有两个大于 2 的实数根，设 $y=x^2-\left(k-1\right)x+k$，

则该二次函数与 x 轴的两个交点都位于 $x=2$ 的右边，开口向上，

所以有 $\begin{cases}\left(k-1\right)^2-4k\geqslant 0\\\dfrac{k-1}{2}>2\\4-2\left(k-1\right)+k>0\end{cases}$

解得 $3+2\sqrt{2}\leqslant k<6$.

【演练3】

已知方程 $x^2+(a^2-1)x+a-2=0$ 有一根比 1 大，另一根比 -1 小，求实数 a 的取值范围.

【解析】

设 $y=x^2+\left(a^2-1\right)x+a-2$，

因为方程有一根比 1 大，另一根比 -1 小，所以有

$\begin{cases}a^2+a-2<0\\a-a^2<0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2+a-2<0\\a^2-a>0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}-2<a<1\\a<0或a>1\end{cases}$，所以 $-2<a<0$，

故当 $-2<a<0$ 时，原方程有一根比 1 大，另一根比 -1 小.

【演练4】

已知 m、n 均为正整数，若关于 x 的方程 $4x^2-2mx+n=0$ 的两个实数根都大于 1 且小于 2，求 m、n 的值．

【解析】

令 $y=4x^2-2mx+n$，

要使方程的两实数根都大于 1 且小于 2，由函数的图象可知，要满足：

$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\1<\dfrac{m}{4}<2\\4-2m+n>0\\16-4m+n>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}m^2\geqslant 4n\\4<m<8\\4+n>2m\\16+n>4m\end{cases}$．

已知 m、n 都为正整数，则由 $4<m<8$ 知 $m=5$、6、7．

当 $m=5$ 时，由 $m^2\geqslant 4n$ 得 $n\leqslant\dfrac{25}{4}$，故 $n\leqslant 6$，又由③得 $n>6$，矛盾；

当 $m=6$ 时，由 $m^2\geqslant 4n$ 得 $n\leqslant 9$，又由 m，n 的制约式得 $n>8$，故 $n=9$；

当 $m=7$ 时，由 $m^2\geqslant 4n$ 得 $n\leqslant\dfrac{49}{4}$，即 $n\leqslant 12$，又由 m，n 的制约式得 $n>12$，矛盾.

综合可得 $m=6, n=9$．

【演练5】

方程 $x^2-4x+3a^2-2=0$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上有实根，求实数 a 的取值范围．

【解析】

令 $f\left(x\right)=x^2-4x+3a^2-2$.

（1）原方程在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 有一个实根,

当 $x=1$ 时， $y=3a^2-5$ ，当 $x=-1$ 时， $y=3a^2+3$,

根据 $f\left(x\right)$ 的图象可知

$\begin{cases}3a^2-5>0\\3a^2+3\leqslant 0\end{cases}$ ，或 $\begin{cases}3a^2-5\leq 0\\3a^2+3>0\end{cases}$

解 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

（2）在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上有两个实根，因为函数的对称轴为 $x=2$ ，在 -1 与 1 的外面，所以根据函数图象，在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 之间不可能有两个实根.

综合⑴、⑵，当 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 时，方程在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 之间有实根.

第 6 讲 二次函数和代数综合

知识集锦

模块一：二次函数和方程（组）综合

解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$	↔	二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 当 $y=0$ 时，求 x 的值	↔	函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标
解方程组 $\begin{cases} y=a_1x+b_1 \\ \ldots \end{cases}$	↔	求二次函数 $y=a_2x^2+b_2x+c$ 与 $y=a_1x+b_1$ 图像的交点坐标	↔	函数 $y=a_2x^2+b_2x+c$ 与 $y=a_1x+b_1$ 相交

总结：二次函数 $y=a_2x^2+b_2x+c$ 和一次函数 $y=a_1x+b_1$ 的交点坐标即为方程组 $\begin{cases} y=a_1x+b_1 \\ y=a_2x^2+b_2x+c \end{cases}$ 的解，不过形式不一样.

模块二：二次函数和不等式（组）综合

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$	↔	二次函数 $y=ax^2+bx+c$	↔	当 $y>0$ 时，抛物线上的点在 x 轴上方，x 取值
一元二次不等式 $a_2x^2+b_2x+c<$	↔	二次函数 $y_2=a_2x^2+b_2x+c$ 与 $y_1=a_1x+b_1$，求当 $y_2<y_1$	↔	抛物线 $y=a_2x^2+b_2x+c$ 在 $y=a_1x+b_1$ 下方的部分

总结：函数值比大小，图像比高低，谁高谁大.

模块一　二次函数和方程（组）综合

【例 1】

（1）已知二次函数 $y=-x^2+2x+m$ 的部分图像如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x+m=0$ 的解为________________.

（2）抛物线 $y=x^2+5x+a^2$ 与一次函数 $y=ax+2a-1$ 有交点，则 a 的取值范围_______.

【解析】

（1）$x_1=-1$，$x_2=3$．　（2）$-3\leqslant a\leqslant\frac{7}{3}$，且 $a\neq 0$

【教师备课提示】 这道题主要讲解二次函数和方程（组）的关系，一元二次方程的解即对应二次函数和 x 轴交点的横坐标，方程组的解即对应两个函数的交点坐标，形式不一样，函数有交点意味着方程组有解.

【例 2】

给出定义：设一条直线与一条抛物线只有一个公共点，且这条直线与这条抛物线的对称轴不平行，就称直线与抛物线相切，这条直线是这条抛物线的切线，有下列命题：

①直线 $y=0$ 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的切线；

②直线 $x=-2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 相切于点 $(-2,1)$；

③直线 $y=x+b$ 与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 相切，则相切于点 $(2,1)$；

④直线 $y=kx-2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 相切，则 $k=\pm\sqrt{2}$.

其中正确的命题是________.

【解析】

①③④

【教师备课提示】 这道题主要讲解直线和抛物线相切的情况，相切即对应二次函数和直线只有 1 个交点，且直线和 x 轴不平行，这条直线成为二次函数的切线.

【例 3】若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连接两点 $M(0,1)$、 $N(2,3)$ 的线段（包括 M、N 两点）有两个相异的交点．求 a 的取值范围．

【解析】

设过两点 M、N 的直线为 $y=kx+b$，则

$\begin{cases}1=0\times k+b\\3=2\times k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$，所以 $y=x+1$.

要使抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与线段 MN 有两个相异的交点，等价于方程 $x^2+ax+2=x+1$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上有两个不同的根．令 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$，

由函数图象可知，二次函数的图象与 x 轴的两个不同交点位于 0 与 2 之间，并且在 $x=0$ 和 $x=2$ 处函数值均大于或等于 0，对称轴也在 $x=0$ 与 $x=2$ 之间，

$$\begin{cases}\Delta=(a-1)^2-4>0\\f(0)=1\geqslant 0\\f(2)=4+2(a-1)+1\geqslant 0\\0<-\dfrac{a-1}{2}<2\end{cases}\quad 解得 -\frac{3}{2}\leqslant a<-1.$$

因此当 $-\dfrac{3}{2}\leqslant a<-1$ 时，有两个相异的交点.

【教师备课提示】这道题主要讲解二次函数和直线相交的情况，相交指的是有交点，即方程组有解，对应得到的一元二次方程有解,则 $\Delta\geq 0$.

【例 4】

已知二次函数 $y=x^2-x+c$.

（1）若点 $A(-1,n)$、$B(2,2n-1)$ 在二次函数 $y=x^2-x+c$ 的图象上，求此二次函数的最小值；

（2）若 $D(2,y_1)$、$E(x_2,2)$ 两点关于坐标原点成中心对称，试判断直线 DE 与抛物线 $y=x^2-x+c+\dfrac{3}{8}$ 的交点个数，并说明理由.

【解析】

（1）由题意得 $\begin{cases}n=2+c\\2n-1=2+c\end{cases}$，解得 $\begin{cases}n=1\\c=-1\end{cases}$，

$\therefore y=x^2-x-1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ $\therefore$ 二次函数 $y=x^2-x-1$ 的最小值是 $-\dfrac{5}{4}$.

（2）∵点 D、E 关于原点成中心对称，∴ $D(2,-2)$、$E(-2,2)$

设直线 DE 为 $y=kx+b$，则有 $\begin{cases}-2=2k+b\\2=-2k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-1\\b=0\end{cases}$ ∴直线 DE 为 $y=-x$.

则 $\begin{cases}y=-x\\y=x^2-x+c+\dfrac{3}{8}\end{cases}$，得 $x^2+c+\dfrac{3}{8}=0$. 即 $x^2=-c-\dfrac{3}{8}$.

①当 $-c-\dfrac{3}{8}=0$ 时，∴ $c=-\dfrac{3}{8}$ 时，方程 $x^2=-c-\dfrac{3}{8}$ 有相同的实数根，

即当 $c=-\dfrac{3}{8}$ 时，直线 $y=-x$ 与抛物线 $y=x^2-x+c+\dfrac{3}{8}$ 有唯一交点.

②当 $-c-\dfrac{3}{8}>0$ 时，∴ $c<-\dfrac{3}{8}$ 时，方程 $x^2=-c-\dfrac{3}{8}$ 有两个不同实数根，

即当 $c<-\dfrac{3}{8}$ 时，直线 $y=-x$ 与抛物线 $y=x^2-x+c+\dfrac{3}{8}$ 有两个不同的交点.

③当 $-c-\dfrac{3}{8}<0$ 时，∴ $c>-\dfrac{3}{8}$ 时，方程 $x^2=-c-\dfrac{3}{8}$ 没有实数根，

即当 $c>-\dfrac{3}{8}$ 时，直线 $y=-x$ 与抛物线 $y=x^2-x+c+\dfrac{3}{8}$ 没有交点.

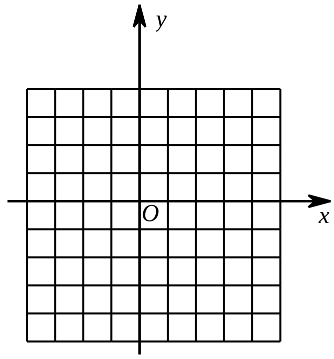
【教师备课提示】这道题主要考查判断图像交点的情况.

【例 5】

已知二次函数 $y_1 = x^2 - 2x - 3$ 及一次函数 $y_2 = x + m$.

（1）求该二次函数图象的顶点坐标以及它与 x 轴的交点坐标；

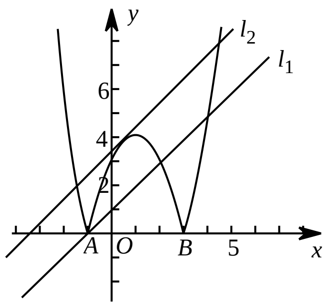
（2）将该二次函数图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方，图象的其余部分不变，得到一个新图象，请你在图中画出这个新图象，并求出新图象与直线 $y_2 = x + m$ 有三个不同公共点时 m 的值：



【解析】

（1）二次函数图象的顶点坐标为 $(1,-4)$ ，与 x 轴的交点坐标为 A(-1,0)，B(3,0)

（2）①当直线位于 l_1 时，此时 l_1 过点 $A(-1，0)$，$\therefore$ $0=-1+m$ ，即 $m=1$.



②当直线位于 l_2 时，此时 l_2 与函数

$y=-x^2+2x+3(-1\leqslant x\leqslant 3)$ 的图象有一个公共点.

$\therefore$ 方程 $x+m=-x^2+2x+3$ 有一根，

$\therefore$ $\Delta=1-4(m-3)=0$ ，即 $m=\frac{13}{4}$

当 $m=\frac{13}{4}$ 时，$x=\frac{1}{2}$ 满足 $-1\leqslant x\leqslant 3$ ，

由①②知，$m=1$ 或 $m=\frac{13}{4}$.

【教师备课提示】这道题是二次函数翻折后，和直线交点的情况.

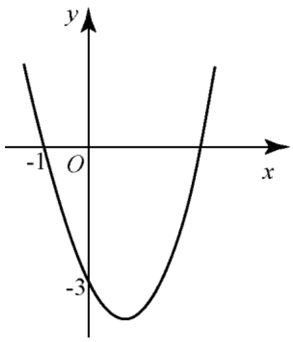
模块二　二次函数与不等式（组）综合

【例 6】

已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象如图所示，它与 x 轴的一个交点的坐标为 $(-1,0)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,-3)$.

（1）求二次函数的解析式；并求图象与 x 轴的另一个交点的坐标；

（2）根据图象回答：当 x 取何值时，$-3<y<0$.



【解析】

（1）$y=x^2-2x-3$，$(3,0)$；

（2）$-1<x<0$ 或 $2<x<3$.

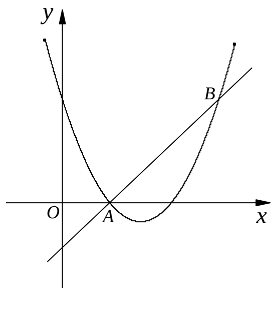
【教师备课提示】这道题主要考查根据图像回答二次函数值在哪个区间时，自变量 x 的取值范围.

【例 7】

如图，直线 $y=x+m$ 和抛物线 $y=x^2+bx+c$ 都经过点 $A(1,0)$，$B(3,2)$.

（1）求 m 的值和抛物线的解析式；

（2）求不等式 $x^2+bx+c>x+m$ 的解集.（直接写出答案）



【解析】

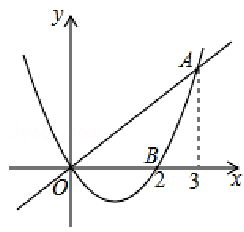
（1）$m=-1$，$y=x^2-3x+2$；

（2）$x<1$ 或 $x>3$.

【教师备课提示】这道题主要考查根据图像回答二次函数值大于一次函数值时，自变量 x 的取值范围.

【例 8】

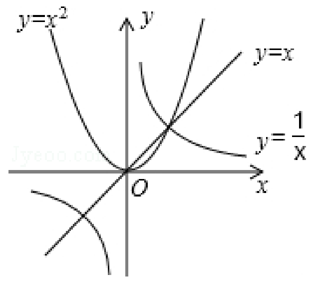
（1）如图，已知二次函数 $y_1=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2=\frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3,2)$，与 x 轴交于点 $B(2,0)$，若 $0<y_1<y_2$，则 x 的取值范围是（　）



A．0＜x＜2　　B．0＜x＜3

C．2＜x＜3　　D．x＜0 或 x＞3

（2）给出下列命题及函数 $y=x$， $y=x^2$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 的图象：则（　）



①如果 $\frac{1}{a}>a>a^2$，那么 $0<a<1$；

②如果 $a^2>a>\frac{1}{a}$，那么 $a>1$；

③如果 $\frac{1}{a}>a^2>a$，那么 $-1<a<0$；

④如果 $a^2>\frac{1}{a}>a$ 时，那么 $a<-1$．

A．正确的命题是①④　　B．错误的命题是②③④

C．正确的命题是①②　　D．错误的命题只有③

【解析】

（1）∵二次函数 $y_1=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2=\frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3,2)$，与 x 轴交于点 $B(2,0)$，

∴由图象得：若 $0<y_1<y_2$，则 x 的取值范围是：$2<x<3$．故选 C.

（2）易求 $x=1$ 时，三个函数的函数值都是 1，所以，交点坐标为(1, 1),

根据对称性，$y=x$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 在第三象限的交点坐标为 $(-1,-1)$，

①如果 $\frac{1}{a}>a>a^2$，那么 0＜a＜1，故①正确；

②如果 $a^2>a>\frac{1}{a}$，那么 a＞1 或 $-1<a<0$，故②错误；

③如果 $\frac{1}{a}>a^2>a$，那么 a 值不存在，故③错误；

④如果 $a^2>\frac{1}{a}>a$ 时，那么 $a<-1$，故④正确.

综上所述，正确的命题是①④，错误的命题是②③．故选：A．

【教师备课提示】这道题主要考查二次函数和不等式综合问题，根据图像求解.总结：函数值比大小，图像比高低，谁高谁大.

笔记整理

课后作业

【演练1】

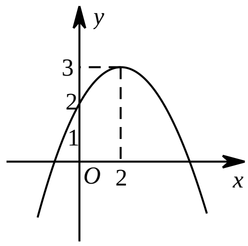
（1）二次函数 $y=-x^2+2x+k$ 的部分图象如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的一个解 $x_1=3$，另一个解 $x_2=$（　）

A．1　　B．-1　　C．-2　　D．0

（2）二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，那么关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+3=0$ 的根的情况是（　）

A．有两个相等的实数根　　B．无实数根

C．有两个同号不相等实数根　　D．有两个异号实数根



【解析】

（1）B；（2）D

【演练2】

若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连接两点 $M(0,1)$、$N(2,3)$ 的线段（包括 M、N 两点）只有一个交点．求 a 的取值范围．

【解析】

设过两点 M、N 的直线为 $y=kx+b$，则

$\begin{cases}1=0\times k+b\\3=2\times k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$，所以 $y=x+1$．

要使抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与线段 MN 有两个相异的交点，等价于方程 $x^2+ax+2=x+1$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上有两个不同的根．令 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$，则

$\because$ $f(0)=1>0$，因此

①若 $f(2)=2a+3<0$，则符合条件，此时 $a<-\dfrac{3}{2}$；

②若 $f(2)=2a+3=0$，则 $a=-\dfrac{3}{2}$，$f(x)=x^2-\dfrac{5}{2}x+1$，$f(x)=0$ 在 $[0,2]$ 内有两个相异实根，不符合要

求；

③若 $f(2)=2a+3>0$，则 $a>-\frac{3}{2}$，此时 $f(x)=0$ 在 $[0,2]$ 内有两个重根，

于是 $\Delta=(a-1)^2-4=0$，解得 $a=3$（对称轴不在 $[0,2]$ 内舍去）或 $a=-1$.

综上 a 的取值范围是 $a=-1$ 或 $a<-\frac{3}{2}$.

【演练3】

已知函数 $y=mx^2-3x+2$（m 是常数），若一次函数 $y=x+1$ 的图象与该函数的图象恰好只有一个交点，求 m 的值及这个交点的坐标.

【解析】

①当 $m=0$ 时，函数 $y=mx^2-3x+2$ 为一次函数 $y=-3x+2$，

令：$-3x+2=x+1$，解得 $x=\frac{1}{4}$，∴交点为 $\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$；

②当 $m\neq 0$ 时，函数 $y=mx^2-3x+2$ 为二次函数.

若一次函数 $y=x+1$ 的图象与函数 $y=mx^2-3x+2$ 的图象只有一个交点，

令 $mx^2-3x+2=x+1$，即 $mx^2-4x+1=0$，

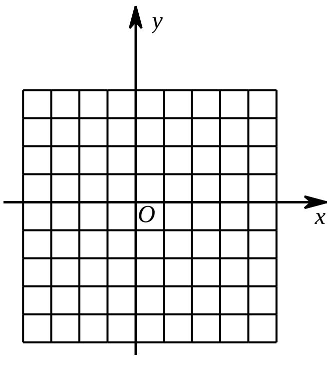
由 $\Delta=0$，得 $m=4$，此时交点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

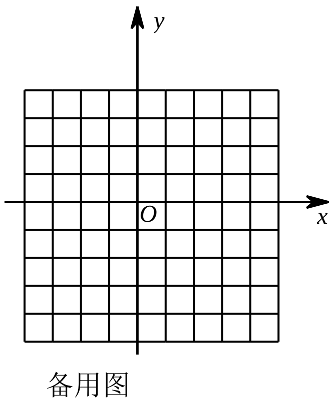
【演练4】

画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，根据图象回答下列问题.

（1）图象与 x 轴、y 轴的交点坐标分别是什么？

（2）x 取什么值时，函数值 y 大于 0？x 取什么值时，函数值 y 小于 0？





备用图

【解析】

（1）与 x 轴交点 $(-1，0)$，$(3，0)$，与 y 轴交点 $(0，-3)$

（2）当 $x<-1$ 或 $x>3$ 时，$y>0$；当 $-1<x<3$ 时，$y<0$.（图略）

【演练5】

$y_1=x^2+(m+1)x+m-4$ 与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左侧），且对称轴为 $x=-1$.

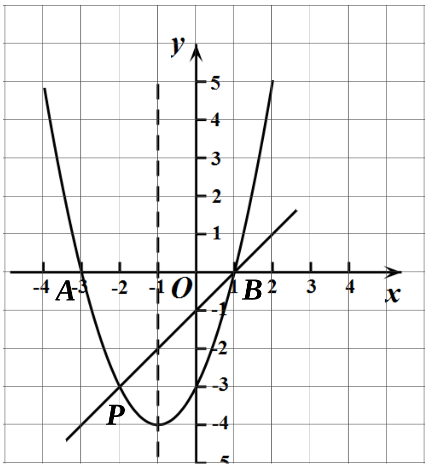
（1）求 m 的值；

（2）若直线 $y_2=kx+b$ 过点 B 且与抛物线交于点 $P(-2m,-3m)$，根据图象回答：当 x 取何值时，$y_1\geqslant y_2$.

【解析】

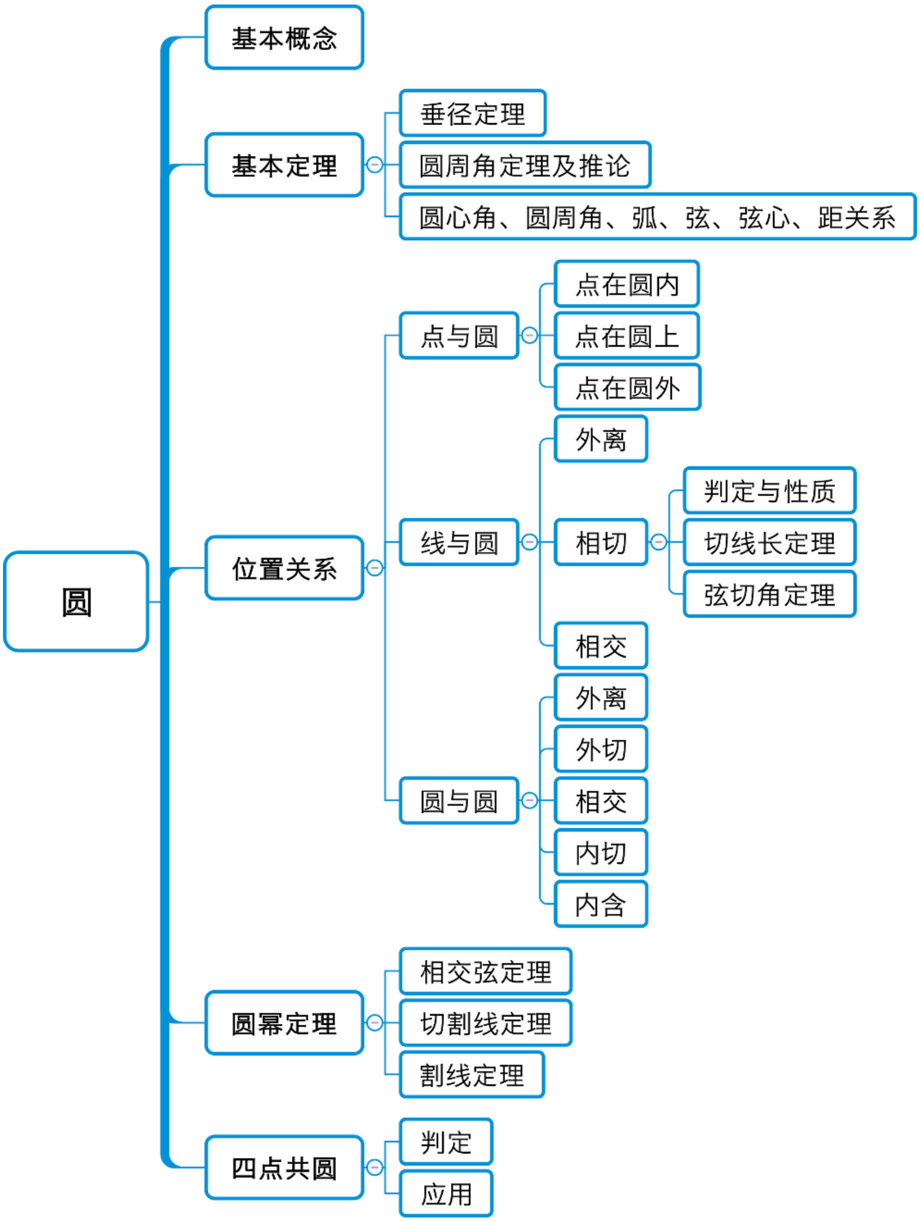
（1）由题意，有 $-\dfrac{m+1}{2}=-1$，解得 $m=1$.

（2）如图：$x\leqslant-2$ 或 $x\geqslant1$.



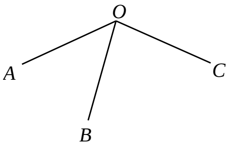
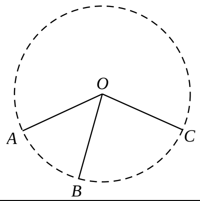
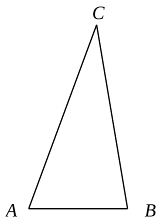
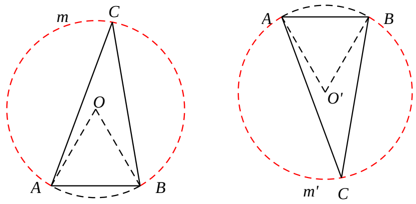
第 7 讲 四点共圆（1）

知识集锦



模块一 辅助圆思想

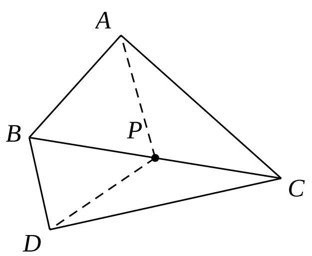
平面几何中有很多题目的背景中并没有出现圆，但是如果能够适当添加辅助圆，能让题目解起来变得十分简单，因此，辅助圆思想是学习四点共圆的基础.

几何条件：$OA=OB=OC$ 	辅助线： 以 O 为圆心、OA 为半径作圆 $\odot O$ $\because OA=OB=OC$ $\therefore$ 点 B、C 在 $\odot O$ 上 
A、B 是两个定点，C 为动点，试确定点 C 的位置，使得 $\angle ACB=\alpha$（α 为锐角）. 	作 $\triangle OAB$，使得 $OA=OB$、$\angle AOB=2\alpha$，以 O 为圆心、OA 为半径作 $\odot O$，作 $\odot O$ 关于直线 AB 的对称圆 $\odot O'$，则优弧 AmB、$Am'B$ 上的点 C（不包括端点 A、B）均能使得 $\angle ACB=\alpha$ 

模块二 四点共圆的基本判定方法

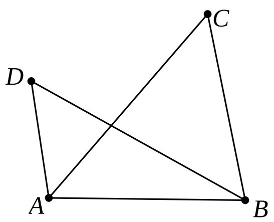
1. 到一点距离相等的四个点共圆（圆的定义）。

例：如图，直角三角形 ABC 与直角三角 BCD 共斜边，则 A、B、C、D 四点共圆；



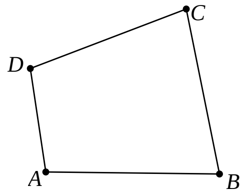
2. 同底且同侧顶角相等的两个三角形的顶点共圆（张角相等，四点共圆）。

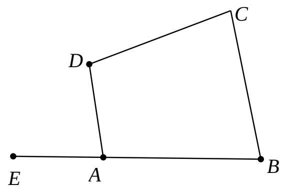
例：如图，若 $\angle C=\angle D$，则 A、B、C、D 四点共圆。



3. 对角互补的四边形（或有一个外角等于其内对角的四边形）的顶点共圆。

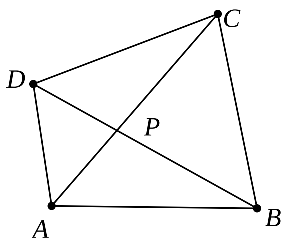
例：如左下图，若 $\angle A+\angle C=180^\circ$，则 A、B、C、D 四点共圆；如右下图，若 $\angle DAE=\angle C$，则 A、B、C、D 四点共圆。

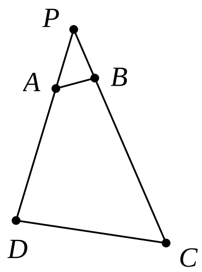




4．利用相交弦定理与割线定理的逆定理可判定四点共圆。

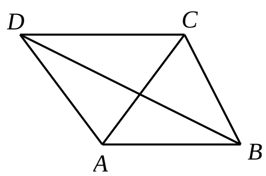
例：如左下图，四边形 $ABCD$ 对角线交于点 P，若 $PA\cdot PC=PB\cdot PD$，则 A、B、C、D 四点共圆；如右下图，若 $PA\cdot PC=PB\cdot PD$，则 A、B、C、D 四点共圆。

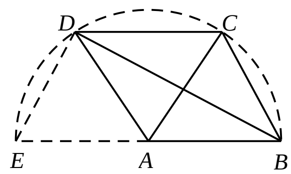




模块一　辅助圆思想

【例1】 已知四边形 $ABCD$ ，$AB\parallel CD$ ，且 $AB=AC=AD=a$ ，$BC=b$ ，且 $2a>b$ ．求 BD 的值．





【解析】以 A 为圆心，以 a 为半径作圆．延长 BA 交 $\odot A$ 于 E 点，连接 ED

$\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle CAB=\angle DCA$，$\angle DAE=\angle CDA.$

$\because AC=AD$，$\therefore \angle DCA=\angle CDA$，

$\therefore \angle DAE=\angle CAB$，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DAE$ 中，

$$\begin{cases}AD=AC,\\ \angle DAE=\angle CAB,\\ AE=AB.\end{cases}$$

$\therefore \triangle CAB \cong \triangle DAE$，

$\therefore ED = BC = b$

$\because BE$ 是直径，

$\therefore \angle EDB = 90^{\circ}$

在 $\text{Rt}\triangle EDB$ 中，

$ED = b$， $BE = 2a$，

由勾股定理得

$ED^2 + BD^2 = BE^2$.

$\therefore BD = \sqrt{BE^2 - ED^2} = \sqrt{(2a)^2 - b^2} = \sqrt{4a^2 - b^2}$.

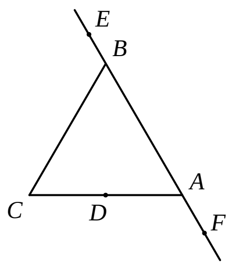
【例2】 如图，E，B，A，F 四点共线，点 D 是正三角形 ABC 的边 AC 的中点，点 P 是直线 AB 上异于 A，B 的一个动点，且满足 $\angle CPD = 30°$，则（　）

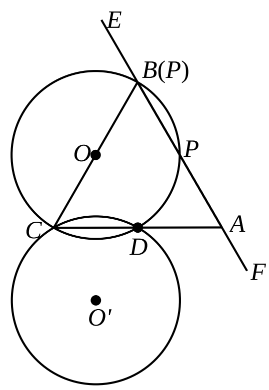
A．点 P 一定在射线 BE 上

B．点 P 一定在线段 AB 上

C．点 P 可以在射线 AF 上，也可以在线段 AB 上

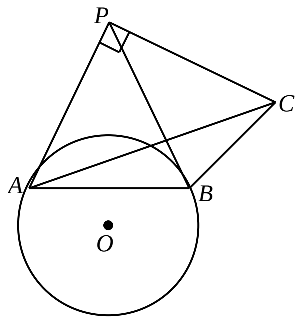
D．点 P 可以在射线 BE 上，也可以在线段 AB 上





【解析】 取 BC 中点 O 及点 O 关于 AC 的对称点 O'，分别以 O、O' 为圆心，OC、$O'C$ 长度为半径作圆，两圆与直线 EF 有两个交点（如图），一个是点 B，另外一个是线段 AB 的中点，所以满足条件的 P 点一定在线段 AB 上，应选 B．

【备选】如图，PA、PB 分别切 $\odot O$ 于 A、B 两点，PC 满足 $AB\cdot PB-AC\cdot PC=AB\cdot PC-AC\cdot PB$，且 $AP\perp PC$，$\angle PAB=2\angle BPC$，求 $\angle ACB$ 的度数.



【解析】∵ PA、PB 都是 $\odot O$ 的切线，∴ $PA=PB$

∵ $AB\cdot PB-AC\cdot PC=AB\cdot PC-AC\cdot PB$，

∴ $(AB+AC)(PB-PC)=0$

∴ $PB=PC$，∴ A、B、C 三点都在以 P 为圆心，PA 为半径的圆上.

设 $\angle ACB=\alpha$，则 $\angle APB=2\alpha$，

∴ $\angle BPC=90°-2\alpha$

∵ $\angle PAB=2\angle BPC$，∴ $\angle PAB=\angle PBA=2(90°-2\alpha)=180°-4\alpha$

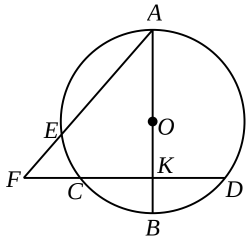
在 $\triangle PAB$ 中，$\angle APB+\angle PAB+\angle PBA=180°$，

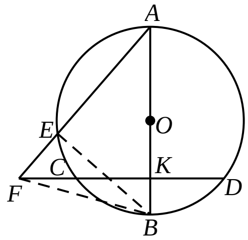
即 $2(180°-4\alpha)+2\alpha=180°$

∴ $6\alpha=180°$，∴ $\alpha=30°$，即 $\angle ACB=30°$.

模块二　四点共圆的基本判定方法

【例3】 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，CD 是弦，且 $CD\perp AB$ 于 K． E 为劣弧 AC 上的一点，连接 AE 交 DC 延长线于 F．求证：E、F、B、K 四点共圆．





【解析】连接 BE、BF，

∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，

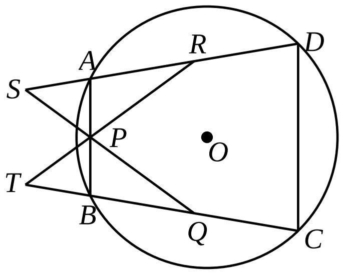
∴ $\angle AEB=\angle BEF=90^\circ$，

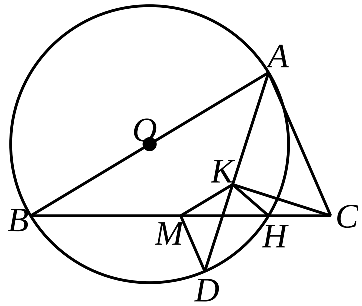
∵ $CD\perp AB$，∴ $\angle FKB=90^\circ$，

∴ E、F、B、K 四点共圆．

【例4】 1．如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，P、Q、R 分别是 AB、BC、AD 的中点．连接 PQ 与 DA 的延长线交于 S，连接 PR 与 CB 延长线交于 T．求证：S、T、Q、R 四点共圆．

2．如图，$\triangle ABC$ 中，以 AB 为直径作圆，交 BC 于 H，交 $\angle BAC$ 的平分线于 D，作 $CK\perp AD$ 于 K，M 为 BC 中点．求证：D、M、K、H 四点共圆．

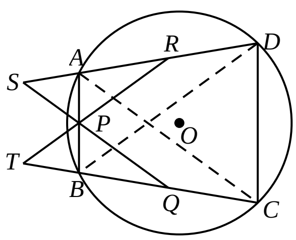




【解析】1．连接 AC、BD

∵ P、Q、R 都是中点，∴ $PQ\parallel AC$，$PR\parallel BD$，

∴ $\angle PQB=\angle ACB$，$\angle PRA=\angle ADB$，



∵ $\angle ADB = \angle ACB$， ∴ $\angle PRA = \angle PQB$，

∴ S、T、Q、R 四点共圆．

2．延长 CK 交 AB 于 P，连接 DH

∵ AD 平分 $\angle BAC$， $CK \perp AD$，

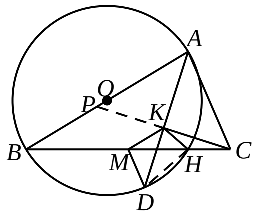
∴ $\triangle ACK \cong \triangle APK$， ∴ $PK = CK$，

∵ M 是 BC 的中点， ∴ $MK \parallel AB$，

∴ $\angle CMK = \angle B$，

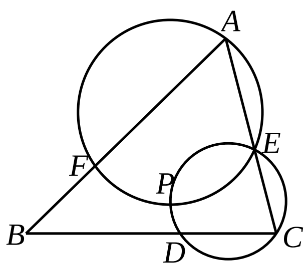
∵ $\angle ADH = \angle ABC$， ∴ $\angle CMK = \angle ADH$，

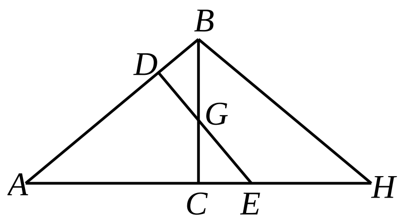
∴ D、M、K、H 四点共圆．



【例5】 1．如图， $BC \perp AE$， $ED \perp AB$，且 BC、DE 相交于 G． H 为 AE 延长线上的一点，$CH = AC$．求证： B、G、E、H 四点共圆．

2．如图， P 为 $\triangle ABC$ 内一点， D、E、F 分别在 BC、CA、AB 边上，已知 P、D、C、E 四点共圆， P、E、A、F 四点共圆，求证： B、D、P、F 也四点共圆．





【解析】1． ∵ $BC \perp AE$， $ED \perp AB$， ∴ $\angle BDE = \angle BCE = 90°$，

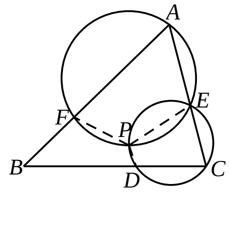
∴ $\angle DBC = \angle CED$，

∵ $AC = CH$， $AB = BH$， ∴ $\angle ABC = \angle HBC$，

∴ $\angle CED = \angle HBC$， ∴ B、G、E、H 四点共圆．

2．连接 PE、PF、PD，

∵ A、E、P、F 四点共圆， ∴ $\angle AFP = \angle CEP$，



$\because$ C、D、P、E 四点共圆，$\therefore$ $\angle BDP=\angle CEP$，

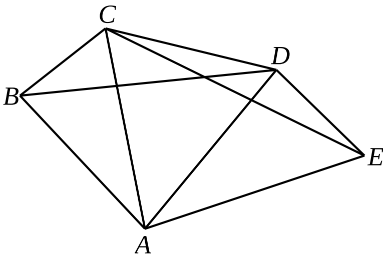
$\therefore$ $\angle AFP=\angle BDP$，

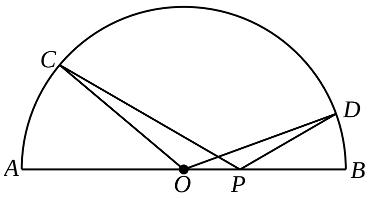
$\therefore$ B、D、P、F 四点共圆．

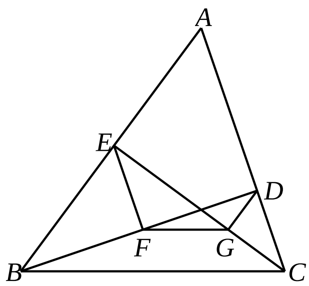
【例6】 1． C、D 是以 AB 为直径的半圆上的两点，$\angle AOC=40°$，P 在直径 AB 上，且 $\angle OCP=\angle ODP=10°$，求 $\angle BOD$．

2．在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle ABC=\angle ADE$，$\angle AEC=\angle ADB$．求证：$\angle BAC=\angle DAE$．

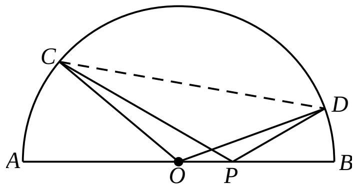
3．如图，锐角 $\triangle ABC$ 中，BD、CE 分别是边 AC、AB 上的高线，$DG\perp CE$ 于 G，$EF\perp BD$ 于 F．求证：$FG\,/\!/\,BC$．







【解析】1．连接 CD



$\because$ $\angle OCP=\angle ODP$，$\therefore$ C、D、P、O 四点共圆，

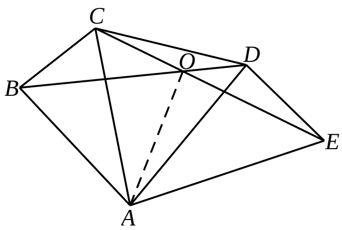
$\therefore$ $\angle CDP=\angle AOC=40°$，$\therefore$ $\angle CDO=30°$，

$\because$ $OC=OD$，$\therefore$ $\angle OCD=30°$，

$\because$ $\angle OCP=10°$，$\therefore$ $\angle PCD=20°$，

$\therefore$ $\angle BOD=\angle PCD=20°$．

2．设 BD、CE 相交于 O，连接 AO



$\because \angle AEC = \angle ADB$，$\therefore$ A、O、D、E 四点共圆，

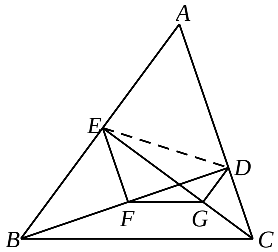
$\therefore \angle AOE = \angle ADE$，$\angle DOE = \angle DAE$，

$\because \angle ABC = \angle ADE$，$\therefore \angle ABC = \angle AOE$，

$\therefore$ A、O、C、B 四点共圆，$\therefore \angle BAC = \angle BOC$，

$\because \angle BOC = \angle DOE$，$\therefore \angle BAC = \angle DAE$．

3．连接 DE



$\because$ BD、CE 是高线，$\therefore \angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$，

$\therefore$ B、C、D、E 四点共圆，$\therefore \angle CBD = \angle CED$，

$\because DG \perp CE$，$EF \perp BD$，

$\therefore \angle EFD = \angle DGE = 90^\circ$，

$\therefore$ D、E、F、G 四点共圆，

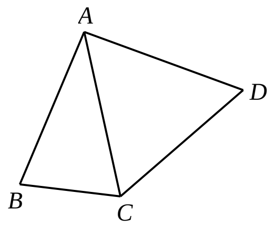
$\therefore \angle DFG = \angle DEG$，$\therefore \angle DFG = \angle DBC$，

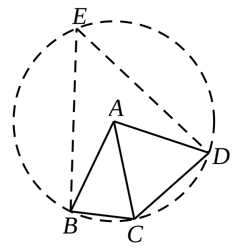
$\therefore FG \parallel BC$．

笔记整理

课后作业

【演练1】如图，在四边形 ABCD 中， $AB=AC=AD$， $\angle BCD=150°$，求 $\angle BAD$ 的度数.



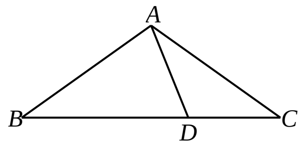


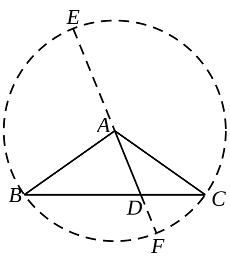
【解析】以 A 为圆心，以 AB 为半径作圆，并在优弧上任取一点 E，连接 EB、ED.

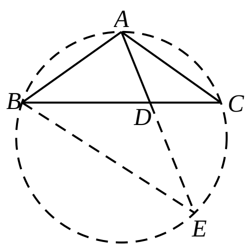
$\because$ $\angle BCD=150°$，$\therefore$ $\angle E=30°$，

$\therefore$ $\angle BAD=2\angle E=60°$.

【演练2】如图， D 是等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上一点，若 $AB=AC=\sqrt{3}$， $AD=1$，求 $BD\cdot CD$ 的值.







【解析】解法一：以 A 为圆心， AB 长为半径作 $\odot A$，则 C 点一定在圆上，

双向延长 AD 交 $\odot A$ 于 E、F，

则由相交线定理得 $BD\cdot CD=ED\cdot FD$，

$\because$ $AB=AC=\sqrt{3}$，即 $\odot A$ 的半径为 $\sqrt{3}$，

$\therefore$ $ED\cdot FD=(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)=2$，

$\therefore$ $BD\cdot CD=2$.

解法二：作 $\triangle ABC$ 的外接圆，延长 AD 交圆于 E

$\therefore$ $\angle ABC=\angle ACB=\angle AEB$，

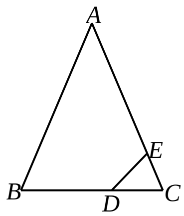
$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle AEB$，$\therefore$ $AB^2 = AD \cdot AE$，

$\therefore$ $AE = \dfrac{AB^2}{AD} = 3$，$\therefore$ $DE = AE - AD = 3 - 1 = 2$，

$\therefore$ $BD \cdot CD = AD \cdot DE = 1 \times 2 = 2$．

【演练3】

如图，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 为 BC 上一点，$CD = DE$，证明：A、B、D、E 四点共圆．



【解析】$\because$ $AB = AC$，$\therefore$ $\angle B = \angle C$，

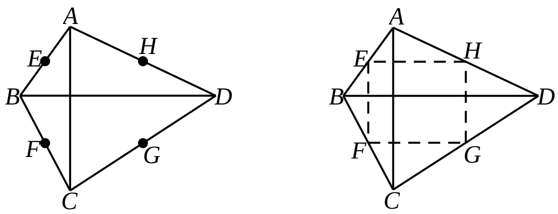
$\because$ $CD = DE$，$\therefore$ $\angle C = \angle CED$，

$\therefore$ $\angle B = \angle CED$，

$\therefore$ A、B、D、E 四点共圆．

【演练4】

如图，在四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，$AC \perp BD$．求证：E、F、G、H 四点共圆．



【解析】连接 EF、FG、GH、HE

$\because$ E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，

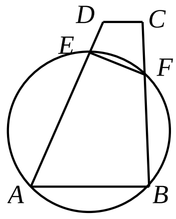
$\therefore$ $EF \parallel AC \parallel HG$，$EH \parallel BD \parallel FG$，

又$\because$ $AC \perp BD$，$\therefore$四边形 $EFGH$ 是矩形，

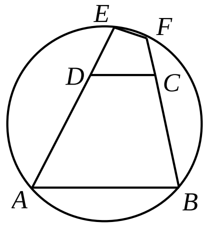
$\therefore$ E、F、G、H 四点共圆．

【演练5】

如图（a），（b），梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，过 A、B 两点作一圆，与 AD、BC（或它们的延长线）分别相交于 E 和 F，求证：$CDEF$ 是圆内接四边形.



(a)



(b)

【解析】如图(a)，∵ A、B、F、E 四点共圆，∴ $\angle DEF = \angle B$，

∵ $AB \parallel CD$，∴ $\angle B + \angle C = 180^\circ$，∴ $\angle DEF + \angle C = 180^\circ$，

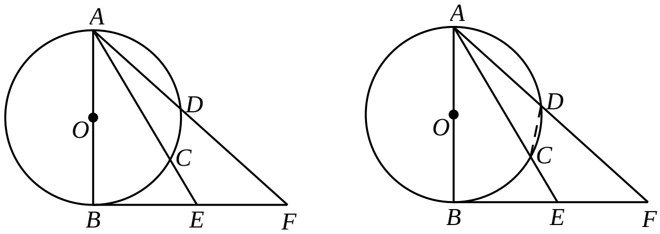
∴ C、D、E、F 四点共圆，即 $CDEF$ 是圆内接四边形.

如图(b)，∵ A、B、F、E 四点共圆，∴ $\angle DEF + \angle B = 180^\circ$，

∵ $AB \parallel CD$，∴ $\angle B = \angle DCF$，∴ $\angle DEF + \angle DCF = 180^\circ$，

∴ C、D、E、F 四点共圆，即 $CDEF$ 是圆内接四边形.

【演练6】如图，AB 为⊙O 直径，$BF \perp AB$，E 为 BF 上一点，AE 和 AF 交⊙O 于 C 和 D．求证：C、D、F、E 四点共圆.



【解析】连接 CD，

∵ $BF \perp AB$，∴ $\angle BAF + \angle F = 90^\circ$，

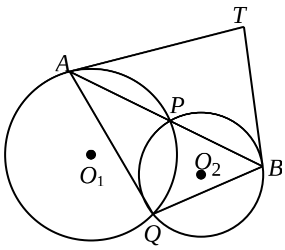
∵ AB 是直径，∴ $\angle ACD + \angle BAD = 90^\circ$，

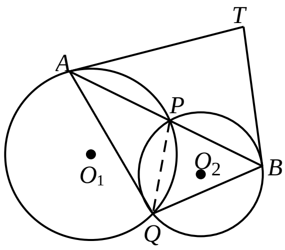
∴ $\angle ACD = \angle F$，

∴ C、D、F、E 四点共圆.

【演练7】

如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 P、Q 两点，过 P 点作两圆的割线分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 A、B，过 A、B 分别作两圆的切线相交于 T．求证：T、A、Q、B 四点共圆．





【解析】连接 PQ，

∵ TA、TB 是切线，

∴ $\angle TAB=\angle AQP$，$\angle TBA=\angle BQP$，

∵ $\angle TAB+\angle TBA+\angle T=180°$，

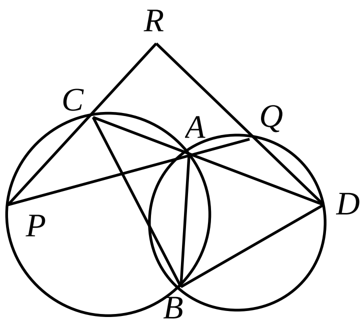
∴ $\angle AQP+\angle BQP+\angle T=180°$，

即 $\angle AQB+\angle T=180°$．

∴ T、A、Q、B 四点共圆．

【演练8】

过两圆交点 A、B 之一的点 A，引两条直线 CAD、PAQ，分别与两圆交于 C、D、P、Q，设 CP 与 DQ 的交点为 R，求证：B、C、R、D 四点共圆．



【解析】∵四边形 $ABDQ$ 是圆内接四边形，

∴ $\angle PQR=\angle ABD$．①

又因 P、C、A、B 共圆，

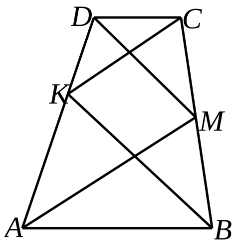
$\therefore \angle P=\angle ABC$．②

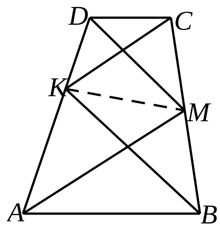
由①、②，得 $\angle CBD=\angle P+\angle RQP$，

$\therefore \angle CBD+\angle CRD=180^\circ$．

因此四点 B、D、R、C 在同一圆周上．

【演练9】
在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ DC$，$AB>CD$，K、M 分别在 AD、BC 上，$\angle DAM=\angle CBK$．求证：$\angle DMA=\angle CKB$．





【解析】连接 KM

$\because \angle DAM=\angle CBK$，$\therefore$ A、B、K、M 四点共圆，

$\therefore \angle AKB=\angle AMB$，$\angle CMK=\angle BAD$，

$\because AB /\!/ CD$，$\therefore \angle BAD+\angle ADC=180^\circ$，

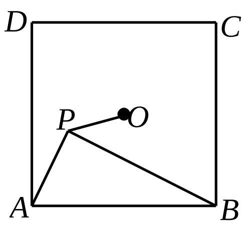
$\therefore \angle CMK+\angle ADC=180^\circ$，

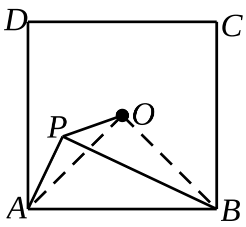
$\therefore$ C、D、K、M 四点共圆．

$\therefore \angle CKD=\angle CMD$，$\therefore \angle DMA=\angle CKB$．

【演练10】

如图，正方形 $ABCD$ 的中心为 O，面积为 1989cm^2， P 为正方形内一点，且 $\angle OPB=45^\circ$， $PA:PB=5:14$，求 PB 的长.





【解析】连接 OA、OB，

∵ $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle AOB=90^\circ$， $\angle OAB=45^\circ$，

∵ $\angle OPB=45^\circ$，∴ A、B、O、P 四点共圆，

∴ $\angle APB=90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中， $\angle APB=90^\circ$，

∴ $PA^2+PB^2=AB^2$，

设 $PA=5k$，$PB=14k$，

则 $25k^2+196k^2=1989$，

解得 $k^2=9$，∴ $k=3$，

∴ $PB=42\text{cm}$.

第 8 讲 四点共圆（2）

知识集锦

模块一　和圆幂定理有关的四点共圆

两条线段被一点分成（内分或外分）两段长的乘积相等，则这两条线段的四个端点共圆．

即：四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于 O，若 $AO \cdot CO = BO \cdot DO$，则 A、B、C、D 四点共圆；

或四边形 $ABCD$ 的对边 BA、CD 的延长线交于 P，若 $PA \cdot PB = PD \cdot PC$，则 A、B、C、D 四点共圆．

模块二　和垂心相关的四点共圆

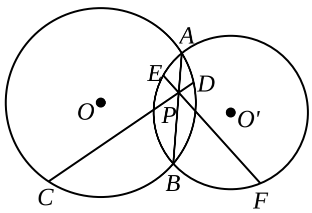
模块三　四点共圆与角度问题

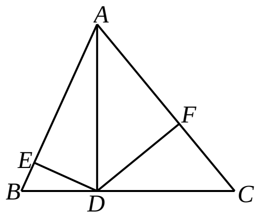
模块四　四点共圆与线段问题

模块一　和圆幂定理有关的四点共圆

【例1】 1．过相交两圆的公共弦上一点 P 作一个圆的弦 CD，另一圆的弦 EF，求证：C、D、E、F 四点共圆．

2．如图，AD 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高线，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F．求证：B、C、F、E 四点共圆．





【解析】1．在圆 O 中，$OP \cdot DP = AP \cdot BP$．

在圆 O' 中，$EP \cdot FP = AP \cdot BP$

所以 $CP \cdot DP = EP \cdot FP$

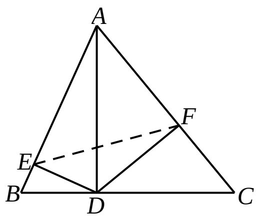
故 C、D、E、F 四点共圆．

2．解法一：$\because$ $AD \perp BC$，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，

$\therefore$ $AD^2 = AE \cdot AB$，$AD^2 = AF \cdot AC$，

$\therefore$ $AE \cdot AB = AF \cdot AC$，

$\therefore$ B、E、F、C 四点共圆．



解法二：连接 EF，

$\because$ $DE \perp AB$，$DF \perp AC$，$\therefore$ $\angle AED = \angle AFD = 90°$，

$\therefore$ A、E、D、F 四点共圆，$\therefore$ $\angle AEF = \angle ADF$，

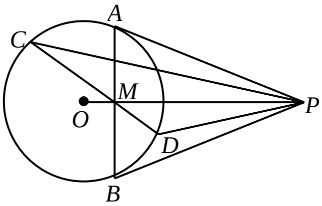
$\because$ $AD \perp BC$，$\therefore$ $\angle ADF = \angle C$，

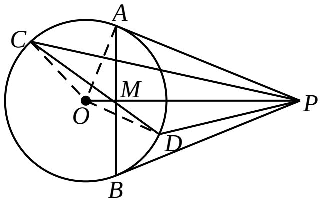
$\therefore$ $\angle AEF = \angle C$，

$\therefore$ B、E、F、C 四点共圆．

【例2】 如图，P 是 $\odot O$ 外一点，PA 和 PB 是 $\odot O$ 的切线，A、B 为切点，PO 与 AB 交于点 M，过

M 任作 $\odot O$ 的弦 CD．求证： $\angle CPO=\angle DPO$．





【解析】连接 OC、OD

$\because$ PA、PB 是切线，$\therefore$ $OA\perp PA$， $AB\perp OP$， $AM=BM$，

$\therefore$ $AM^2=OM\cdot PM$， $\because$ $AM\cdot BM=CM\cdot DM$，

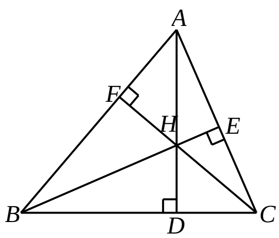
$\therefore$ $OM\cdot PM=CM\cdot DM$，

$\therefore$ C、O、D、P 四点共圆，

$\because$ $OC=OD$， $\therefore$ $\angle CPO=\angle DPO$．

模块二　和垂心相关的四点共圆

【例3】 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高，相交于垂心 H，在 A、B、C、D、E、F、H 七点中，有六组四点共圆，试逐一举出，并问各圆心在何处？



【解析】（1） A、E、H、F 四点共圆，圆心是 AH 的中点；

（2） B、D、H、F 四点共圆，圆心是 BH 的中点；

（3） C、D、H、E 四点共圆，圆心是 CH 的中点；

（4） A、B、D、E 四点共圆，圆心是 AB 的中点；

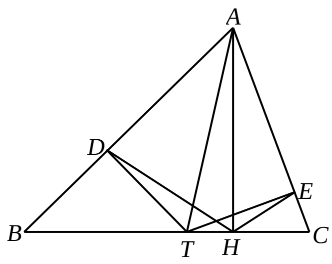
（5） B、C、E、F 四点共圆，圆心是 BC 的中点；

（6） A、C、D、F 四点共圆，圆心是 AC 的中点.

模块三 四点共圆与角度问题

【例4】 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，AH 是高，AT 是角平分线，且 $TD\perp AB$，$TE\perp AC$．

求证：（1）$\angle AHD=\angle AHE$；（2）$\dfrac{BH}{BD}=\dfrac{CH}{CE}$．



【解析】（1）

$\because TD\perp AB$，$TE\perp AC$，

$\therefore \angle ADT=\angle AET=90^\circ$，

$\therefore$ A、D、T、E 四点共圆，且 AT 是直径，

$\because AH\perp BC$，$\therefore \angle AHT=90^\circ$，

$\therefore$ H 也在圆上，即 A、D、T、H、E 五点共圆．

$\because$ AT 是角平分线，$\therefore DT=ET$，$\therefore AD=AE$，$\therefore \angle AHD=\angle AHE$．

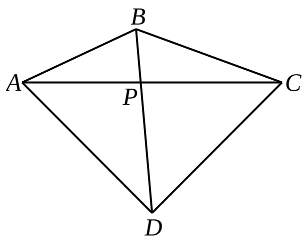
（2）由（1）可知，$BT\cdot BH=BD\cdot BA$，$CH\cdot CT=CE\cdot CA$，

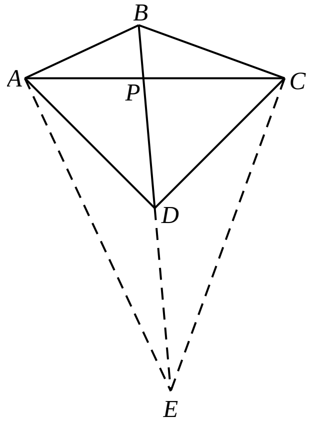
$\therefore \dfrac{BH}{BD}=\dfrac{BA}{BT}$，$\dfrac{CH}{CE}=\dfrac{CA}{CT}$．

$\because$ AT 是角平分线，$\therefore \dfrac{AB}{BT}=\dfrac{AC}{CT}$，

$\therefore \dfrac{BH}{BD}=\dfrac{CH}{CE}$．

【例5】 在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAC=25°$， $\angle BCA=20°$， $\angle BDC=50°$， $\angle BDA=40°$，求 $\angle CPB$．





【解析】延长 BD 到 E 使得 $DE=AD$，连接 AE、CE

$\because$ $\angle ADB=40°$， $AD=ED$， $\therefore$ $\angle DAE=\angle DEA=20°$，

$\because$ $\angle ACB=20°$， $\therefore$ $\angle ACB=\angle AED$，

$\therefore$ A、B、C、E 四点共圆，

$\therefore$ $\angle CEB=\angle CAB=25°$，

$\because$ $\angle BDC=50°$， $\therefore$ $\angle DEC=\angle DCE=25°$，

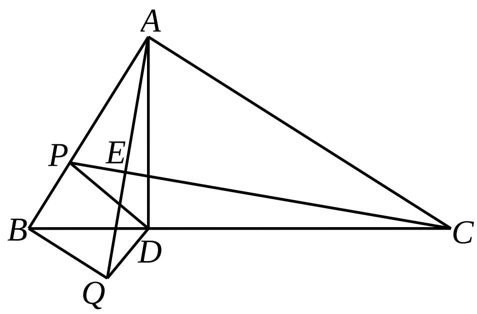
$\therefore$ $CD=DE$， $\therefore$ D 是圆心，

$\therefore$ $\angle DAB=\angle DBA=70°$，

$\therefore$ $\angle CPB=\angle BAC+\angle ABD=25°+70°=95°$．

模块四 四点共圆与线段问题

【例6】 在 $Rt\triangle ABC$ 中， AD 为斜边 BC 上的高， P 是 AB 上的点，过 A 作 PC 的垂线交过 B 所作 AB 的垂线于 Q 点．求证： $PD\perp QD$．



【解析】$\because$ $AE\perp PC$， $BQ\perp AB$， $AD\perp BC$，

$\therefore$ $\angle AEP=\angle ABQ=\angle ADC=90^\circ$，
$\angle CAD=\angle ABC$，

$\therefore$ B、P、E、Q， A、E、D、C 分别四点共圆，

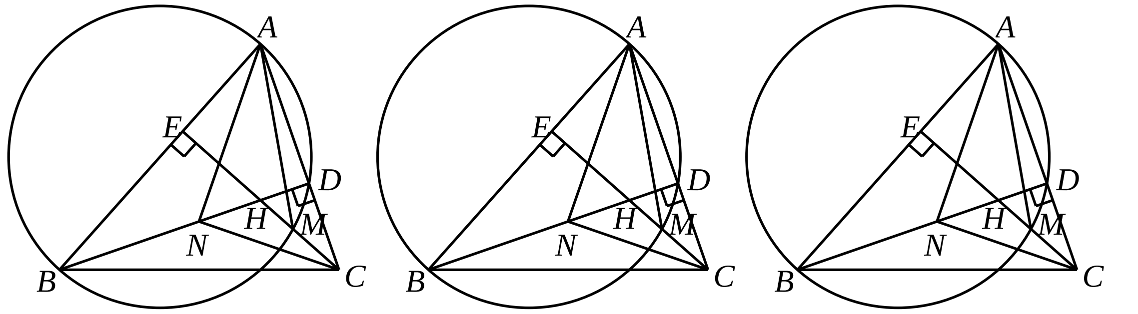
$\therefore$ $\angle CED=\angle CAD$， $\therefore$ $\angle CED=\angle ABC$，

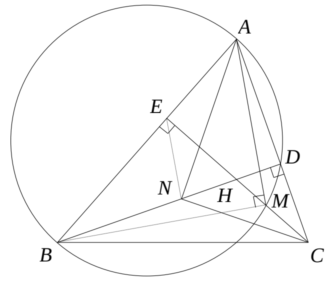
$\therefore$ B、D、E、P 四点共圆， $\therefore$ B、P、E、D、Q 五点共圆，

$\therefore$ $\angle PDQ=\angle PEQ=90^\circ$， $\therefore$ $PD\perp QD$.

【点评】此题目用相似的方法解也不复杂.

【例7】 如图所示，在锐角 $\triangle ABC$ 中， BD 、 CE 分别是边 AC 、 AB 上的高，以 AB 为直径作圆交 CE 于点 M ，在 BD 上取点 N ，使得 $AN=AM$ ，求证： $AN\perp CN$.





【解析】证法一：连结 DM，
由 AB 为直径， $BD\perp AC$ 得 A 、 B 、 M 、 D 四点共圆.

$\therefore$ $\angle ABD=\angle AMD$.

又 $\angle ACE=90^\circ-\angle CAE=\angle ABD=\angle AMD$.

$\therefore$ $\triangle ADM\backsim\triangle AMC$，

$\therefore$ $AD\cdot AC=AM^2=AN^2$，

∴ $AN\perp CN$．(射影定理的逆定理)

证法二：连结 BM 、 EN ，

则由射影定理得 $AM^2=AN^2=AE\cdot AB$．

∴ $\triangle AEN\backsim\triangle ANB$， ∴ $\angle ANE=\angle ABN$，

又 B，C，D，E 四点共圆，∴ $\angle ABN=\angle ACE$

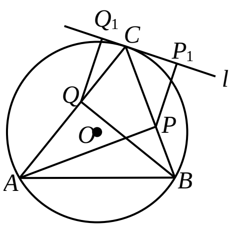
∴ $\angle ANE=\angle ACE$，

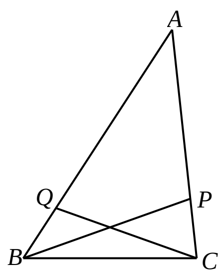
∴ A，E，N，C 四点共圆，

∴ $\angle ANC=\angle AEC=90°$，即 $AN\perp CN$．

【例8】 1．（2009 年"数学周报杯"全国初中数学竞赛）如下左图，过 $\triangle ABC$ 的顶点 C 作这个三角形的外接圆的切线 l， AP 和 BQ 是 $\triangle ABC$ 的两条高， $QQ_1\perp l$， $PP_1\perp l$，求证： $QQ_1=PP_1$．

2．如下右图，在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上分别取点 Q、P，使得 $\angle PBC=\angle QCB=\frac{1}{2}\angle A$．求证：$BQ=CP$．





【解析】1．连接 PQ

∵ AP、BQ 是 $\triangle ABC$ 的高，∴ $\angle APB=\angle AQB=90°$，

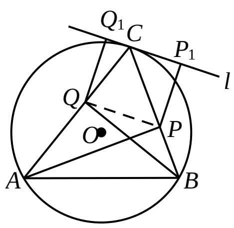
∴ A、B、P、Q 四点共圆，∴ $\angle CPQ=\angle CAB$，

∵ l 是 $\odot O$ 的切线，∴ $\angle BCP_1=\angle CAB$，

∴ $\angle CPQ=\angle BCP_1$，∴ $PQ\parallel l$．

∵ $PP_1\perp l$， $QQ_1\perp l$，

∴ $PP_1\parallel QQ_1$，∴ $PP_1=QQ_1$．



2．$\because \angle PBC=\angle QCB=\frac{1}{2}\angle A$，

$\therefore \angle BQC+\angle BPC=\angle A+\angle ACQ+\angle A+\angle ABP$

$=\angle A+\angle ABP+\angle PBC+\angle ACQ+\angle BCQ$

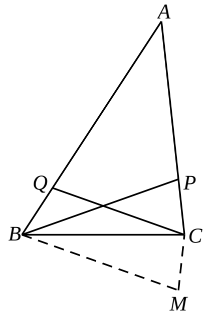
$=\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$．

作点 P 关于 BC 的对称点 M，

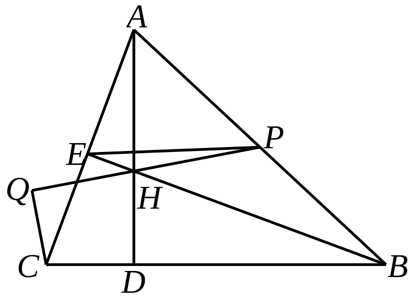
于是 $\angle BQC+\angle BMC=180°$， $MC=PC$，

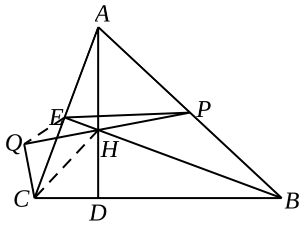
$\therefore$ B、M、C、Q 四点共圆，

$\because$ $\angle MBC=\angle PBC=\angle BCQ$，$\therefore$ $BQ=CM$ ，$\therefore$ $BQ=CP$．



【例9】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD\perp BC$， $BE\perp AC$， AD 与 BE 交于点 H， P 为边 AB 的中点，过点 C 作 $CQ\perp PH$ 于 Q．求证： $PE^2=PH\cdot PQ$．





【解析】连接 CH、EQ，

由已知可得 $\angle CQP=\angle CEB=90°$，

$\therefore$ C、Q、E、H 四点共圆，

$\therefore$ $\angle EQH=\angle ECH$，

$\because$ P 是 AB 的中点，$\therefore$ $PA=PE=PB$，

$\therefore$ $\angle PEB=\angle PBE=\angle ECH$，

$\therefore$ $\angle PEH=\angle EQH$，

$\therefore$ $\triangle PEH\backsim\triangle PQE$，

$\therefore$ $PE^2=PH\cdot PQ$．

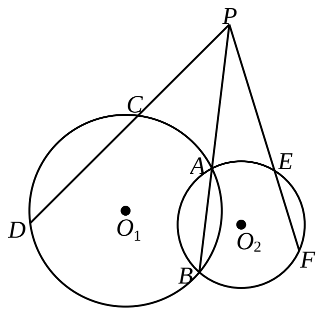
另：此题亦可证明 PE 是圆的切线，然后用圆幂定理得到结论．

笔记整理

课后作业

【演练1】

如图，圆O_1、O_2相交于点 A、B， P 是 BA 延长线上一点，割线 PCD 交圆O_1于 C、D，割线 PEF 交圆O_2于 E、F．求证： C、D、F、E 四点共圆．



【解析】由题意知 A、 B、 D、 C 四点共圆，

则有 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$．

又 A、 B、 F、 E 四点共圆，

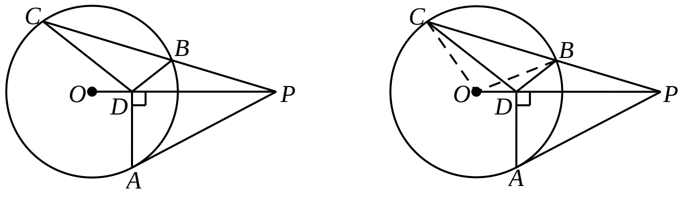
则有 $PA \cdot PB = PE \cdot PF$．

所以 $PC \cdot PD = PE \cdot PF$，

所以 C、 D、 F、 E 四点共圆．

【演练2】

如图， P 是 $\odot O$ 外一点， PA 切 $\odot O$ 于点 A， PBC 是 $\odot O$ 的割线， $AD \perp PO$ 于 D．求证： $\dfrac{PB}{BD} = \dfrac{PC}{CD}$．

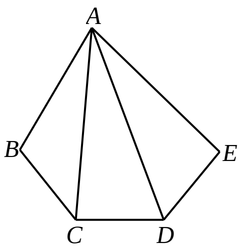


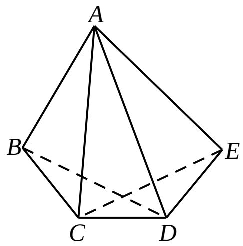
【解析】连接 OA，OB，$\because$ PA 是切线，$\therefore$ $OA\perp PA$，$\because$ $AD\perp OP$，$\therefore$ $PA^2=PD\cdot PO$，又 $PA^2=PB\cdot PC$，$\therefore$ $PD\cdot PO=PB\cdot PC$，$\therefore$ B、C、O、D 四点共圆.

$\therefore$ $\angle POB=\angle PCD$，$\angle PDB=\angle PCO$，$\therefore$ $\triangle PBD\backsim\triangle POC$，$\triangle POB\backsim\triangle PCD$，$\therefore$ $\dfrac{PB}{PO}=\dfrac{BD}{OC}$，$\dfrac{PO}{PC}=\dfrac{BO}{CD}$，$\therefore$ $\dfrac{PB}{BD}=\dfrac{PO}{OC}=\dfrac{PO}{BO}=\dfrac{PC}{CD}$.

【演练3】

如图，已知在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle BAE=3\alpha$，$BC=CD=DE$，且 $\angle BCD=\angle CDE=180°-2\alpha$．求证：$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$.





【解析】连接 BD、CE，

$\because$ $BC=CD$，$\angle BCD=180°-2\alpha$，

$\therefore$ $\angle CBD=\angle CDB=\alpha$，$\therefore$ $\angle BDE=180°-3\alpha$，

$\therefore$ $\angle BAE+\angle BDE=180°$，$\therefore$ A、B、D、E 四点共圆.

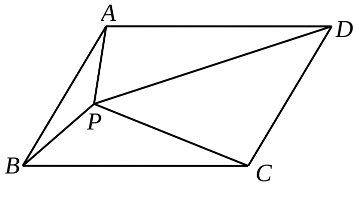
同理 A、B、C、E 四点共圆，

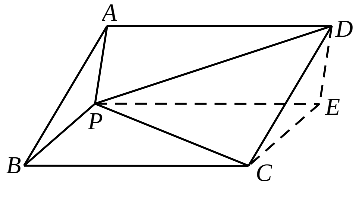
$\therefore$ A、B、C、D、E 五点共圆，

$\because$ $BC=CD=DE$，$\therefore$ $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$.

【演练4】

如图，点 P 在平行四边形 $ABCD$ 内，且 $\angle ABP=\angle ADP$，求证：$\angle DAP=\angle DCP$.





【解析】过 P 点作 AD 的平行线，过 D 点作 AP 的平行线，二者交于点 E，连接 CE，

则四边形 $APED$ 是平行四边形，$\therefore PE=AD$，

$\because ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD /\!/ BC$， $AD=BC$，

$\therefore PE /\!/ BC$， $PE=BC$，

$\therefore$四边形 $PBCE$ 是平行四边形，

$\therefore CE /\!/ BP$， $CE=BP$，

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle DCE$，

$\therefore \angle ABP=\angle DCE$，

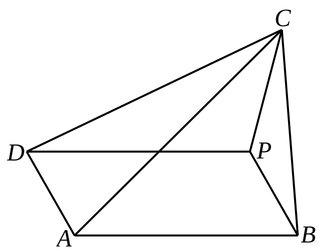
$\because \angle ABP=\angle ADP$，$\therefore \angle DPE=\angle DCE$，

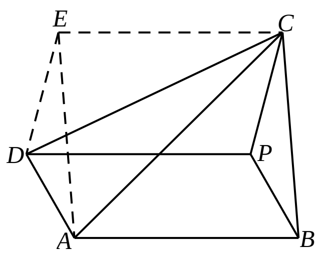
$\therefore C$、E、D、P 四点共圆，

$\therefore \angle PCD=\angle PED$，

$\therefore \angle DAP=\angle DCP$．

【演练5】
四边形 $ABCD$ 内部存在一点 P，使得 $ABPD$ 为平行四边形．若 $\angle CBP=\angle CDP$，则 $\angle ACD=\angle BCP$，反之亦然．





【解析】过 D 作 PC 的平行线，过 C 作 DP 的平行线，二者交于点 E，连接 EA
则四边形 $CEDP$ 是平行四边形，$\therefore DE=PC$， $CE=PD$，$\because$四边形 $ABPD$ 是平行四边形，$\therefore AB\underline{\underline{/\!/}}PD$， $AD\underline{\underline{/\!/}}PB$，$\therefore CE\underline{\underline{/\!/}}AB$，$\therefore$四边形 $ABCE$ 也是平行四边形，$\therefore AE\underline{\underline{/\!/}}BC$，$\therefore \triangle AED \cong \triangle BCP$，$\therefore \angle AED=\angle BCP$， $\angle DAE=\angle CBP$．

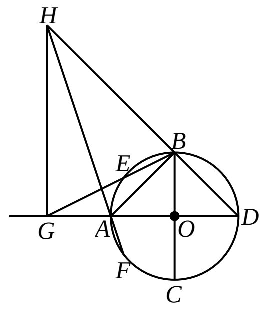
由题意，若 $\angle CDP=\angle DCE$，则 $\angle DAE=\angle DCE$．

A、D、E、C 四点共圆，$\therefore \angle ACD=\angle AED=\angle BCP$，反之，

若 $\angle ACD=\angle BCP=\angle AED$，则 A、D、E、C 四点共圆，$\therefore \angle DAE=\angle DCE$，$\therefore \angle CBP=\angle CDP$．

【演练6】

设 AD、BC 是圆 O 的互相垂直的直径，E 和 F 分别在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CA}$ 上，若 $\overset{\frown}{AE}$ 和 $\overset{\frown}{AF}$ 相等，直线 DA 和直线 BE 的交点为 G，直线 FA 和直线 DB 的交点为 H，求证：$\angle HGA$ 是直角．



【解析】 连接 AE，因为 $EADB$ 是圆内接四边形，

$\therefore \angle HBG=\angle EAD$．

又 $\because$ $DBE=DCF$

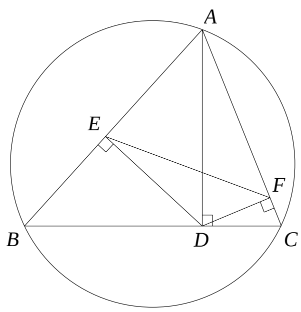
$\therefore \angle EAD=\angle FAD$

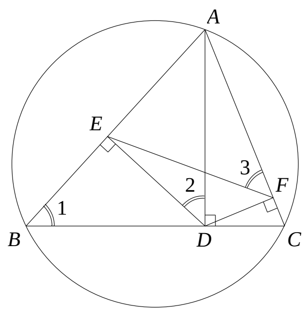
而且 $\angle FAD=\angle HAG$（对顶角），于是 $\angle HBG=\angle HAG$

所以 B、H、G、A 四点共圆．故 $\angle HGA=\angle ABD=90°$．

【演练7】

如图所示，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，$AD\perp BC$，垂足为点 D；$DE\perp AB$，垂足为点 E；$DF\perp AC$，垂足为点 F．求证：$S_{\triangle ABC}=EF\cdot R$．





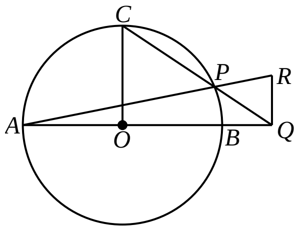
【解析】 由"双垂直模型"可知 $\angle 1=\angle 2$，

而由 A、E、D、F 四点共圆可知 $\angle 2=\angle 3$，从而 $\angle 1=\angle 3$．

由 $\triangle ABC \backsim \triangle AFE$ 可知 $\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{2R}{AD}$（注意到 AD 是 A、E、D、F 的直径即可），

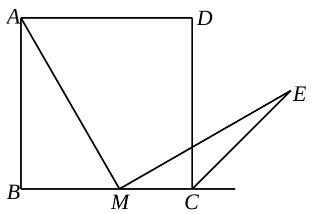
从而 $\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=EF\cdot R$．

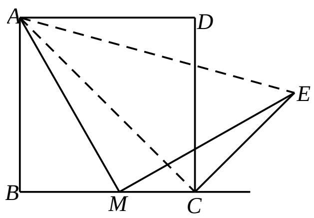
【演练8】
如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上且 $OC\perp AB$，P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，CP 的延长线与 AB 的延长线交于点 Q，过 Q 作 AB 的垂线交 AP 延长线于点 R．求证：$BQ=QR$．



【解析】连接 BP，
由题意可知 $\angle AOC=\angle APB=90°$，
$\angle QPR=\angle APC=45°$，
$\therefore \angle BPQ=45°$，
$\because \angle BPR=\angle BQR=90°$，
$\therefore$ B、Q、R、P 四点共圆，
$\therefore$ $BQ=QR$．

【演练9】
如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，M 是 BC 上一点，$ME\perp AM$ 交 $\angle BCD$ 的外角平分线于 E，求证：$AM=EM$．



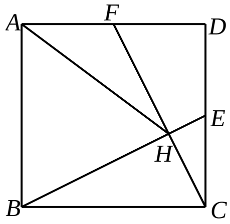


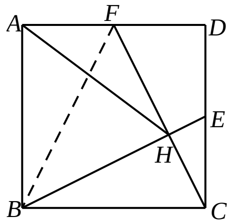
【解析】连接 AC、AE
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle ACD=45°$，$\because$ CE 是外角平分线，

$\therefore \angle DCE=45°$，$\therefore \angle ACE=90°$，$\because \angle AME=90°$，$\therefore$ A、M、C、E 四点共圆，

$\therefore \angle AEM=\angle ACB=45°$，$\therefore \angle EAM=45°$，$\therefore$ $AM=EM$．

【演练10】
如图，E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD、AD 的中点，BE、CF 相交于 H，求证：$AH=AB$．





【解析】连接 BF

$\because E$、F 是 CD、AD 的中点，$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF$，

$\therefore \angle CBE = \angle DCF$，

$\therefore \angle DCH + \angle BEC = \angle CBE + \angle BEC = 90^\circ$，

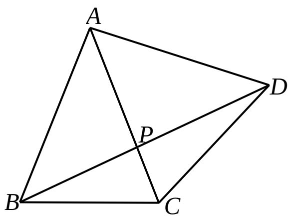
即 $\angle BHF = 90^\circ$，$\therefore A$、B、H、F 四点共圆，

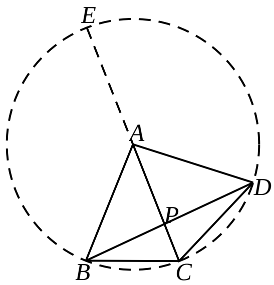
$\therefore \angle AHB = \angle AFB$，$\angle CFD = \angle CFD$，

很明显 $\angle AFB = \angle CFD$，$\therefore \angle ABH = \angle AHB$，$\therefore AH = AB$．

【演练11】

如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 6$，$\angle BDC = \dfrac{1}{2}\angle BAC$．若 $CP = 1$，求 $BP \cdot DP$．





【解析】以 A 为圆心，AB 长为半径作 $\odot A$，则点 C 在 $\odot A$ 上，

延长 CA 交 $\odot A$ 于 E，

$\because \angle BDC = \dfrac{1}{2}\angle BAC$，$\therefore$点 D 在 $\odot A$ 上，

$\therefore BP \cdot DP = CP \cdot EP$，

$\because AB = AC = 6$，$CP = 1$，$\therefore AE = 6$，$AP = 5$，

$\therefore PE = 11$，$\therefore BP \cdot DP = 11$．

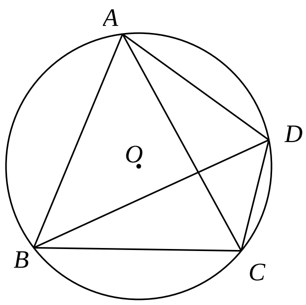
第 9 讲 托勒密定理

模块一 托勒密定理初识

托勒密定理

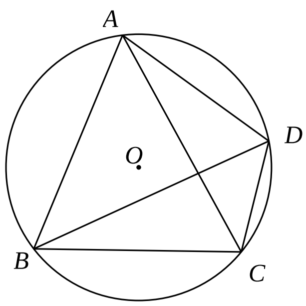
圆内接四边形对边乘积之和等于对角线的乘积。

例：圆内接四边形 $ABCD$ 中，则 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$



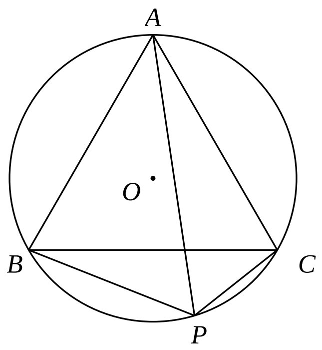
【例 1】

证明托勒密定理：即圆内接四边形 $ABCD$ 中，求证 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$



【例 2】

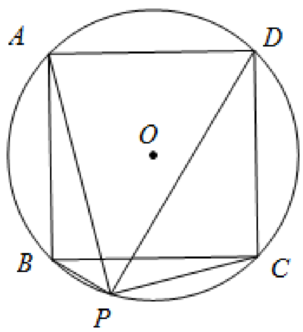
1．如果 P 是正三角形 ABC 外接圆劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的任一一点，求证：$PA=PB+PC$



2．如图，P 为正方形 $ABCD$ 的外接圆上的一点，

（1）探究 PB，PA，PD 的数量关系。

（2）探究 PB，PA，PC 的数量关系。



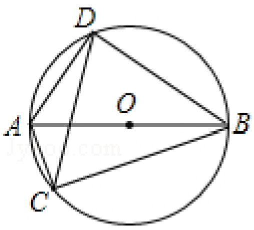
【例 3】

已知 AB 为⊙O 的直径，CD 为⊙O 的一条弦，顺次连接 AC、CB、BD、DA。

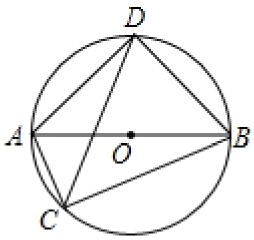
（1）当∠*ACD*=30°（如图 *a*）时，求证：$\sqrt{3}CA+CB=2CD$；

（2）当∠*ACD*=45°（如图 *b*）时，线段 *CA*、*CB*、*CD* 间的数量关系为______；

（3）在（2）的条件下，在⊙*O* 上移动点 *C*（保持 *AB* 与 *CD* 相交），过 *A* 点作 *AE*⊥*CD*，交射线 *CB* 于点 *E*，以 *B* 为顶点另作一个∠*DBF*，使得∠*DBF*=∠*DBA*，设直线 *FB* 与直线 *AE* 交于点 *G*，若 $CD=6\sqrt{2}$，$AB=4\sqrt{5}$，求 *EG* 的长



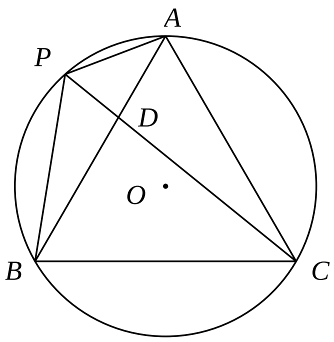
图a



图b

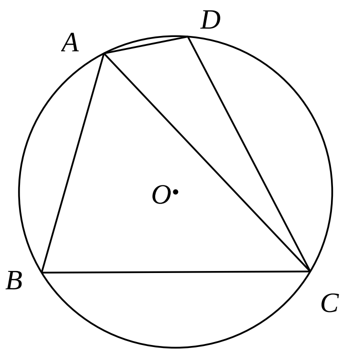
【例 4】

已知 *P* 为正三角形外接圆 AB 上的一点，连结 *PC* 交 *AB* 于点 *D*，求证：$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{1}{PD}$



【例 5】

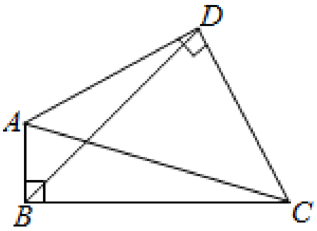
已知圆内接四边形 $ABCD$ 中，$CB=CD$，求证：$CA^2-CB^2=AB\cdot AD$



模块二 托勒密定理在四边形中的应用

【例 6】

如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，$BD$ 平分 $\angle ABC$，$\angle DCB=60°$，$AB+BC=8$，则 AC 的长是____。

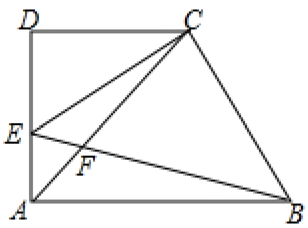


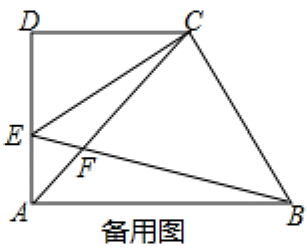
【例 7】

已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$\angle D=90°$，$AD=CD=2$，点 E 在边 AD 上（不与点 A、D 重合），$\angle CEB=45°$，EB 与对角线 AC 相交于点 F，设 $DE=x$

（1）用含 x 的代数式表示线段 CF 的长；

（2）当 $AE:AB=3:5$ 时，求 AB 的长

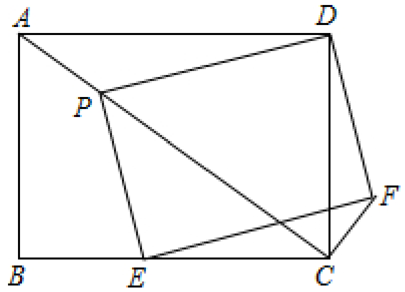




备用图

【例 8】

如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=8$，P，E 分别是线段 AC、BC 上的点，且四边形 $PEFD$ 为矩形，若 $AP=\sqrt{2}$，求 CF 的长



【例 9】

在△*ABC* 中，∠*BAC*=90°，点 *D*、*E* 分别为边 *AB*、*AC* 上的点，且 *DE*∥*BC*，将△*ADE* 绕点 *A* 旋转，点 *D*、*E* 的对应点分别为 *D*′、*E*′，若点 *D* 的对应点 *D*′恰好落在 *BC* 上，连接 *CE*′，请解决如下问题：

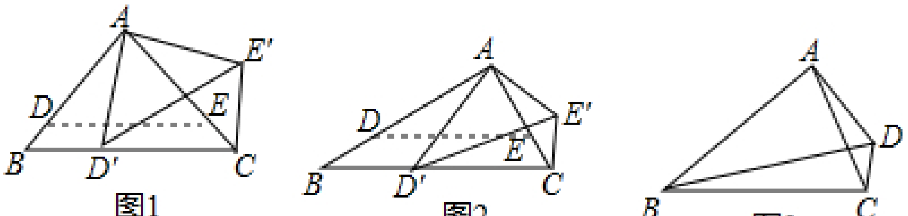


图1 图2 图3

（1）如图 1，若∠*B*=45°，则∠*D*′*CE*′=__度，*AC*、*CD*′、*CE*′的数量关系为_____。

（2）如图 2，若∠*B*=30°，求∠*D*′*CE*′的度数和 *AC*，*CD*′，*CE*′之间的数量关系，请你写出求解过程；

（3）如图 3，在四边形 *ABCD* 中，∠*BAD*=∠*BCD*=90°，*AB*=4，*AD*=2，$AC=\sqrt{10}$，请你直接写出四边形 *ABCD* 的面积。

【例 10】

（1）问题发现：
如图①，在等边三角形 ABC 中，点 M 为 BC 边上异于 B、C 的一点，以 AM 为边作等边三角形 AMN，连接 CN，NC 与 AB 的位置关系为 ______；
（2）深入探究：
如图②，在等腰三角形 ABC 中，BA=BC，点 M 为 BC 边上异于 B、C 的一点，以 AM 为边作等腰三角形 AMN，使∠ABC=∠AMN，AM=MN，连接 CN，试探究∠ABC 与∠ACN 的数量关系，并说明理由；
（3）拓展延伸：
如图③，在正方形 ADBC 中，AD=AC，点 M 为 BC 边上异于 B、C 的一点，以 AM 为边作正方形 AMEF，点 N 为正方形 AMEF 的中点，连接 CN，若 BC=10，$CN=\sqrt{2}$，试求 EF 的长。

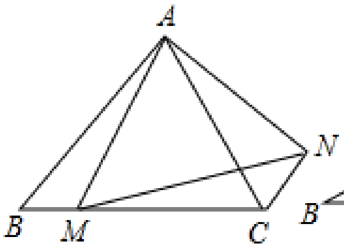


图1

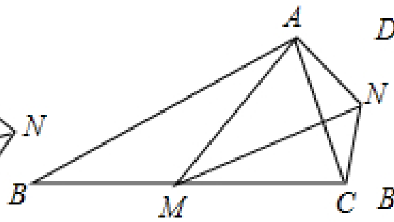


图2

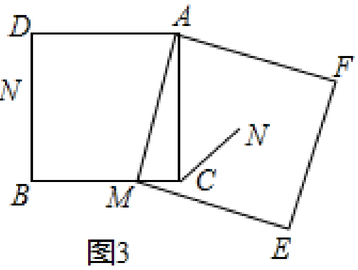


图3

笔记整理

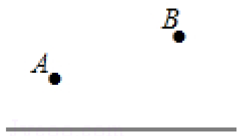
课后作业

【演练 1】

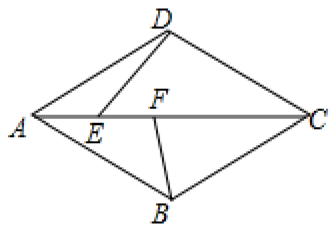
（1）如图①，点 A、点 B 在线段 l 的同侧，请你在直线 l 上找一点 P，使得 $AP+BP$ 的值最小（不需要说明理由）。

（2）如图②，菱形 $ABCD$ 的边长为 6，对角线 $AC=6\sqrt{3}$，点 E，F 在 AC 上，且 $EF=2$，求 $DE+BF$ 的最小值。

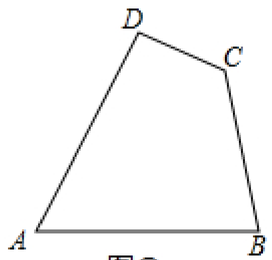
（3）如图③，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=6$，$\angle BAD=60°$，$\angle BCD=120°$，四边形 $ABCD$ 的周长是否存在最大值，若存在，请求出最大值；若不存在，请说明理由。



图①



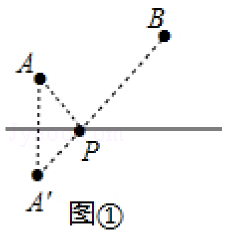
图②



图③

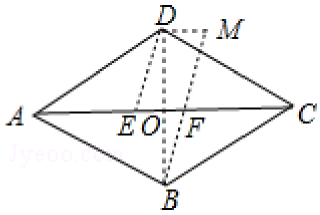
【答案】见解析

【解答】（1）如图①中，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$ 交直线 l 于 P，连接 PA．则点 P 即为所求的点．



图①

（2）如图②中，作 $DM\parallel AC$，使得 $DM=EF=2$，连接 BM 交 AC 于 F，



图②

∵$DM=EF$，$DM // EF$，∴四边形 $DEFM$ 是平行四边形，

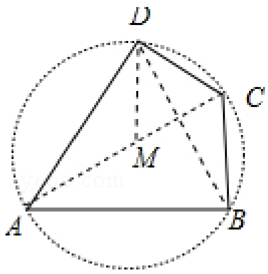
∴$DE=FM$，∴$DE+BF=FM+FB=BM$，根据两点之间线段最短可知，此时 $DE+FB$ 最短，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴$AC\perp BD$，$AO=OC=3\sqrt{3}$，在 $Rt\triangle ADO$ 中，$OD=\sqrt{AD^2-OA^2}=3$，

∴$BD=6$，∵$DM // AC$，∴$\angle MDB=\angle BOC=90°$，∴$BM=\sqrt{BD^2+DM^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.

∴$DE+BF$ 的最小值为 $2\sqrt{10}$.

（3）如图③中，连接 AC、BD，在 AC 上取一点，使得 $DM=DC$.



图③

∵$\angle DAB=60°$，$\angle DCB=120°$，∴$\angle DAB+\angle DCB=180°$，∴$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆，

∵$AD=AB$，$\angle DAB=60°$，∴$\triangle ADB$ 是等边三角形，∴$\angle ABD=\angle ADB=60°$，

∴$\angle ACD=\angle ABD=60°$

∵$DM=DC$，∴$\triangle DMC$ 是等边三角形，∴$\angle ADB=\angle MDC=60°$，$CM=DC$，∴$\angle ADM=\angle BDC$，

∵$AD=BD$，∴$\triangle ADM\cong\triangle BDC$，∴$AM=BC$，∴$AC=AM+MC=BC+CD$，

∵四边形 $ABCD$ 的周长$=AD+AB+CD+BC=AD+AB+AC$，∵$AD=AB=6$，

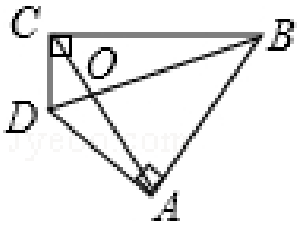
∴当 AC 最大时，四边形 $ABCD$ 的周长最大，

∴当 AC 为△ABC 的外接圆的直径时，四边形 $ABCD$ 的周长最大，易知 AC 的最大值=$4\sqrt{3}$，

∴四边形 $ABCD$ 的周长最大值为 $12+4\sqrt{3}$.

【演练 2】

凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$=60°，$\angle BAD$=$\angle BCD$=90°，AB=2，CD=1，对角线 AC、BD 交于点 O，如图，则 $BD\times CA$=______。



【解答】$\dfrac{15+6\sqrt{3}}{26}$

∵$\angle BAD$=$\angle BCD$=90°,

∴A、B、C、D 四点共圆；

延长 BA、CD 交于 P,

则$\angle ADP$=$\angle ABC$=60°,

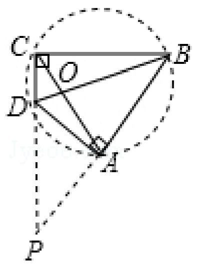
AD=x，有 AP=$\sqrt{3}x$，DP=$2x$,

由割线定理，得（$2+\sqrt{3}x$）$\sqrt{3}x$=$2x$（$1+2x$），

解得 AD=x=$2\sqrt{3}-2$，BC=$\frac{1}{2}BP$=$4-\sqrt{3}$，

由托勒密定理有

BD•CA=（$4-\sqrt{3}$）（$2\sqrt{3}-2$）+2×1=$10\sqrt{3}-12$.



【演练 3】

如图 1，在平行四边形 *ABCD* 中，*AE*⊥*BC* 于点 *E*，*E* 恰为 *BC* 的中点，$\frac{AE}{BE}=2$ 。

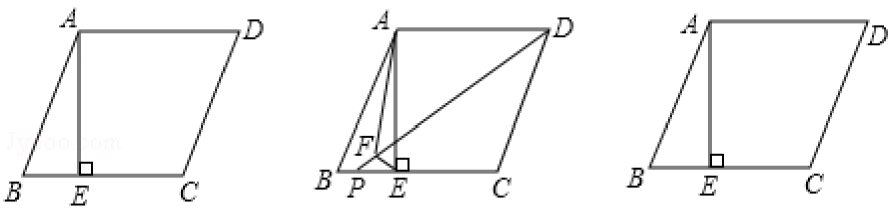


图1　　图2　　图3

（1）求证：*AD*=*AE*；

（2）如图 2，点 *P* 在线段 *BE* 上，作 *EF*⊥*DP* 于点 *F*，连接 *AF*，求证：$DF-EF=\sqrt{2}AF$；

（3）请你在图 3 中画图探究：当 *P* 为射线 *EC* 上任意一点（*P* 不与点 *E* 重合）时，作 *EF* 垂直直线 *DP*，垂足为点 *F*，连接 *AF*，线段 *DF*、*EF* 与 *AF* 之间有怎样的数量关系？直接写出你的结论。

【解答】（1）证明：∵*tanB*=2，∴*AE*=2*BE*；∵*E* 是 *BC* 中点，∴*BC*=2*BE*，即 *AE*=*BC*；

又∵四边形 *ABCD* 是平行四边形，则 *AD*=*BC*=*AE*；

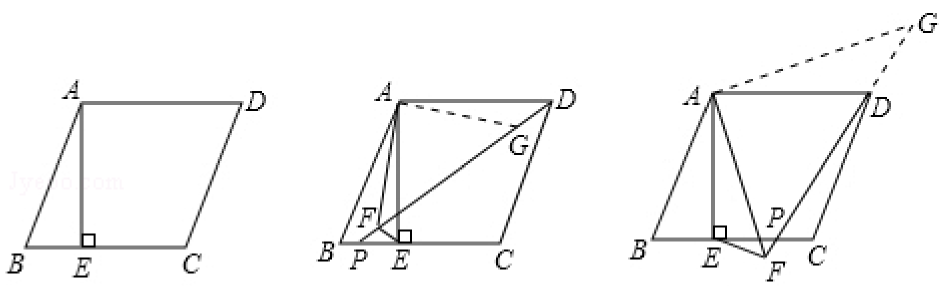


图1　　图2　　图3

（2）证明：作 *AG*⊥*AF*，交 *DP* 于 *G*；（如图 2）

∵$AD // BC$，∴$\angle ADG=\angle DPC$；∵$\angle AEP=\angle EFP=90°$，

∴$\angle PEF+\angle EPF=\angle PEF+\angle AEF=90°$，即$\angle ADG=\angle AEF=\angle FPE$；

又∵$AE=AD$，$\angle FAE=\angle GAD=90°-\angle EAG$，∴$\triangle AFE\cong\triangle AGD$，

∴$AF=AG$，即$\triangle AFG$是等腰直角三角形，且$EF=DG$；

∴$FG=\sqrt{2}AF$，且$DF=DG+GF=EF+FG$，

故$DF-EF=\sqrt{2}AF$；

（3）解：如图3，

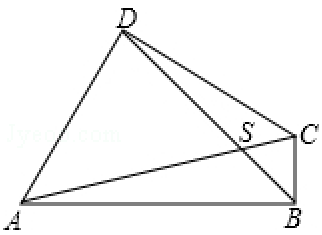
①当EP在线段BC上时，有$DF-EF=\sqrt{2}AF$

②当$EP\leq 2BC$时，$DF+EF=\sqrt{2}AF$，解法同（2）．

③当$EP>2BC$时，$EF-DF=\sqrt{2}AF$.

【演练4】

如图，在四边形$ABCD$中，已知$\angle BAD=60°$，$\angle ABC=90°$，$\angle BCD=120°$，对角线AC，BD交于点S，且$DS=2SB$。求证：$AD=DC$。



【解答】由已知得$\angle ADC=90°$，从而A，B，C，D四点共圆，AC为直径．

设P为AC的中点，则P为四边形$ABCD$的外接圆的圆心．

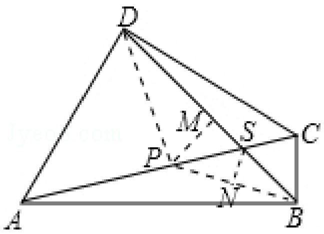
作$PM\perp BD$于点M，则M为BD的中点，所以$\angle BPM=\frac{1}{2}\angle BPD=\angle A=60°$，

从而∠PBM=30°．作 SN⊥BP 于点 N，则 $SN=\frac{1}{2}SB$．又 DS=2SB，$DM=MB=\frac{1}{2}BD$，

∴$MS=DS-DM=2SB-\frac{3}{2}SB=\frac{1}{2}SB=SN$，∴$Rt\triangle PMS\cong Rt\triangle PNS$，

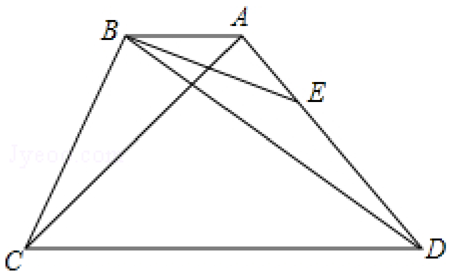
∴∠MPS=∠NPS=30°，又 $PA=PB$，所以∠$PAB=\frac{1}{2}$∠NPS=15°，

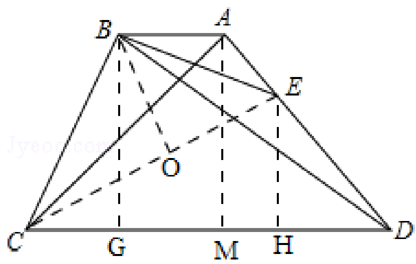
所以∠DAC=45°=∠DCA，所以 $AD=DC$．



【演练 5】

如图，AB∥CD，∠CBE=∠CAD=90°，$AC=AD$=6，DE=4，则 BD 长为______。





【解答】如图，在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AC=AD$=6，∴$CD=6\sqrt{2}$，∠ACD=∠ADC=45°，

∵AB∥CD，∴∠BAC=∠ACD=45°，连接 CE，在 $Rt\triangle ACE$ 中，AC=6，$AE=AD-DE$=2．

∴$CE=\sqrt{AC^2+CE^2}=2\sqrt{10}$，取 CE 的中点 O，连接 OB，∵∠CBE=∠CAE=90°，

∴点 A，B，C，E 在以点 O 为圆心，CE 为直径的圆上，∴∠BOC=2∠BAC=90°，

$OB=OC=\frac{1}{2}CE=\sqrt{10}$

∵$OB=OC$，∴$BC=\sqrt{2}OB=2\sqrt{5}$，过点E作$EH\perp CD$，∵$\angle ADC=45°$，∴$\triangle DEH$是等腰直角三角形，

∵$DE=4$，∴$EH=DH=\frac{1}{\sqrt{2}}DE=2\sqrt{2}$，过点$A$作$AM\perp CD$，∴$EH\parallel AM$，∴$\frac{EH}{AM}=\frac{DE}{AD}=\frac{4}{6}$，

∴$AM=\frac{3}{2}EH=3\sqrt{2}$，过点$B$作$BG\perp CD$，∴四边形$ABGH$是矩形，∴$BG=AM=3\sqrt{2}$，

在$Rt\triangle BCG$中，$BC=2\sqrt{5}$，$BG=3\sqrt{2}$，∴$CG=\sqrt{BC^2-BG^2}=\sqrt{2}$，

∴$DG=CD-CG=6\sqrt{2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}$，

在$Rt\triangle BDG$中，$BG=3\sqrt{2}$，$DG=5\sqrt{2}$，∴$BD=\sqrt{BG^2+DG^2}=2\sqrt{17}$．

第 10 讲 不等式（1）

模块一 一元二次不等式

1.一元二次不等式

【定义】设 a、b、c 为实数，形如 $ax^2+bx+c>0$（或<），其中 $a\neq 0$ 的不等式叫做一元二次不等式，满足不等式的 x 值构成的集合叫做一元二次不等式的解.

【解法】将原式化为 AB 的形式，然后解出来就可以.

2.高次不等式

【定义】形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0>0$；

【解法】将其分解为：$a_n(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)>0$，然后用“穿根法”求出取值范围.

【例1】

（1）$x^2+4x-21\geq 0$

（2）$x^2-3x-1<0$

（3）$x^3-9x^2+26x-24<0$

（4）$6x^4+5x^3+3x^2-3x-2\geq 0$

【例2】

解不等式：$x^2-5|x|+6>0$

【例3】

设 a 为实数，解关于 x 的不等式：$ax^2-(a+1)x+1<0$

【例4】

设实数 a、b、c 满足 $c\le b\le a$，且 $a+b+c=10$，$abc-23a=40$，求 $\left|a\right|+\left|b\right|+\left|c\right|$ 的最小值.

【例5】

已知 x 为实数，$t=\sqrt{2x^2-16x+40}+x-2$，求 t 的最小值为多少？并且求出此时 x 的值.

模块二　均值不等式

一．重要的不等式关系

1.均值不等式

【定义】如果a，b是正实数，那么$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时，有等号成立．此结论称为均值定理，又称均值不等式或基本不等式．对于任意两个实数a，b，$\dfrac{a+b}{2}$叫做a，b的算术平均值，$\sqrt{ab}(ab\geqslant 0)$叫做a，b的几何平均值．均值定理可以表述为：两个正实数的算术平均值大于或等于它的几何平均值．

2.两个著名的不等式

【概念】积定差大和大：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；

和定差小积大：$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$；

3.均值不等式的推广

【概念】$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

（调和平均数≤几何平均数≤算术平均数≤平方平均数）

类似的，这个不等式可以推广到n个数的情形：

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\left(a_1a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}}.$$

【例6】

（1）已知$a>0$，则$t=a+\dfrac{9}{a}$的最小值是______.

（2）已知$a<0$，则$t=a+\dfrac{4}{a}$的最大值是____________.

（3）设$0<x<1$，求函数$y=x(1-x)$的最大值.

（4）若$0<x<\dfrac{1}{2}$，求代数式$x^2\left(1-2x\right)$的最大值.

【例7】

（1）若x、y是正实数，且$x+4y=1$，则$x\cdot y$的最大值是_____________.

（2）已知$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，且$a+b=2$，则a^2+b^2 的最小值为多少？

（3）已知$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，且$a+b=8$，则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的最大值为多少？

【例8】

1.已知 a、b 为非负实数，且 $a+b=1$，又 x_i、$y_i\left(i=1、2\right)$ 为正实数，且 $y_1=ax_1+bx_2$， $y_2=bx_1+ax_2$，

求证： $y_1y_2\geqslant x_1x_2$.

2.在 $\triangle ABC$ 中有 $abc\geqslant\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)$.

【例9】

设$\triangle ABC$内切圆半径为r，$2p=a+b+c$，求证：$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$．

【例10】

若$x\neq0$，求函数$y=\frac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}$的最大值．

笔记整理

课后作业

【演练1】

已知 $x>\frac{5}{4}$，则函数 $y=4x+\frac{1}{4x-5}$取最小值为______.

【解析】∵$x>\frac{5}{4}$，∴$4x-5>0$.

则函数 $y=4x+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+5\geq 2\sqrt{(4x-5)\cdot\frac{1}{4x-5}}+5=7$，当且仅当 $x=\frac{3}{2}$时取等号.

∴函数 $y=4x+\frac{1}{4x-5}$取最小值为 7.

【演练2】

不等式（$x+5$）（$x-1$）（$x-6$）>0 的解集是______.

【解析】令（$x+5$）（$x-1$）（$x-6$）$=0$，解得：$x=-5$，1，6，

$x<-5$ 时，$x+5<0$，$x-1<0$，$x-6<0$，（$x+5$）（$x-1$）（$x-6$）<0，不合题意，

$-5<x<1$ 时，$x+5>0$，$x-1<0$，$x-6<0$，（$x+5$）（$x-1$）（$x-6$）>0，符合题意，

$1<x<6$ 时，$x+5>0$，$x-1>0$，$x-6<0$，不合题意，

$x>6$ 时，$x+5>0$，$x-1>0$，$x-6>0$，（$x+5$）（$x-1$）（$x-6$）>0，符合题意，

故不等式的解集是：$\{x|-5<x<1$ 或 $x>6\}$，

故答案为：$\{x|-5<x<1$ 或 $x>6\}$.

【演练3】

已知实数 a，b，c 满足：$a+b+c=-2$，$abc=-4$．则$|a|+|b|+|c|$的最小值为______.

【解析】$a+b+c=-2$，$abc=-4$．可得：至少有一个小于 0.

不妨设 a，b，$c<0$；或 $a>0$，$b>0$，$c<0$.

①$a>0$，$b>0$，$c<0$.

则 $a+b=-2-c$，$ab=-\frac{4}{c}$,

∴a，b 是方程 $t^2+(2+c)t-\frac{4}{c}=0$ 的两个正实数根.

$\Delta=(2+c)^2+\frac{16}{c}\geq 0$,

化为：$c^3+4c^2+4c+16\leq 0$，

∴（$c+4$）（c^2+4）≤ 0，

∴$c\leq -4$.

$|a|+|b|+|c|=a+b-c=-2-c-c=-2-2c\geq -2-2\times(-4)=6$.

②a，b，$c<0$ 时，由已知可得：$a+b=-2-c$，$ab=-\frac{4}{c}$，

a，b 是方程 $t^2+(2+c)t-\frac{4}{c}=0$ 的两个负实数根.

$\Delta=(2+c)^2+\frac{16}{c}\geq 0$，

化为：$c^3+4c^2+4c+16\leq 0$，

∴（$c+4$）（c^2+4）≤ 0，

∴$c\leq -4$.

∴$a+b=-2-c>0$，与 a，$b<0$ 矛盾，舍去.

综上可得：$|a|+|b|+|c|$的最小值为 6.

故答案为：6.

【演练4】

已知正实数 x，y 满足 $x+2y=4$，则$\sqrt{2x(y+1)}$的最大值为______.

【解析】∵$x+2y=4$，∴$x+2y+2=6$

∴$2x(y+1)=x(2y+2)\leq\left(\frac{x+2y+2}{2}\right)^2=9$，当且仅当 $x=2y+2$ 时，即 $x=3$，$y=\frac{1}{2}$取等号，

∴$\sqrt{2x(y+1)}\leq 3$，即$\sqrt{2x(y+1)}$的最大值为 3，

故答案为：3

【演练5】

解下列一元二次不等式：

（1）$x^2+2x-8<0$；

（2）$2x^2-9x+10\geq 0$.

【解析】（1）不等式 $x^2+2x-8<0$ 可化为

$(x+4)(x-2)<0$,

且该不等式对应方程的两个实数根为 -4 和 2,

所以原不等式的解集为 $(-4, 2)$；

（2）不等式 $2x^2-9x+10\geq 0$ 可化为

$(2x+1)(x-5)\geq 0$,

且该不等式对应方程的两个实数根为$-\frac{1}{2}$和 5,

所以原不等式的解集为 $(-\infty, \frac{1}{2}]\cup[5, +\infty)$．

【演练6】

解关于 x 的不等式：$x^2-5|x|+6<0$.

【解析】原不等式化为：$|x|^2-5|x|+6<0$.

即 $(|x|-2)(|x|-3)<0$,

$\therefore 2<|x|<3$,

$\therefore$原不等式的解为 $-3<x<-2$ 或 $2<x<3$.

【演练7】

关于 x 的不等式 $ax^2-(a-1)x-1<0$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式的解集；

（2）当 $a\in\mathbf{R}$ 时，解不等式.

【解析】（1）$a=2$ 时，不等式为 $2x^2-x-1<0$,

可化为 $(2x+1)(x-1)<0$,

解得$-\frac{1}{2}<x<1$,

$\therefore$不等式的解集为 $(-\frac{1}{2}, 1)$；

（2）当 $a\in\mathbf{R}$ 时，若 $a=0$，则不等式化为 $x-1<0$，解得 $x<1$；

若 $a\neq0$，则不等式可化为（$ax+1$）（$x-1$）<0；

当 $a>0$ 时，不等式化为（$x+\frac{1}{a}$）（$x-1$）<0，且$-\frac{1}{a}<1$，解不等式得$-\frac{1}{a}<x<1$；

当 $a<0$ 时，不等式可化为（$x+\frac{1}{a}$）（$x-1$）>0，

若$-1<a<0$，则$-\frac{1}{a}>1$，解不等式得 $x<1$ 或 $x>-\frac{1}{a}$；

当 $a=-1$ 时，有$-\frac{1}{a}=1$，解不等式得 $x\neq1$；

当 $a<-1$ 时，有$-\frac{1}{a}<1$，解不等式得 $x<-\frac{1}{a}$或 $x>1$；

综上，$a=0$ 时，不等式的解集为$\{x|x<1\}$；

$a>0$ 时，不等式的解集为$\{x|-\frac{1}{a}<x<1\}$；

$-1<a<0$ 时，不等式的解集为$\{x|x<1$ 或 $x>-\frac{1}{a}\}$；

$a=-1$ 时，不等式的解集为$\{x|x\neq1\}$；

$a<-1$ 时，不等式的解集为$\{x|x<-\frac{1}{a}$或 $x>1\}$.

【演练8】

解不等式 $ax^2-(a-1)x-1\leq0$（$a\in\mathbf{R}$）

【解析】原不等式可化为（$x-1$）（$ax+1$）<0

1^0 当 $a>0$ 时，$\therefore-\frac{1}{a}<x<1$，其解集为（$-\frac{1}{a}$，1），

2^0 当 $a=-1$ 时，即$-\frac{1}{a}=1$，其解集为 $x\neq1$，

3^0 当$-1<a<0$，即$-\frac{1}{a}>1$，$\therefore x<1$ 或 $x>-\frac{1}{a}$，其解集为（$-\infty$，1）$\cup$（$-\frac{1}{a}$，$+\infty$），

4^0 当 $a<-1$ 时，即$-\frac{1}{a}<1$，$\therefore x>1$ 或 $x<-\frac{1}{a}$，其解集为（$-\infty$，$-\frac{1}{a}$）$\cup$（1，$+\infty$），

5^0 当 $a=0$ 时，原不等式可化为 $x-1<0$，解得 $x<1$，其解集为（$-\infty$，1）.

【演练9】

已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=2$，

（1）求证：$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\leq2\sqrt{2}$；

（2）求$\frac{2}{a}+\frac{9}{2b}$的最小值.

【解析】（1）先证正数 x，y 满足 $x+y\leq\sqrt{2(x^2+y^2)}$，

平方作差可得（$x+y$）$^2-2$（x^2+y^2）$=-$（$x-y$）$^2\leq0$，

$\therefore x+y\leq\sqrt{2(x^2+y^2)}$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，

$\therefore$由 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=2$ 可得 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\leq\sqrt{2[(a+1)+(b+1)]}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\sqrt{a+1}=\sqrt{b+1}$ 即 $a=b=1$ 时取等号；

（2）$\frac{2}{a}+\frac{9}{2b}=\frac{1}{2}$（$\frac{2}{a}+\frac{9}{2b}$）（$a+b$）$=\frac{1}{2}$（$\frac{13}{2}+\frac{2b}{a}+\frac{9a}{2b}$）

$\geq\frac{1}{2}$（$\frac{13}{2}+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{9a}{2b}}$）$=\frac{25}{4}$

当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{9a}{2b}$ 即 $a=\frac{4}{5}$ 且 $b=\frac{6}{5}$ 时取等号，

$\therefore\frac{2}{a}+\frac{9}{2b}$ 的最小值为 $\frac{25}{4}$

【演练10】

已知实数 x，y 满足（$x+\sqrt{x^2+1}$）（$y+\sqrt{y^2+1}$）$=1$，求 $x+y$ 的值.

【解析】令 $x+\sqrt{x^2+1}=a$，$y+\sqrt{y^2+1}=b$，易知 a、$b\neq0$，

由已知 $ab=1$，$a-x=\sqrt{x^2+1}$，$b-y=\sqrt{y^2+1}$ ，

$\therefore$（$a-x$）$^2=x^2+1$，（$b-y$）$^2=y^2+1$，

$\therefore a^2-2ax+x^2=x^2+ab$，$b^2-2by+y^2=y^2+ab$，

$\therefore a-2x=b$，$b-2y=a$，$\therefore x+y=0$

第 11 讲 不等式（2）

模块一　均值不等式的应用

【例1】

已知 $a>0$，$b>0$，并且 $a+b=1$，证明：$(a+\dfrac{1}{a})^2+(b+\dfrac{1}{b})^2\geq\dfrac{25}{2}$

【例2】

已知 x、y、z 是正数 $x+y+z=1$，比较 $A=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ 与 $B=36$ 的大小，并问 A 能否等于 B?

【例3】

若 $a>0$，且 $a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$，试判定 a，b，c 的大小关系.

【例4】

试比较 $A=\dfrac{567891234}{6789012345}$ 与 $B=\dfrac{567891235}{6789012347}$ 的大小.

【例5】

已知 x 为实数，$t=\sqrt{2x^2-16x+40}+x-2$，求 t 的最小值为多少？并且求出此时 x 的值.

【例6】

已知 x_1、x_2、x_3 为实数且 $x_1+x_2+x_3=6$，$x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 18$，证明：$0\le x_i\le 4$（$i=1$，2，3）

【例7】

已知 a、b、c 是正数，且 $abc=1$，证明：$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leq 1$

模块二　柯西不等式

柯西不等式的概念和推广

【定义】设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为任意实数，记 $A_n=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}$，$B_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，$C_n=b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+\cdots+b_n^{\ 2}$．则 $B_n^{\ 2}\leqslant A_n\cdot C_n$．当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立.

柯西不等式的常用形式：

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\frac{\left(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}\right)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant\sqrt{\left[\left(a_1b_1\right)^2+\left(a_2b_2\right)^2+\cdots+\left(a_nb_n\right)^2\right]\cdot\left[\frac{1}{b_1^{\ 2}}+\frac{1}{b_2^{\ 2}}+\cdots+\frac{1}{b_n^{\ 2}}\right]}$$

【例8】

证明$\left(ab+cd\right)^2\leqslant\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)$.

【例9】

若实数x，y，z满足$3x+4y+5z=1$，求$3x^2+2y^2+5z^2$的最小值.

【例10】

已知a，b，c都是正数.求证：$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant 9$

【例11】

P为$\triangle ABC$内一点，点P到三边AB、BC、CA的距离分别为x、y、z，求当$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$取最小值时点$P$的位置.

笔记整理

课后作业

【演练1】

已知 x，y，z 为正数，求证：$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 3$.

【解析】证明：∵x，y，z 为正数，

$\therefore \frac{x}{y}+\frac{y}{z}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}}=2\sqrt{\frac{x}{z}}$,

$\therefore \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{z}}+\frac{z}{x}$

$=\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{x}{z}}+\frac{z}{x}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x}{z}}\cdot\sqrt{\frac{x}{z}}\cdot\frac{z}{x}}=3$

当且即当 $x=y=z=1$ 时取等号

∴原命题得证.

【演练2】

已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，求证：（$a+\frac{1}{a}$）（$b+\frac{1}{b}$）$\geq\frac{25}{4}$.

【解析】因为已知 $a+b=1$，$a>0$，$b>0$，

∴根据基本不等式 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$，

$\therefore 0<ab\leq\frac{1}{4}$,

又$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{b^2+1}{b}=\frac{a^2b^2-2ab+2}{ab}=\frac{(1-ab)^2+1}{ab}\geq\frac{25}{4}$（取等号时 $a=b=\frac{1}{2}$）

$\therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq\frac{25}{4}$

即得$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq\frac{25}{4}$.

【演练3】

（1）已知 $a>0$，$b>0$，求证：$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$;

（2）已知 $a>1$，$b>1$，且 $a>b$，试比较$a+\frac{1}{a}$与$b+\frac{1}{b}$的大小.

【解析】（1）$a^2+b^2\geq 2ab\Rightarrow 2$（$a^2+b^2$）$\geq a^2+2ab+b^2\Rightarrow 2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{2}\geq(\frac{a+b}{2})^2$

由于 $a>0$，$b>0\Rightarrow a+b>0$，故$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$

（2）解：由于$a+\frac{1}{a}-(b+\frac{1}{b})=(a-b)+(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$

$=(a-b)+\frac{b-a}{ab}=(a-b)(1-\frac{1}{ab})=(a-b)\cdot\frac{ab-1}{ab}$,

因为 $a>1$，$b>1\Rightarrow ab>1\Rightarrow ab-1>0$ 且 $ab>0$，又 $a>b\Rightarrow a-b>0$，

所以$(a-b)\cdot\frac{ab-1}{ab}>0$.

故$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$

【演练4】
设正数 x，y，z，

（1）满足 $x+y+z=1$，求证：$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geq 36$；

（2）若 $x+y=1$，求$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})$的最小值.

【解析】（1）证明：（利用柯西不等式）

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z})(x+y+z)\geq(1+2+3)^2=36$$

（2）解：$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})=xy+\frac{1}{xy}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=xy+\frac{2}{xy}-2$

$\because x+y=1$，$\therefore 0<xy\leq\frac{1}{4}$,

$\because t=xy+\frac{2}{xy}$在（0，$\frac{1}{4}$]上单调递减，

$\therefore(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})$的最小值为$\frac{1}{4}+8-2=\frac{25}{4}$.

【演练5】
已知实数 x，y，z 满足 $3x+2y+z=1$，求 $x^2+2y^2+3z^2$ 的最小值.

【解析】由柯西不等式，
$[(x)^2+(\sqrt{2}y)^2+(\sqrt{3}z)^2]\cdot[3^2+(\sqrt{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2]\geq(3x+2y+z)^2=1$,

所以$x^2+2y^2+3z^2\geq\frac{3}{34}$,

当且仅当$\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}z}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$，即$x=\frac{9}{34}$，$y=\frac{3}{34}$，$z=\frac{1}{34}$时，等号成立，

所以 $x^2+2y^2+3z^2$ 的最小值为$\frac{3}{34}$.

【演练6】
设 x，y，z 为正数，且 $xyz=1$，求证：$1<\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}<2$.（提示：换元 $x=\frac{a}{b}$，$y=\frac{b}{c}$，$z=\frac{c}{a}$）

【解析】证明：由 x，y，z 为正数，且 $xyz=1$，

可设 $x=\frac{a}{b}$，$y=\frac{b}{c}$，$z=\frac{c}{a}$，

则$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$，

又$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}=2$，

即有 $1<\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}<2$.