# 讲义说明

由于时间仓促和编者水平有限，编写中难免出现错误或不当之处，希望家长及同学们能直言不讳地给我们提出宝贵的意见，以便今后修订升级．若有发现，非常期待家长和同学们将修改意见发送至顺为教育教研部邮箱(*jiaoyan@shunweijiaoyu．com*)！我们会定期评选出突出贡献者，并给予丰厚的奖励！

# 目录

# 第1讲　一次函数与反比例函数综合

## 知识集锦

**面积综合**

1、一条直线和坐标轴围成的三角形面积：如图1，求出直线与两条坐标轴的交点坐标，然后求面积.

2、两条直线和坐标轴围成的三角形面积：如图2，求出两条直线的交点坐标，以及两条直线与 $x$ 轴或 $y$ 轴的交点坐标，然后求面积.

3、三条直线围成的三角形面积：如图3，求出三条直线两两相交的交点坐标，然后用铅垂法求三角形的面积，即 $S=\frac{1}{2}\cdot$水平宽$\cdot$铅垂高.

4、不规则图形的面积：对于平面直角坐标系下的任意图形的面积，都可以采用割补法.

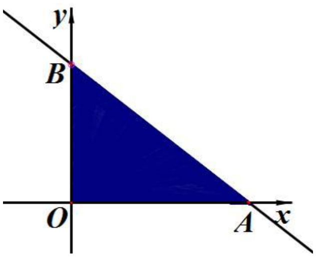



图1

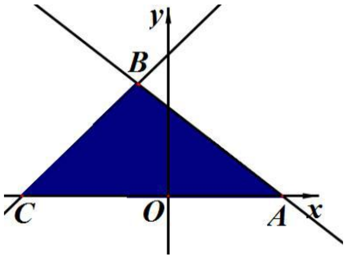



图2

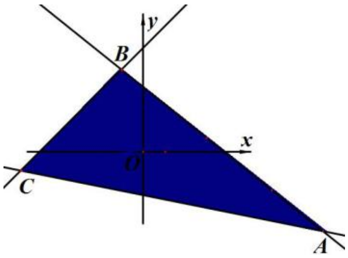



图3

# 模块一　面积综合

【例 1】（1）求以点 $A$（0，0），$B$（5，7），$C$（11，$-7$）为顶点的三角形的面积；

（2）求以点 $A$（$-2$，3），$B$（5，0），$C$（7，5）为顶点的三角形的面积；

（3）求以点 $A$（$-2$，1），$B$（5，3），$C$（7，$-5$）为顶点的三角形的面积.

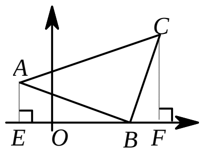
【解析】（1）由于 $BC$ 的中点是（8，0），刚好在 $x$ 轴上，故 $S_{\Delta ABC}=14\times 8\div 2=56$；（也可以通过证明全等用割补法求面积）；

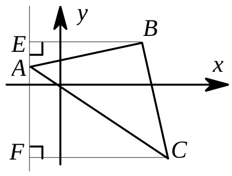
（2）如左图，$S_{\Delta ABC}=S_{梯形AEFC}-S_{\Delta AEB}-S_{\Delta CFB}$

$$=\frac{1}{2}\times(3+5)\times 9-\frac{1}{2}\times 7\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times 5=\frac{41}{2};$$

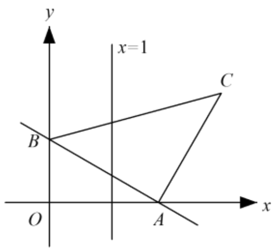
（3）如右图，$S_{\Delta ABC}=S_{梯形BCFE}-S_{\Delta ABE}-S_{\Delta ACF}$

$$=\frac{1}{2}\times(7+9)\times 8-\frac{1}{2}\times 2\times 7-\frac{1}{2}\times 6\times 9=30.$$




【例 2】如图，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于 $A$、$B$ 两点，以线段 $AB$ 为直角边在第一象限内作等腰直角 $\triangle ABC$，$\angle BAC=90^\circ$．点 $P$（1，$a$）为坐标系中的一个动点，当 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABP$ 的面积相等时，求实数 $a$ 的值.




【解析】将 $x=0$ 代入 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 中，得 $y=1$，故 $B$ 点的坐标为（0，1），

将 $y=0$ 代入 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 中，得 $x=\sqrt{3}$，故 $A$ 点的坐标为（$\sqrt{3}$，0).

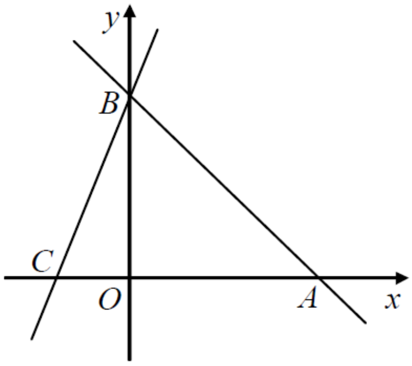
$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2$，

又 $\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB^2=2$．

由题知，点 $P$ 是直线 $x=1$ 上的动点，而直线 $x=1$ 与 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 交于点（1，$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$），由铅垂法可知 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}OA\cdot|a-\frac{3-\sqrt{3}}{3}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|a-\frac{3-\sqrt{3}}{3}|$，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}|a-\frac{3-\sqrt{3}}{3}|=2$，解得 $a=1+\sqrt{3}$ 或 $a=1-\frac{5}{3}\sqrt{3}$．

【例 3】如图，直线 $AB$：$y=-x+6$ 分别与 $x$、$y$ 轴交于 $A$、$B$ 两点，直线 $BC$：$y=3x+6$ 与 $x$ 轴交于 $C$ 点，若直线 $EF$：$y=\frac{1}{2}x-k$（$k\neq 0$）交 $AB$ 于 $E$，交 $BC$ 于 $F$，交 $x$ 轴于 $D$，是否存在这样的直线 $EF$，使得 $S_{\triangle EBD}=S_{\triangle FBD}$？若存在，求出 $k$ 的值；若不存在，说明理由.




【解析】存在，$k=\frac{3}{7}$，求解如下：

∵ $D$、$E$、$F$ 三点共线，且 $S_{\triangle EBD}=S_{\triangle FBD}$，

∴ $D$ 为 $EF$ 的中点，∴ $y_D=\frac{y_E+y_F}{2}=0$，

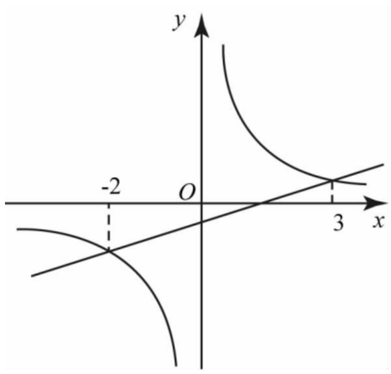
联立直线 $AB$、$EF$ 解得 $y_E=\frac{6-2k}{3}$，联立直线 $BC$、$EF$ 解得 $y_F=-\frac{6+6k}{5}$，

∴ $y_E+y_F=\frac{6-2k}{3}-\frac{6+6k}{5}=0$，解得 $k=\frac{3}{7}$，此时直线 $EF$：$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{7}$.

## 模块二　一次函数与反比例函数综合

【例 4】（1）已知一次函数 $y=x+m$ 与反比例函数 $y=\frac{m+1}{x}$（$m\neq -1$）的图象在第一象限内的交点为 $P$（$x_0$，3），则 $x_0=$________，$m=$________.

（2）如图 1 是一次函数 $y_1=kx+b$ 的反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$ 的图象，观察图象写出 $y_1>y_2$ 时，$x$ 的取值范围为________.



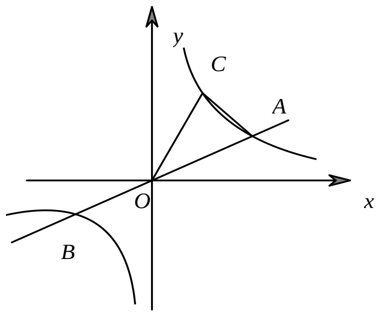
【解析】（1）1，2．（2）$-2<x<0$ 或 $x>3$．

【例 5】如图，已知直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）交于 $A$、$B$ 两点，且 $A$ 点的横坐标为 4．

（1）求 $k$ 的值；

（2）若双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）上一点 $C$ 的纵坐标为 8，求△$AOC$ 的面积；

（3）过原点 $O$ 的另一条直线 $l$ 交双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）于 $P$、$Q$ 两点（$P$ 点在第一象限），若由点 $A$、$B$、$P$、$Q$ 为顶点组成的四边形面积为 24，求 $P$ 点的坐标．




【解析】（1）易知 $A$ 点的坐标为（4，2），故 $k=8$．

（2）如图 1，易知 $C$ 点的坐标为（1，8），

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}(y_A+y_C)(x_A-x_C)=\frac{1}{2}(2+8)(4-1)=15$．

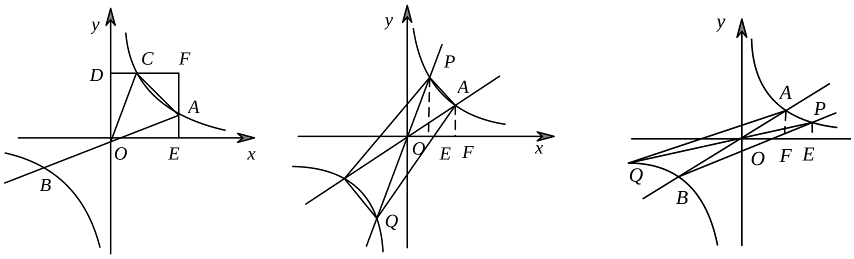



图 1　　　　图 2　　　　图 3

（3）∵反比例函数图象关于原点 $O$ 中心对称，∴ $OP=OQ$，$OA=OB$，

∴四边形 $APBQ$ 是平行四边形，$S_{\triangle AOP}=\frac{1}{4}S_{平行四边形APBQ}=\frac{1}{4}\times 24=6$．

设点 $P$ 的坐标为（$m$，$\frac{8}{m}$）（$m>0$ 且 $m\neq 4$），

过点 $P$、$A$ 分别做 $x$ 轴的垂线，垂足为 $E$、$F$，易知 $S_{\triangle POE}=S_{\triangle AOF}=4$．

①若 $0<m<4$，如图 2，则 $S_{\triangle POE}+S_{梯形PEFA}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle AOP}$，

$\therefore S_{梯形PEFA}=S_{\triangle AOP}=6$，即 $\frac{1}{2}(2+\frac{8}{m})(4-m)=6$，解得 $m=2$ 或 $m=-8$（舍）；

②若 $m>4$，如图 3，则 $S_{\triangle AOF}+S_{梯形PEFA}=S_{\triangle POE}+S_{\triangle AOP}$，

$\therefore S_{梯形PEFA}=S_{\triangle AOP}=6$，即 $\frac{1}{2}(\frac{8}{m}+2)(m-4)=6$，解得 $m=8$ 或 $m=-2$（舍）．

综上所述，$P$ 点的坐标为（2，4）或（8，1）．

【例 6】已知直线 $y=-x+m+n$ 与双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 交于点 $A$（$m$，$n$）（$m\geq 2$）和点 $B$ 两个不同的点，直线 $y=-x+m+n$ 与 $y$ 轴交于点 $C$，求 $\triangle OBC$ 的面积 $S$ 的取值范围.

【解析】由题易知 $C$ 点的坐标为（0，$m+n$），$D$ 点的坐标为（$m+n$，0），

由对称性可知 $B$（$n$，$m$）（也可以联立 $y=-x+m+n$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 解得）.

$\because A$（$m$，$n$）、$B$（$n$，$m$）在双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上，$\therefore mn=1$，即 $n=\frac{1}{m}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}OC\cdot x_B=\frac{1}{2}(m+n)n=\frac{1}{2}(m+\frac{1}{m})\cdot\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2m^2}$，

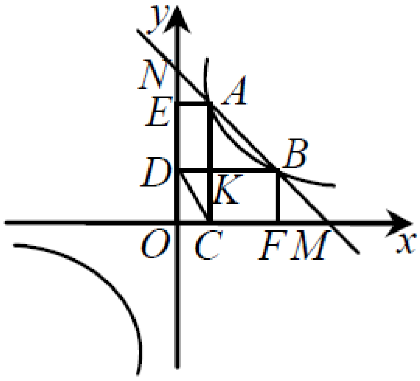
$\because m\geq 2$，$\therefore 0<\frac{1}{m^2}\leq\frac{1}{4}$，$\therefore \frac{1}{2}<S\leq\frac{5}{8}$.

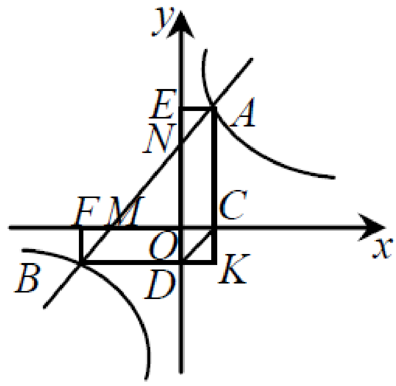
【例 7】一次函数 $y=ax+b$ 的图象分别与 $x$ 轴、$y$ 轴交于点 $M$ 、$N$ ，与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交于点 $A$ 、$B$ ，过点 $A$ 分别作 $AC\perp x$ 轴于点 $C$ ， $AE\perp y$ 轴于点 $E$ ；过点 $B$ 分别作 $BF\perp x$ 轴于点 $F$ ， $BD\perp y$ 轴于点 $D$ ． $AC$ 与 $BD$ 交于点 $K$ ，连接 $CD$ .

（1）若点 $A$ 、$B$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象的同一分支上，如图 1.

证明： $AN=BM=CD$ ， $AB\parallel CD$ .

（2）若点 $A$ 、$B$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象的不同分支上，如图 2，那么第（1）问中的结论还成立吗？试证明之.




【解析】（1）连接 $AD$ 、$BC$ .

$\because S_{矩形ACOE}=S_{矩形BDOF}=k$ ， $\therefore S_{矩形AKDE}=S_{矩形BKCF}$ ， $\therefore S_{\triangle AKD}=S_{\triangle BKC}$ ，

$\therefore S_{\triangle ADC}=S_{\triangle BDC}$ ， $\therefore AB\parallel CD$ ,

又 $\because AC\parallel y$ 轴，$\therefore$ 四边形 $ACDN$ 是平行四边形， $\therefore AN=CD$ ,

同理 $BM=CD$ ， $\therefore AN=BM=CD$ .

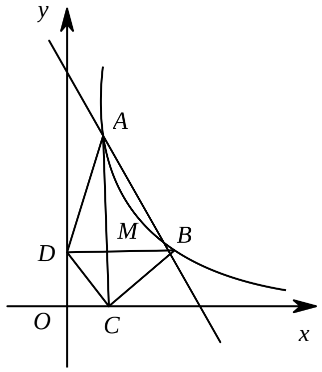
（2）仍然成立，证明略.

【例 8】（七中育才月考）在平面直角坐标系中，函数 $y=\dfrac{m}{x}$（$x>0$，$m$ 是常数）的图象经过点 $A(1,4)$，点 $B(a,b)$，其中 $a>1$，过点 $A$ 作 $x$ 轴的垂线，垂足为 $C$，过点 $B$ 作 $y$ 轴的垂线，垂足为 $D$，$AC$ 与 $BD$ 相交于点 $M$，连接 $AD$，$DC$，$CB$ 与 $AB$.

（1）求 $m$ 的值；

（2）求证：$DC//AB$；

（3）当 $AD=BC$ 时，求直线 $AB$ 的函数解析式.

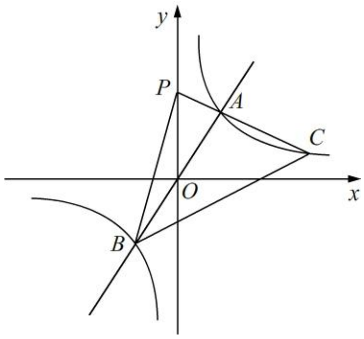


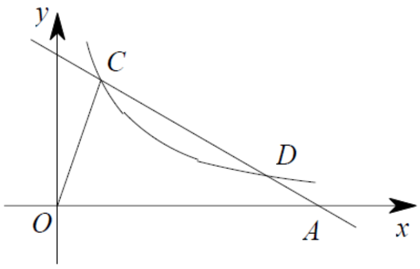

【解析】（1）$m=4$；

（2）略；

（3）当四边形 $ABCD$ 为平行四边形或为等腰梯形时，对应的直线 $AB$ 的解的式为 $y=-2x+6$ 或 $y=-x+5$.

【例 9】（1）如图 1，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $y=\frac{3}{2}x$ 与双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 相交于 $A$、$B$ 两点，$C$ 是第一象限内双曲线上一点，连接 $CA$ 并延长交 $y$ 轴于点 $P$，连接 $BP$、$BC$．若△$PBC$ 的面积是 20，则点 $C$ 的坐标为________.




（2）如图 2，双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 在第一象限的一支上有一点 $C$（1，5），经过点 $C$ 的直线与 $x$ 轴交于点 $A$，与双曲线在第一象限交于另一点 $D$，若点 $D$ 的横坐标为 9，则△$COA$ 的面积为　　　　.

【解析】（1）由题易知 $A$ 点的坐标为（2，3），$B$ 点的坐标为（$-2$，$-3$）.

延长 $PC$ 交 $x$ 轴于点 $D$，由例 6 知 $CD=PA$，$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle PBC}=20$，

又$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}OD(y_A-y_B)=3OD$，$\therefore OD=\frac{20}{3}$，$D$ 点的坐标为（$\frac{20}{3}$，0），

$\therefore x_C=x_D+x_P-x_A=\frac{14}{3}$，$\therefore C$ 点的坐标为（$\frac{14}{3}$，$\frac{9}{7}$）.

（此题也可设出 $C$ 点的坐标，求出 $P$ 点的坐标和△$PBC$ 的面积而得解.）

（2）由例 6 知 $x_A=x_D+x_C=10$，$\therefore S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}OA\cdot y_C=\frac{1}{2}\times10\times5=25$.

（此题也可求出 $D$ 点的坐标，求出直线 $CD$ 的解析式和 $A$ 点的坐标而得解.）

【例 10】已知对任意满足 $0 \le x \le 1$ 的 $x$，都有 $|ax^2+x| \le 1$ 成立，试求 $a$ 的取值范围.

【解析】法一：

当 $x=0$ 时，不等式恒成立；

当 $x \ne 0$ 时，原不等式化为 $|ax+1| \le \dfrac{1}{x}$，画出函数 $y=|ax+1|$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象.

（1）当 $a<-2$ 时，如图 1，两函数图象的交点在 $x=1$ 左侧，不符合题意；

（2）当 $-2 \le a \le 0$ 时，如图 2、3、4，符合题意；

（3）当 $a>0$ 时，如图 5，$y=\dfrac{1}{x}$ 的图象不恒在 $y=|ax+1|$ 上方，不符合题意.

综上所述，$a$ 的取值范围为 $-2 \le a \le 0$.

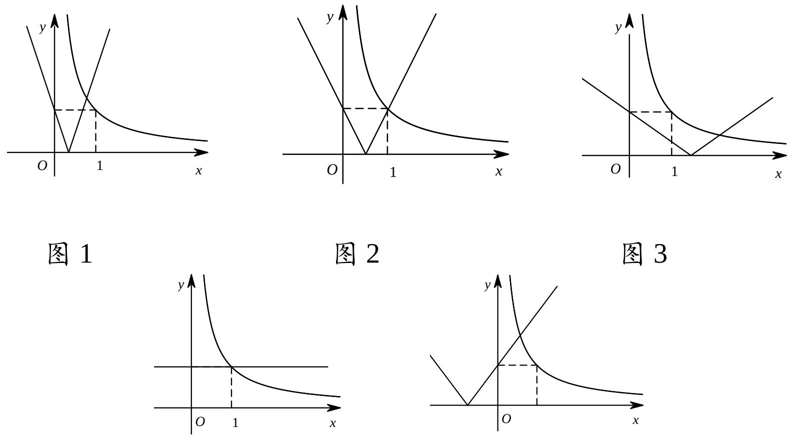



图 1　　图 2　　图 3

图 4　　图 5

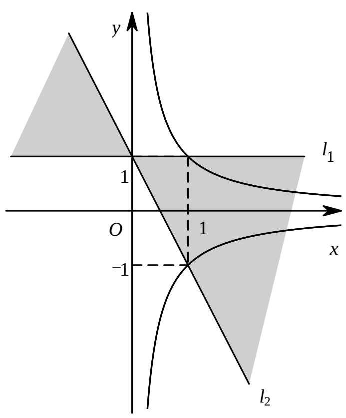
法二：

当 $x=0$ 时，不等式显然成立；

当 $x \ne 0$ 时，原不等式可化为 $|ax+1| \le \dfrac{1}{x}$，即 $-\dfrac{1}{x} \le ax+1 \le \dfrac{1}{x}$，画出函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=-\dfrac{1}{x}$ 的图象，可知函数 $y=ax+1$ 的图象当 $0 \le x \le 1$ 时，在上述两个反比例函数图象之间.

观察图象可知，$l_1$ 与 $l_2$ 是两个极限位置.

容易求得 $l_1$：$y=1$，$l_2$：$y=-2x+1$，故 $a$ 的取值范围为 $-2 \le a \le 0$.



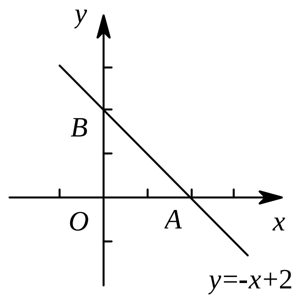
# 笔记整理

# 课后作业

1. 直线 $y=-x+2$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于点 $A$ 和点 $B$，另一条直线 $y=kx+b$（$k\neq0$）过点 $C$（1，0），且把 $\triangle AOB$ 分成两部分.

（1）若 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积相等，求 $k$ 和 $b$ 的值；

（2）若 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积之比为 $1:5$，求 $k$ 和 $b$ 的值.




**【解析】**（1）∵ $A$（2，0），$C$（1，0），

∴ $OA=2$，$OC=1$，$C$ 为 $OA$ 的中点，

∴直线 $y=kx+b$ 必过点 $B$，

将 $B$（0，2）和 $C$（1，0）代入 $y=kx+b$，解得 $k=-2$，$b=2$.

（2）由题意可知，本题有两种情形：

过点 $C$ 作直线 $l_1$ 交 $AB$ 于点 $P_1$，或作直线 $l_2$ 交 $y$ 轴于点 $P_2$.

∵ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，∴ $S_{\triangle ACP_1}=S_{\triangle COP_2}=\frac{1}{6}S_{\triangle AOB}=\frac{1}{3}$，

又∵ $OC=AC=1$，∴点 $P_1$、$P_2$ 的纵坐标都为 $\frac{2}{3}$，

容易求得 $P_1$（$\frac{4}{3}$，$\frac{2}{3}$），$P_2$（0，$\frac{2}{3}$）.

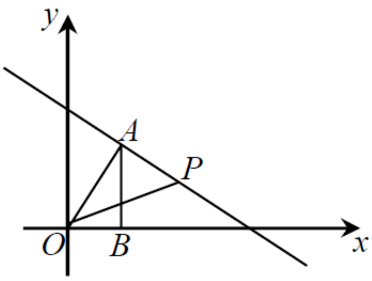
将 $P_1$（$\frac{4}{3}$，$\frac{2}{3}$）和 $C$（1，0）代入 $y=k_1x+b_1$，解得 $k_1=2$，$b=-2$；

将 $P_2$（0，$\frac{2}{3}$）和 $C$（1，0）代入 $y=k_2x+b_2$，解得 $k_2=-\frac{2}{3}$，$b_1=\frac{2}{3}$.

2. 如图，已知一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 的图象经过点 $A$（2，3），$AB\perp x$ 轴于 $B$，连接 $OA$.

（1）直线 $y=\frac{1}{4}x+1$ 与直线 $OA$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 分别交于点 $C$、$D$，求 $\triangle ACD$ 的面积；

（2）若 $P$ 为直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 在第一象限上的一点，$OP$ 平分 $\triangle AOB$ 的面积，求点 $P$ 的坐标.




【解析】（1）由题知，直线 $OA$ 的解析式为 $y=\frac{3}{2}x$，

将 $A$（2，3）代入 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 得 $3=-\frac{1}{2}\times2+b$，解得 $b=4$，

∴直线 $AD$ 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$，

联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x+1\\y=\frac{3}{2}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{4}{5}\\y=\frac{6}{5}\end{cases}$，故 $C$ 点的坐标为（$\frac{4}{5}$，$\frac{6}{5}$），

联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x+1\\y=-\frac{1}{2}x+4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$，故 $D$ 点的坐标为（4，2），

设直线 $CD$ 与 $AB$ 的交点为 $M$，可求得 $M$ 点的坐标为（2，$\frac{3}{2}$），

由铅垂法可得 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AM\cdot|x_D-x_C|=\frac{1}{2}(3-\frac{3}{2})(4-\frac{4}{5})=\frac{12}{5}$.

（2）∵ $OP$ 平分△$AOB$ 的面积，∴ $OP$ 过 $AB$ 的中点（2，$\frac{3}{2}$），

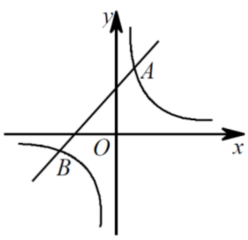
∴直线 $OP$ 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x$，

联立 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+4\\y=\frac{3}{4}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{16}{5}\\y=\frac{12}{5}\end{cases}$，故 $P$ 点的坐标为（$\frac{16}{5}$，$\frac{12}{5}$）.

3. 如图，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y=mx+b$ 的图象交于 $A$（1，3），$B$（$n$，$-1$）两点.

（1）求反比例函数与一次函数的解析式；

（2）据图象回答：当 $x$ 取何值时，反比例函数的值小于一次函数的值.



【解析】（1）将 $A$（1，3）代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中，解得 $k=3$，

∴反比例函数的解析式为 $y=\frac{3}{x}$．

将 $B$（$n$，$-1$）代入反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 中，解得 $n=-3$，

∴点 $B$ 的坐标为（$-3$，$-1$）．

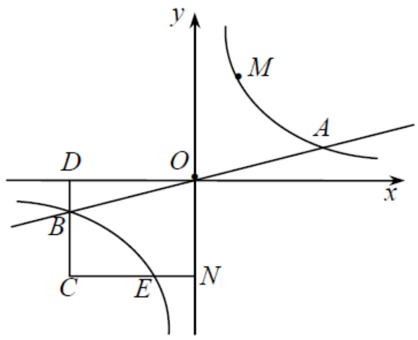
由待定系数法解得一次函数的解析式为 $y=x+2$．

（2）由图象知，当 $-3<x<0$ 或 $x>1$ 时，反比例函数的值小于一次函数的值．

4. 如图，已知双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$ 相交于 $A$、$B$ 两点．第一象限上的点 $M$（$m$，$n$）（在 $A$ 点左侧）是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的动点．过点 $B$ 作 $BD\perp x$ 轴于点 $D$，过点 $N$（0，$-n$）作 $NC\perp y$ 轴交双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 于点 $E$，交 $BD$ 所在直线于点 $C$．

（1）若点 $D$ 坐标是（$-8$，0），求 $A$、$B$ 两点的坐标及 $k$ 的值．

（2）若 $B$ 是 $CD$ 的中点，四边形 $OBCE$ 的面积为 4，求直线 $CM$ 的解析式．




【解析】（1）∵ $D$ 点的坐标为（$-8$，0），∴ $B$ 点的横坐标为 $-8$，

将其代入直线 $y=\frac{1}{4}x$ 中，解得 $y=-2$，∴ $B$ 点的坐标为（$-8$，$-2$），

∵ $A$、$B$ 两点关于原点对称，∴ $A$ 点的坐标为（8，2），∴ $k=8\times 2=16$．

（2）∵ $N$ 点的坐标为（0，$-n$），$B$ 是 $CD$ 的中点，

∴ $y_C=y_E=y_N=-n$，$y_B=\frac{y_c}{2}=-\frac{n}{2}$，

将 $y_E=-n$ 代入双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 中，解得 $x_E=-\frac{k}{n}$，

将 $y_B=-\frac{n}{2}$ 代入直线 $y=\frac{1}{4}x$ 中，解得 $x_B=-2n$，

∴ $S_{\text{四边形}OBCE}=S_{\text{矩形}ODCN}-S_{\triangle OBD}-S_{\triangle OEN}=2n\cdot n-\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{k}{n}=\frac{3n^2-k}{2}=4$，

又 $x_By_B=-2n\cdot(-\frac{n}{2})=n^2=k$，解得 $k=4$，$n=2$，双曲线的解析式为 $y=\frac{4}{x}$，

∴ $C$ 点的坐标为（$-4$，$-2$），$M$ 点的坐标为（2，2），

设直线$CM$的解析式为$y=ax+b$，将$C$、$M$两点的坐标代入，

得$\begin{cases}-2=-4a+b\\2=2a+b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\b=\dfrac{2}{3}\end{cases}$，$\therefore$直线$CM$的解析式为$y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$．

# 第2讲　比例线段及相似基础

## 知识集锦

**一、比例的性质：**

1．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc,$这一性质称为比例的基本性质，由它可推出许多比例形式；

2．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$（反比定理）；

3．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$（或$\dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}$）（更比定理）；

4．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$（合比定理）；

5．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$（分比定理）；

6．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$（合分比定理）；

7．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\cdots=\dfrac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)\Leftrightarrow\dfrac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\dfrac{a}{b}$（等比定理）.

以上比例关系均在其有意义的前提下成立.

**二、成比例线段**

1．比例线段

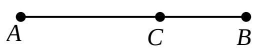
对于四条线段$a$，$b$，$c$，$d$，如果其中两条线段的比（即它们的长度比）与另两条线段的比相等，如$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$（即$a:b=c:d$），那么这四条线段$a$，$b$，$c$，$d$叫做成比例线段，简称比例线段.

2．比例的项

在比例式$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$（$a:b=c:d$）中，$a$，$d$称为比例外项，$b$，$c$称为比例内项，$d$叫做$a$，$b$，$c$的第四比例项.

三条线段$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$（$a:b=b:c$）中，$b$叫做$a$和$c$的比例中项.

3．黄金分割




如图，若线段$AB$上一点$C$把线段$AB$分成两条线段$AC$和$BC$（$AC>BC$），且使$AC$是$AB$

和 $BC$ 的比例中项（即 $AC^2=AB\cdot BC$）则称线段 $AB$ 被点 $C$ 黄金分割，点 $C$ 叫线段 $AB$ 的黄金分割点，其中 $AC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB\approx0.618AB$，$BC=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}AB\approx0.382AB$，$AC$ 与 $AB$ 的比叫做黄金比．

**三、平行线分线段成比例定理**

1．定理

三条平行线截两条直线，截得的对应线段成比例．

2．推论：

平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例．

3．推论的逆定理

如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

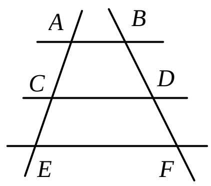
4．三角形一边的平行线性质

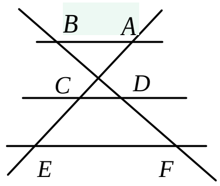
平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例．

如图，$AB\parallel CD\parallel EF$，则 $\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{BD}{DF}$，$\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{DF}{BD}$，$\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BD}{BF}$，$\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{DF}{BF}$．

若将 $AC$ 称为上，$CE$ 称为下，$AE$ 称为全，

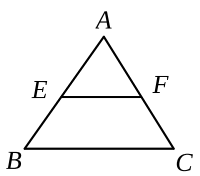
上述比例式可以形象地表示为 $\dfrac{上}{下}=\dfrac{上}{下}$，$\dfrac{下}{上}=\dfrac{下}{上}$，$\dfrac{上}{全}=\dfrac{上}{全}$，$\dfrac{下}{全}=\dfrac{下}{全}$．

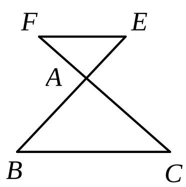



当三条平行线退化成两条的情形时，就成了“$A$”字型，“$X$”字型．

则有 $BC\parallel EF\Leftrightarrow\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{FC}$，$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{EF}{BC}$．




**四、相似的有关概念**

1．相似形

具有相同形状的图形叫做相似形．相似形仅是形状相同，大小不一定相同．相似图形之间的互相变换称为相似变换．

2．相似图形的特性

两个相似图形的对应边成比例，对应角相等．

3．相似比

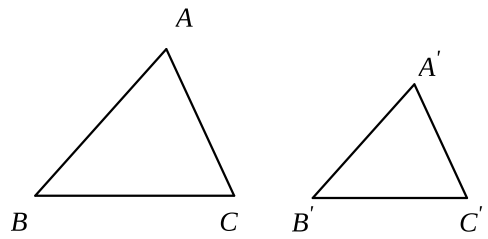
对应边的比例叫做相似比.

**五、相似三角形的概念**

1．相似三角形的定义

对应角相等，对应边成比例的三角形叫做相似三角形.

如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，记作 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，符号 $\backsim$ 读作“相似于”.




2．相似比

相似三角形对应边的比叫做相似比．全等三角形的相似比是 1．“全等三角形”一定是“相似形”，“相似形”不一定是“全等形”.

**六、相似三角形的性质**

1．相似三角形的对应角相等

2．相似三角形的对应边成比例

3．相似三角形的对应边上的中线，高线和对应角的平分线成比例，都等于相似比.

4．相似三角形周长的比等于相似比.

5．相似三角形面积的比等于相似比的平方.

**七、相似三角形的判定**

1. 如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似．可简单说成：两角对应相等，两个三角形相似.

2．如果一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似.

3．如果一个三角形的三条边与另一个三角形的边对应成比例，那么这两个三角形相似．可简单地说成：三边对应成比例，两个三角形相似.

4．直角三角形相似的判定：

①一对锐角相等；（常用）

②两条直角边对应成比例；

③斜边与一直角边对应成比例.

# 模块一　比例性质及平行线分线段成比例定理

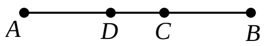
【例1】

（1）设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{1}{4}$，则$\frac{a+c-e}{b+d-f}=$________________.

（2）已知：$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$．则$\frac{x-y+3z}{3x-y}=$________________.

（3）已知：$\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，则$k=$________________.

（4）如图所示，乐器上的一根弦$AB=80\,cm$，两个端点$A$，$B$固定在乐器面板上，支撑点$C$是靠近点$B$的黄金分割点（即$AC$是$AB$与$BC$的比例中项），支撑点$D$是靠近点$A$的黄金分割点，则$AC=$__________$cm$，$DC=$________$cm$.




【解析】

（1）由$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{1}{4}$及比例的性质可知：$\frac{a+c-e}{b+d-f}=\frac{1}{4}$.

（2）设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k\Rightarrow x=2k,y=3k,z=4k$，代入$\frac{x-y+3z}{3x-y}$中得原式$=\frac{11}{3}$.

（3）当$a+b+c\neq 0$时，由等比性质得$k=\frac{b+c+a+c+a+b}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$；

当$a+b+c=0$时，$b+c=-a$，则$k=\frac{b+c}{a}=\frac{-a}{a}=-1$，综上所述，$k$的值为2或$-1$.

（4）点$C$是靠近点$B$的黄金分割点，

∴$AC:AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，即$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot 80=40\sqrt{5}-40$，

又点$D$是靠近点$A$的黄金分割点，

∴$BD=40\sqrt{5}-40$ ∴$DC=AC+BD-AB=80\sqrt{5}-80-80=80\sqrt{5}-160$.

【例2】已知$\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b-c}{c}$，求$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$的值.

【解析】

当$a+b+c\neq 0$时，

$$\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b-c}{c}=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}{a+b+c}=1$$

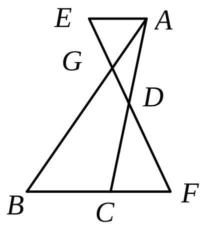
于是：$b+c=2a,\ a+c=2b,\ a+b=2c$．$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}=8$.

当$a+b+c=0$时，$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}=\frac{(-c)\cdot(-a)\cdot(-b)}{abc}=-1$.

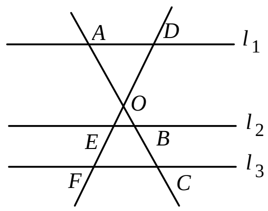
于是本题的解为$-1$或8.

【例3】

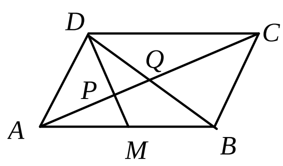
（1）如图，已知点 $D$ 为$\triangle ABC$ 中 $AC$ 边的中点， $AE\parallel BC$ ，$ED$ 交 $AB$ 于点 $G$，交 $BC$ 的延长线于点 $F$，若 $\frac{BG}{GA}=\frac{3}{1}$， $BC=8$，则 $AE$ 的长为__________.




（2）如图， $l_1\parallel l_2\parallel l_3$， $AO=4$， $DE=8$， $OC=6$， $DF=12$，则 $OD=$_______， $OB=$_______.




（3）如图，已知在平行四边形 $ABCD$ 中， $M$ 为 $AB$ 的中点， $DM$， $DB$ 分别交 $AC$ 于 $P$， $Q$ 两点，则 $AP:PQ:QC=$___________.




【解析】

（1）4；

（2）$\because$ $l_1\parallel l_3$，$\therefore$ $\frac{AO}{AC}=\frac{OD}{DF}$.

$\because$ $AO=4$， $OC=6$， $DF=12$，$\therefore$ $AC=AO+OC=10$，$\therefore$ $\frac{4}{10}=\frac{OD}{12}$，

$\therefore OD=\frac{24}{5}$，$\because$ $DE=8$，$\therefore OE=DE-OD=8-\frac{24}{5}=\frac{16}{5}$，

$\because$ $l_1\parallel l_2$，$\therefore$ $\frac{AO}{OB}=\frac{OD}{OE}$，$\therefore$ $\frac{4}{OB}=\frac{\frac{24}{5}}{\frac{16}{5}}$，$\therefore OB=\frac{8}{3}$；

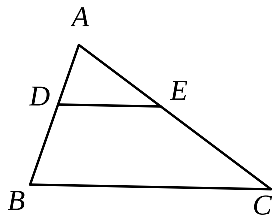
（3）2：1：3.

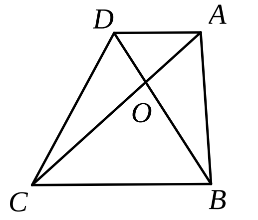
# 模块二　相似的性质及判定

**【例4】**

（1）如左图，$DE\parallel BC$，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，若 $DB=AE$，$AB=5$，$AC=10$，求 $AE$ 的长.

（2）如右图，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\triangle ADO\backsim\triangle BCO$，两条对角线 $AC$、$BD$ 相交于 $O$，若 $S_{\triangle AOD}:S_{\triangle COB}=1:9$，那么 $S_{\triangle BOC}:S_{\triangle DOC}=$________.




**【解析】**

（1）$\because DE\parallel BC\Rightarrow\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

$AB=5$，$AC=10$，$BD=AE$，

$\therefore\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{DB}{EC}=\dfrac{AE}{AC-AE}=\dfrac{AE}{10-AE}$

$\therefore\dfrac{AE}{10-AE}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow AE=\dfrac{10}{3}$

（2）$3:1$.

**【例5】**

（1）如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$D$、$E$ 分别为 $AB$、$AC$ 边上的点，且 $\angle AED=\angle B$，$AD=3$，$AC=6$，$DB=5$，则 $AE$ 的长度为________.

（2）如图 2，点 $P$ 是锐角 $\triangle ABC$ 中 $AB$ 边上的一点（$A$、$B$ 两点除外），过点 $P$ 作直线截 $\triangle ABC$ 所得三角形与原三角形相似，满足这样条件的直线最多有______条.

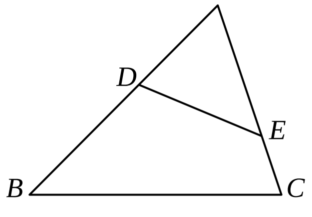



图1

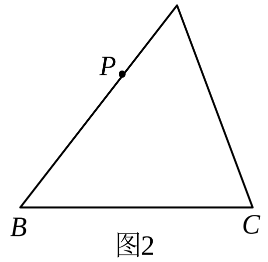



图2

（3）如图 3，正方形 $ABCD$ 的边长为 $2$，$AE=BE$，$MN=1$，线段 $MN$ 的两端点在 $CB$、$CD$ 上滑动，当 $CM=$________时，$\triangle AED$ 与以 $M$，$N$，$C$ 为顶点的三角形相似．

（4）如图 4，$\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，$\angle ACD=\angle B$，则图中共有______对相似三角形．

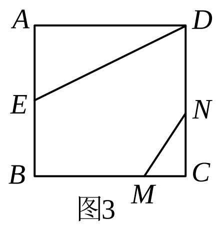


图3

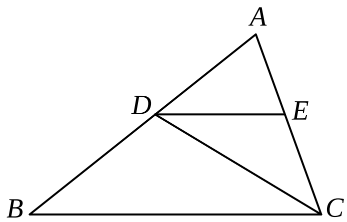
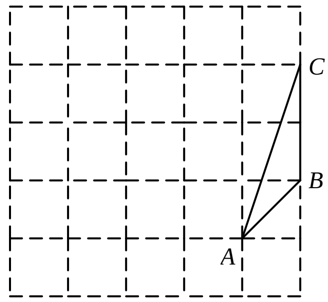


图4

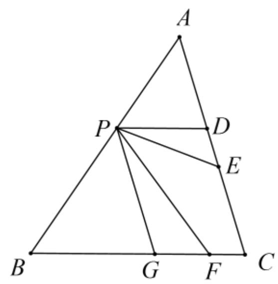
（5）如图 5，由边长为 1 的 25 个小正方形组成的正方形网格上有一个 $\triangle ABC$；在网格上画出一个与 $\triangle ABC$ 相似且面积最大的 $\triangle A_1B_1C_1$，使它的三个顶点都落在小正方形的顶点上，则 $\triangle A_1B_1C_1$ 的最大面积为__________．



【解析】

（1）$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，$AD\cdot AB=AE\cdot AC$，$6AE=3\times 8$，$AE=4$．

（2）如图所示可以最多做出 4 条，其中 $PD\parallel BC$，$PG\parallel AC$，$\angle PEA=\angle B$，$\angle PFB=\angle A$．



（3）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

（4）4 对；

共 $\angle A$ 的三个三角形 $\triangle ADE$，$\triangle ABC$，$\triangle ACD$ 之间两两相似，共 3 对；

$\because$ $\angle EDC=\angle DCB$，$\angle DBC=\angle ECD$，

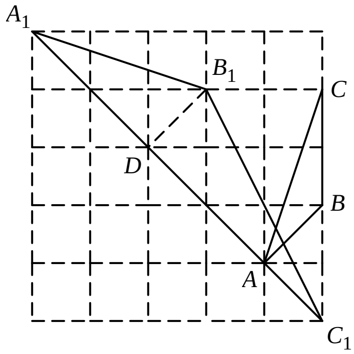
$\therefore$ $\triangle EDC$ 与 $\triangle DCB$ 相似．

综上，图中共有 4 对相似三角形．

（5）如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为面积最大的相似三角形．

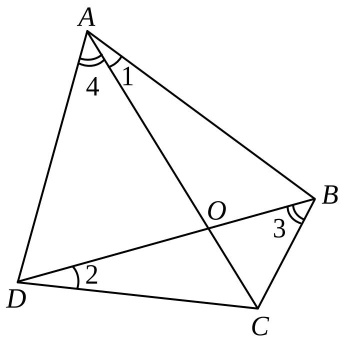
法一：$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}A_1C_1\cdot B_1D=\dfrac{1}{2}\times 5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=5$；

法二：$\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{A_1B_1}{AB}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}\right)^2=5$，而 $S_{\triangle ABC}=1$，$\therefore$ $S_{\triangle A_1B_1C_1}=5$．




【例6】

如图，四边形 $ABCD$ 中, $AC$ 与 $BD$ 交于点 $O$，若 $\angle 1=\angle 2$，求证： $\angle 3=\angle 4$ .




【解析】

$\because \angle 1=\angle 2$， $\angle AOB=\angle DOC$，

$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle DOC$

$\therefore \dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OB}{OC}$ $\therefore \dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OD}{OC}$

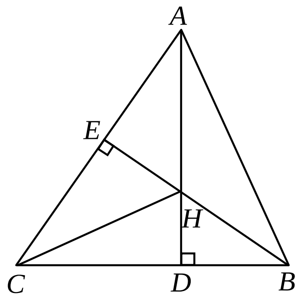
$\because \angle AOD=\angle BOC$，

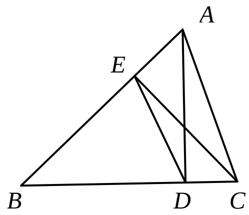
$\therefore \triangle AOD \backsim \triangle BOC$， $\therefore \angle 3=\angle 4$ .

【例7】

（1）如左图，三角形 $\triangle ABC$ 中， $AD$ 和 $BE$ 分别是三角形的两条高，两条高交于 $H$ .
求证： $CH \perp AB$ .

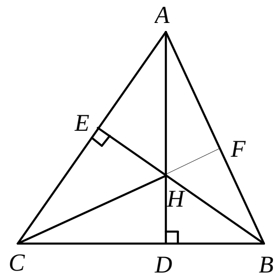
（2）如右图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于 $D$ ， $CE \perp AB$ 于 $E$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle BDE$ 面积的 4 倍， $AC=6$，求 $DE$ 的长.




【解析】

（1）延长 $CH$ 交 $AB$ 于 $F$ .∵ $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ ,




可以得到 $\angle EBC = 90° - \angle ACD = \angle CAD$ .

∴ $\triangle ACD \backsim \triangle BHD$ .

∴ $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{CD}{DH}$ .

又∵ $\angle ADC = \angle BDA = 90°$ .

∴ $\triangle ADB \backsim \triangle CDH$ .

则 $\angle AHF + \angle HAF = \angle CHD + \angle HCD = 90°$ ,

∴ $CH \perp AB$ .

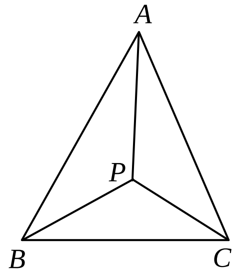
（2）∵ $AD \perp BC$ ， $CE \perp AB$ ， $\angle ABD = \angle CBE$ ， ∴ $\Delta ABD \backsim \Delta CBE$ ， ∴ $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BC}{AB}$

∵ $\angle EBD = \angle CBA$ ∴ $\Delta BED \backsim \Delta BCA$

∴ $\dfrac{DE}{AC} = \sqrt{\dfrac{S_{\Delta BED}}{S_{\Delta BCA}}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DE = \dfrac{1}{2}AC = 3$ .

【例8】

如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 60°$，点 $P$ 是 $\triangle ABC$ 内一点，使得 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$， $PA=8$，$PC=6$，则 $PB=$________.




【解析】

$\angle APB = \angle BPC = 120°$ ,

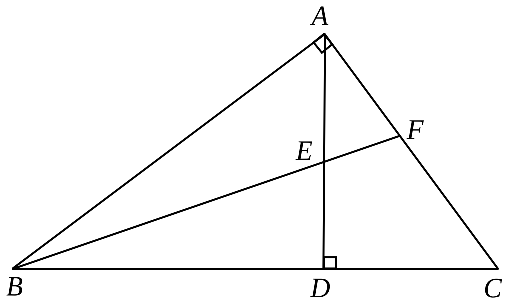
$\angle BAP = 60° - \angle ABP = \angle ABC = \angle ABP = \angle CBP$ ,

故 $\triangle ABP \backsim \triangle BCP$ ， $PB^2 = PA \cdot PC$ .

于是 $PB = 4\sqrt{3}$ .

【例9】

如图,在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AD\perp BC$ 于 $D$，$\angle B$ 的平分线分别与 $AD$、$AC$ 交于 $E$、$F$．求证：$BE\cdot EF=2AE\cdot DE$．




【解析】

∵ $\angle BAC=90^\circ$， $AD\perp BC$，∴ $\angle ADB=90^\circ$

∴ $\angle ABF+\angle AFB=90^\circ$， $\angle DBE+\angle BED=90^\circ$

∵ $BF$ 平分 $\angle ABC$，∴ $\angle ABF=\angle DBE$

∴ $\angle AFB=\angle BED$，∴ $\angle AFE=\angle AEF$，∴ $AE=AF$

解法一：过 $A$ 作 $AH\perp BF$ 于 $H$．

∴ $FH=EH=\dfrac{1}{2}EF$

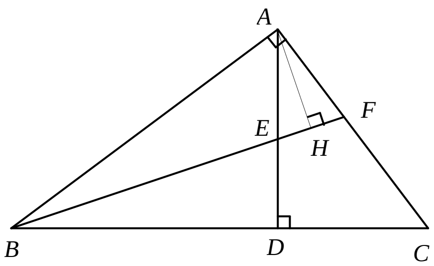
∴ $\angle AHE=90^\circ$

∴ $\angle ADB=\angle AHE$，$\angle AEH=\angle BED$

∴ $\triangle AHE\backsim\triangle BDE$，∴ $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{EH}{DE}$

∴ $AE\cdot DE=BE\cdot EH$，

∴ $BE\cdot EF=2AE\cdot DE$．




解法二：取 $BE$ 中点 $G$．∵ $AD\perp BC$

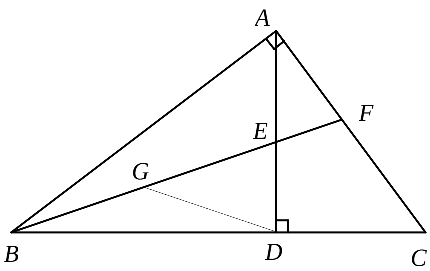
∴ $DG=GE=\dfrac{1}{2}BE$

∵ $\angle AEF=\angle DEG$ ∴ $\triangle AEF\backsim\triangle GED$

∴ $\dfrac{AE}{GE}=\dfrac{EF}{DE}$

∴ $AE\cdot DE=GE\cdot EF$

∴ $BE\cdot EF=2AE\cdot DE$．

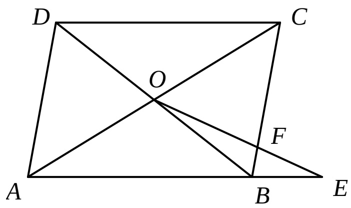


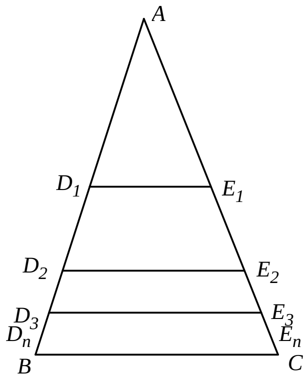
# 模块三 “A”字与“8”字模型

【例10】

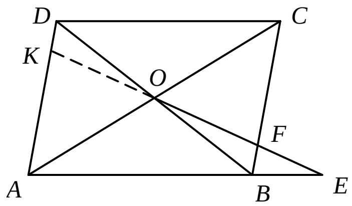
（1）如图，$\square ABCD$ 的对角线相交于点 $O$，在 $AB$ 的延长线上任取一点 $E$，连接 $OE$ 交 $BC$ 于点 $F$，若 $AB=a$，$AD=c$，$BE=b$，求 $BF$ 的值.

（2）如图，$\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$D_1$，$E_1$ 分别是 $AB$，$AC$ 的中点，$D_2$、$E_2$ 分别是 $D_1B$、$E_1C$ 的中点，$D_3$、$E_3$ 分别是 $D_2B$、$E_2C$ 的中点，…，$D_n$、$E_n$ 分别是 $D_{n-1}B$、$E_{n-1}C$ 的中点，则 $D_nE_n=$_________.




【解析】




（1）延长 $EO$，交 $AD$ 于点 $K$.

由 $AD\parallel BC\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{BF}{DK}=\dfrac{OB}{OD}=1\\ \dfrac{BF}{AK}=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{b}{a+b}\end{cases}$

又 $\dfrac{BF}{AK}=\dfrac{BF}{AD-DK}=\dfrac{BF}{c-BF}=\dfrac{b}{a+b}$，所以 $\dfrac{BF}{c}=\dfrac{b}{a+2b}\Rightarrow BF=\dfrac{bc}{a+2b}$.

（2）$D_nE_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}a$；容易知道 $BD_n=\dfrac{1}{2^n}AB$，

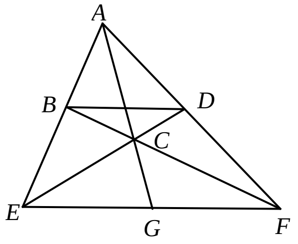
而 $\triangle AD_nE_n\sim\triangle ABC$，于是 $\dfrac{D_nE_n}{BC}=\dfrac{AD_n}{AB}=1-\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow D_nE_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}a$.

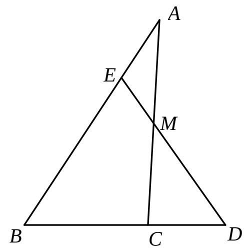
【例11】

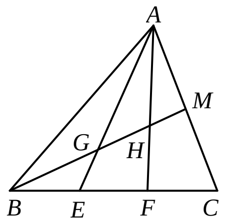
（1）已知，如图，四边形 $ABCD$，两组对边延长后交于 $E$ 、 $F$，对角线 $BD \parallel EF$， $AC$ 的延长线交 $EF$ 于 $G$．求证： $EG=GF$．

（2）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $M$ 是 $AC$ 的中点， $E$ 是 $AB$ 上一点，且 $AE=\frac{1}{4}AB$，连接 $EM$ 并延长，交 $BC$ 的延长线于 $D$，试求 $\frac{BC}{CD}$ 的值.

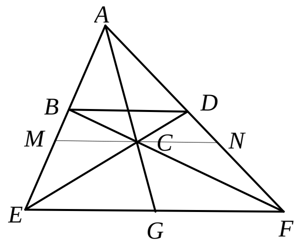
（3）在 $\triangle ABC$ 中，底边 $BC$ 上的两点 $E$ 、 $F$ 把 $BC$ 三等分， $BM$ 是 $AC$ 上的中线， $AE$ 、 $AF$ 分别交 $BM$ 于 $G$ 、 $H$ 两点，求证： $BG:GH:HM=5:3:2$．




【解析】




（1）过 $C$ 作 $MN \parallel EF$ 交 $AE$ 、 $AF$ 于 $M$，$N$，

则有 $\frac{MC}{BD}=\frac{EM}{EB}=\frac{FN}{FD}=\frac{CN}{BD}$，∴ $MC=CN$，

又∵ $MN \parallel EF$，∴ $\frac{MC}{EG}=\frac{AC}{AG}=\frac{CN}{GF}$，∴ $EG=GF$．

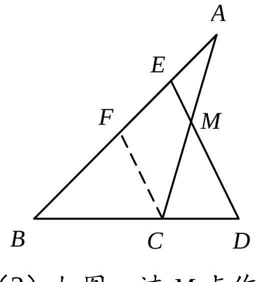
（2）如图，过点 $C$ 作 $DE$ 或 $AB$ 的平行线均可，不妨以中图为例来说明.

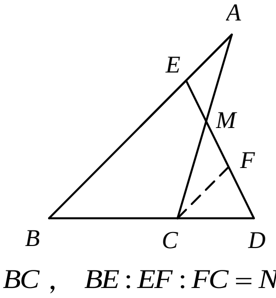
过点 $C$ 作 $CF \parallel DE$，交 $AB$ 于点 $F$．

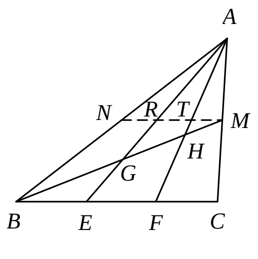
∵ $AM=MC$， $CF \parallel DE$，∴ $AE=EF$，

∵ $AE=\frac{1}{4}AB$，∴ $\frac{BF}{EF}=2$，∵ $CF \parallel DE$，∴ $\frac{BC}{CD}=\frac{BF}{EF}=2$，

当然，过点 $M$ 、点 $E$ 作适当的平行线，均可作出此题，这里不再给出.



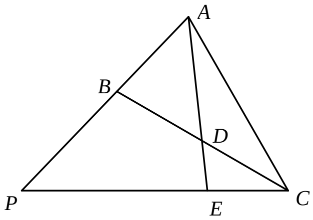



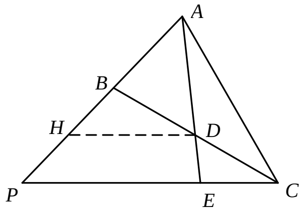

（3）如图，过 $M$ 点作 $MN \parallel BC$， $BE:EF:FC=NR:RT:TM$，

且 $NR:BE=1:2$，再根据相似可得 $BG:GH:HM=5:3:2$．

【例12】

如图，$\triangle ABC$ 中，$D$ 为 $BC$ 边的中点，延长 $AD$ 至 $E$，延长 $AB$ 交 $CE$ 的延长线于 $P$．若 $AD=2DE$，求证：$AP=3AB$．




【解析】

过点 $D$ 作 $PC$ 的平行线，交 $AB$ 于点 $H$．

$\because HD//PC$，$AD=2DE\Rightarrow \dfrac{AH}{PH}=\dfrac{AD}{DE}=2\Rightarrow AH=2PH$

$HD//PC$，

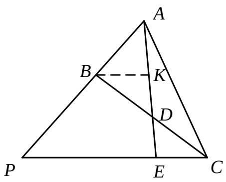
$BD=CD\Rightarrow \dfrac{BH}{PH}=\dfrac{BD}{CD}=1\Rightarrow BH=PH$

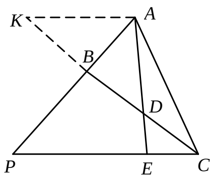
$\therefore AP=AH+PH=3PH$

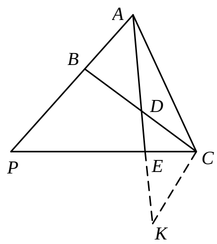
$AH=BH+AB=2PH=2BH$

$\therefore AB=BH=PH$ $\therefore AP=3PH=3AB$

老师可引导学生通过作如下辅助线来证此题：



# 笔记整理

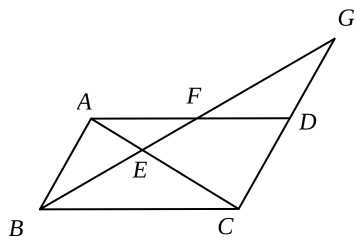
# 课后作业

1. 已知两个数 $a=3$，$b=27$，则它们的比例中项为_____________.

【解析】

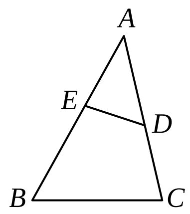
设比例中项为 $x$，则 $x^2=3\times27=81$，$\therefore x=\pm9$，故填 $\pm9$．

2. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，过点 $B$ 的直线顺次与 $AC$、$AD$ 及 $CD$ 的延长线相交于点 $E$、$F$、$G$，若 $BE=5$，$EF=2$，则 $FG$ 的长是___________.




【解析】$10.5$．

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$D$、$E$ 两点分别在 $AC$、$AB$ 两边上，$\angle ABC=\angle ADE$，$AB=7$，$AD=3$，$AE=2.7$，求 $AC$ 的长．




【解析】

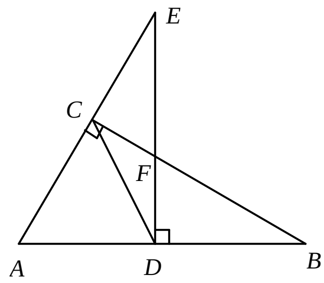
$\because$ $\angle ABC=\angle ADE$，$\angle A=\angle A$，$\therefore$ $\triangle AED\backsim\triangle ACB$

$\therefore$ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$，$\therefore$ $AE\cdot AB=AC\cdot AD$，$\because$ $AB=7$，$AD=3$，$AE=2.7$

$\therefore$ $3AC=7\times2.7$，$AC=6.3$．

4. 已知：如图所示，$CD$ 是直角 $\triangle ABC$ 的斜边中线，过点 $D$ 垂直于 $AB$ 的直线交 $BC$ 于点 $F$，交 $AC$ 的延长线于点 $E$．

求证：$CD^2=DF\cdot DE$．




【解析】

$\because$ $CD$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边中线

$\therefore$ $CD=DB$， $\angle A+\angle B=90^{\circ}$

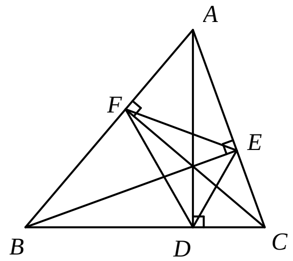
$\therefore$ $\angle DCB=\angle B$，$\because$ $DE\perp AB$，

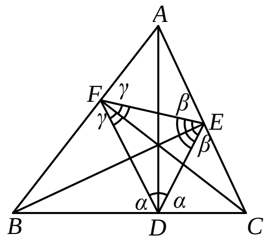
$\therefore$ $\angle A+\angle E=90^{\circ}$

$\therefore$ $\angle B=\angle E$，$\therefore$ $\angle DCB=\angle E$， 又 $\angle CDF=\angle EDC$

$\therefore$ $\triangle DCF\backsim\triangle DEC$，$\therefore$ $\dfrac{DC}{DE}=\dfrac{DF}{DC}$，$\therefore$ $DC^2=DE\cdot DF$．

5. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，$D$、$E$、$F$ 分别是三条高 $AD$、$BE$、$CF$ 的垂足，连 $DE$、$EF$、$FD$，求证：$\triangle DEC\backsim\triangle AEF\backsim\triangle DBF$．




【解析】

设 $\angle CDE=\alpha$， $\angle AEF=\beta$， $\angle BFD=\gamma$，

知 $\angle BDF=\alpha$， $\angle DEC=\beta$， $\angle AFE=\gamma$．

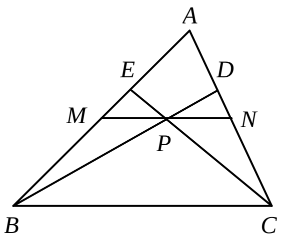
又 $\angle BAC=180^{\circ}-\beta-\gamma$， $\angle ABC=180^{\circ}-\alpha-\gamma$， $\angle ACB=180^{\circ}-\alpha-\beta$，

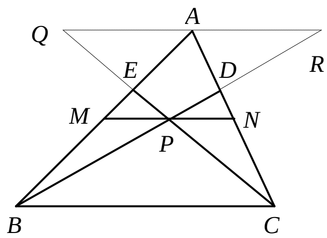
则 $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=540^{\circ}-2(\alpha+\beta+\gamma)=180^{\circ}$，即 $\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}$，从而，

推知 $\angle BAC=\alpha$， $\angle ABC=\beta$， $\angle ACB=\gamma$．

故 $\triangle DEC\backsim\triangle AEF\backsim\triangle DBF$．

6. 已知：$P$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线 $MN$ 上任意一点，$BP$、$CP$ 的延长线分别交对边 $AC$、$AB$ 于 $D$、$E$，求证：$\dfrac{AD}{DC}+\dfrac{AE}{EB}=1$




【解析】

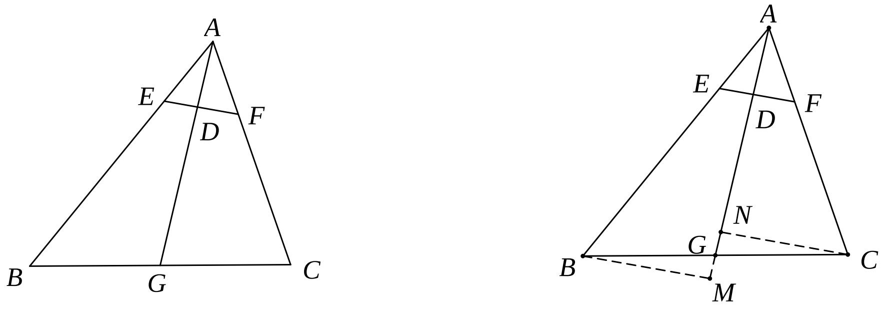
延长 $BD$、$CE$ 分别交过 $A$ 的平行于 $BC$ 的直线于 $R$、$Q$ 两点，

$\because$ $QR\,/\!/\,MN\,/\!/\,BC$，且 $AM=BM$，$\therefore$ $PQ=PC$， $PR=PB$

又 $\because$ $\angle QPR=\angle CPB$，$\therefore$ $\triangle PQR\cong\triangle PCB$，可得 $QR=BC$，

又 $\because$ $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AR}{BC}$， $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AQ}{BC}$，$\therefore$ $\dfrac{AD}{CD}+\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AR}{BC}+\dfrac{AQ}{BC}=\dfrac{AR+AQ}{BC}=\dfrac{RQ}{BC}=\dfrac{BC}{BC}=1$．

7. 如图，$G$ 为 $\triangle ABC$ 中 $BC$ 边中点，在 $AB$、$AC$ 上分别取 $AE=AF$，$EF$ 交 $AG$ 于 $D$，求证：$AC:AB=DE:DF$.




【解析】

过 $B$ 点做 $BM\,//\,EF$ 交 $AG$ 延长线于 $M$，过 $C$ 点做 $CN\,//\,EF$ 交 $AG$ 于 $N$

$$\therefore \frac{ED}{BM}=\frac{AE}{AB} \quad ①，\quad \frac{DF}{CN}=\frac{AF}{AC} \quad ②$$

$\because BM\,//\,EF\,//\,CN$，$\therefore \dfrac{BM}{CN}=\dfrac{BG}{CG}=1$

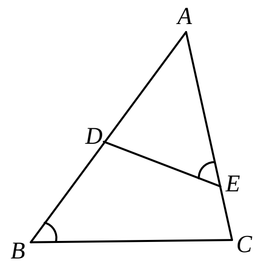
①与②做比得 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{AC}{AB}\cdot\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AC}{AB}$ 得证.

# 第 3 讲　相似三角形的模型（一）

## 知识集锦

### 一、斜“A”和斜“8”模型

**1．斜“A”字型**



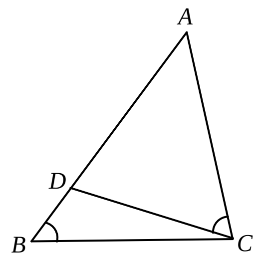

①斜“A”字型为反平行模型中的一种，右图为其基本图形，

具有如下性质：

$\angle AED=\angle B$ 时，$\triangle AED\backsim\triangle ABC$

有 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{CB}$，

※ $AE\cdot AC=AD\cdot AB$．



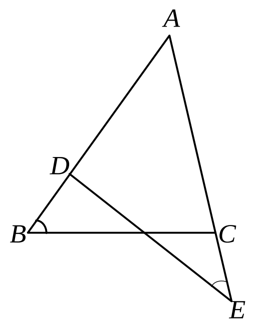

②当 $E$ 点与 $C$ 点重合时，为其常见的一个变形，如右图所示，

具有的性质为：

$\angle ACD=\angle B$ 时，$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$

有 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{CD}{BC}$，

※ $AC^2=AD\cdot AB$．




③当 $E$ 点在 $AC$ 的延长线上时，为另一个常见的变形，

如右图所示，

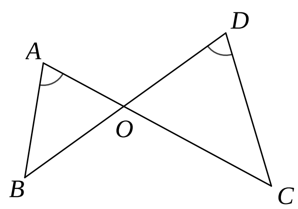
具有的性质为：

$\angle AED=\angle B$ 时，$\triangle AED\backsim\triangle ABC$

有 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{CB}$，

※ $AE\cdot AC=AD\cdot AB$．

**2．斜“8”字型**




斜“8”字型为反平行模型中另一种，右图为其基本图形，

具有如下性质：

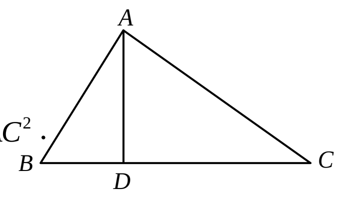
$\angle A=\angle D$ 时，$\triangle ABO\backsim\triangle DCO$

有 $\dfrac{AO}{DO}=\dfrac{BO}{CO}=\dfrac{AB}{DC}$，

※ $AO\cdot OC=BO\cdot OD$．

### 二、射影定理

如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=90^\circ$，$AD\perp BC$ 于点 $D$，则有结论：




1．角的相等关系：$\angle B=\angle CAD$，$\angle C=\angle BAD$．

2．同一三角形中三边的平方关系：

$AB^2=AD^2+BD^2$、$AC^2=AD^2+CD^2$、$BC^2=AB^2+AC^2$．

3．线段的等积式：

由等面积，得 $BC\cdot AD=AB\cdot AC$；

由 $\triangle ABD \backsim \triangle CAD \backsim \triangle CBA$，得 $AB^2 = BD \cdot BC$， $AC^2 = CD \cdot CB$， $AD^2 = BD \cdot CD$.

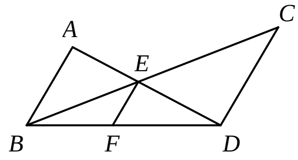
因此我们得知，这六条线段 $AB$、$AC$、$BC$、$AD$、$BD$、$CD$，如果知道其中的两个线段的长度，那另外四条线段的长度也就都知道了，构成了知二推四.

注意：这个基本图形及结论会在初中经常看到，非常重要，实际上也是斜“A”的特殊情况.

**三、三平行模型**

如图，已知 $AB \parallel EF \parallel CD$，若 $AB = a$， $CD = b$， $EF = c$.

则有：① $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$． ② $\frac{1}{S_{\triangle BED}} = \frac{1}{S_{\triangle ABD}} + \frac{1}{S_{\triangle BDC}}$.




## 模块一　　斜“A”、斜“8”模型

【例1】

（1）如图 1， $D$, $E$ 两点分别在 $\triangle ABC$ 的边 $AB$， $AC$ 上， $DE$ 与 $BC$ 不平行，若使 $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$，需要添加的条件是__________（任意添加一个即可）.

（2）如图 2， $\angle C = \angle E = 90^\circ$， $AC = 3$， $BC = 4$， $AE = 2$，则 $AD =$________.

（3）如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 8$， $AC = 6$，点 $D$ 在 $AC$ 上， $AD = 2$，若要在 $AB$ 上找一点 $E$，使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则 $AE =$________.

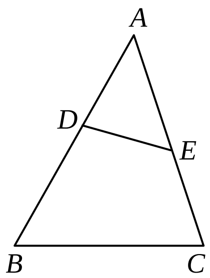


图 1

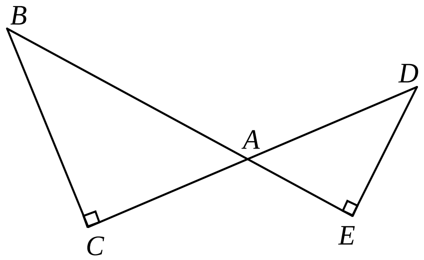


图 2

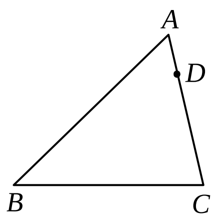


图 3

【解析】

（1） $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$， $AD \cdot AB = AE \cdot AC$， $6AE = 3 \times 8$， $AE = 4$.

（2） $\angle AED = \angle B$ 或 $\angle ADE = \angle C$ 或 $AE \cdot AC = AD \cdot AB$.

（3） $\frac{10}{3}$． $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$， $AB \cdot AE = AC \cdot AD$.

（4） $\frac{8}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$．“A”字形： $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$， $\frac{2}{6} = \frac{AE}{8}$， $AE = \frac{8}{3}$；

或斜“A”字形： $AD \cdot AC = AE \cdot AB$， $AE = \frac{3}{2}$.

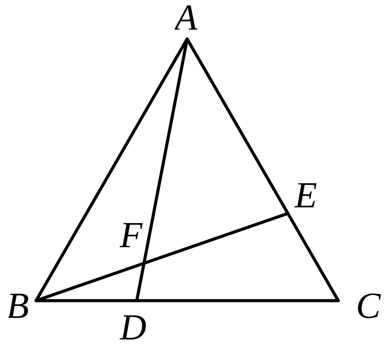
【例2】

如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 $D$，$E$ 分别在 $BC$，$AC$ 上，且 $BD=CE$，$AD$ 与 $BE$ 相交于点 $F$.

（1）证明：$BD^2=AD\cdot DF$；

（2）证明：① $AF\cdot AD=AE\cdot AC$；

② $BF\cdot BE=BD\cdot BC$.




【解析】

（1）∵ $\angle BAD=\angle CBE$，$\angle BDF=\angle ADB$，

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle BFD$，

∴ $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DF}{BD}$，

∴ $BD^2=AD\cdot DF$；

（2）①证明 $\triangle AFE\backsim\triangle ACD$ 即可②证明 $\triangle BFD\backsim\triangle BCE$ 即可.

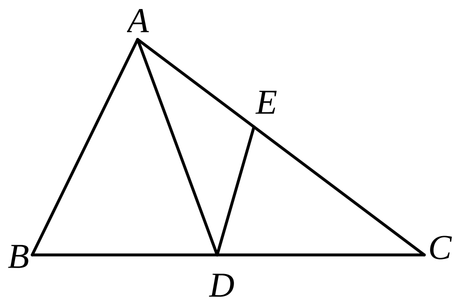
【例3】

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 边上一点，且满足 $AD=AB$，$\angle ADE=\angle C$.

（1）求证：$\triangle ADE\backsim\triangle ACD$；

（2）若 $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CDE}}=\dfrac{2}{3}$，且 $AE=4$，求 $AB$ 的长；

（3）求证：$AC\cdot EC=DC\cdot BC$.




【解析】

（1）在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AED$ 中

∵ $\angle ADE=\angle C$，$\angle DAE=\angle CAD$

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ACD$

（2）$AB=2\sqrt{10}$

（3）由（1）得，$\triangle ADE\backsim\triangle ACD$，

∴ $\angle AED=\angle ADC$，∴ $\angle DEC=\angle ADB$.

∵ $AD=AB$，

∴ $\angle ADB=\angle ABD$，∴ $\angle DEC=\angle ABD$

在 $\triangle CBA$ 与 $\triangle CED$ 中，

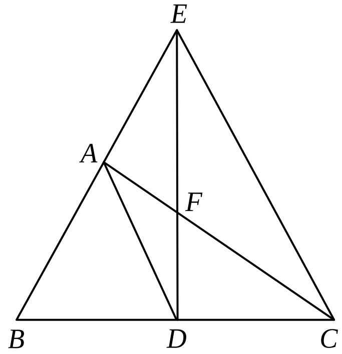
∵ $\angle C$ 为公共角，$\angle DEC=\angle ABD$，

∴ $\triangle CBA\backsim\triangle CED$ ∴ $\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{BC}{EC}$，

即 $AC\cdot EC=DC\cdot BC$.

【例4】

如图，在△$ABC$ 中，$\angle BAC$=90°，$BC$ 的垂直平分线交 $BC$ 于 $D$，交 $BA$ 的延长线于 $E$，交 $AC$ 于 $F$，求证：$AD^2=DE\bullet DF$.




【解析】

∵$BC$ 的垂直平分线交 $BC$ 于 $D$，

∴$DA=DC$，$\angle BAC$=90°

∴$\angle DAC=\angle DCA$，

又∵$\angle BAC$=90°，$\angle B+\angle BED$=90°，$\angle B+\angle ACB$=90°，

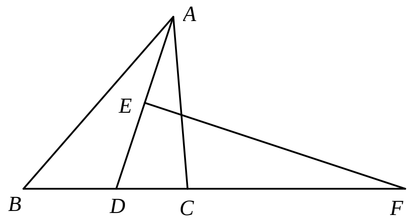
∴$\angle ACB=\angle BED$，∴$\angle DAC=\angle BED$，

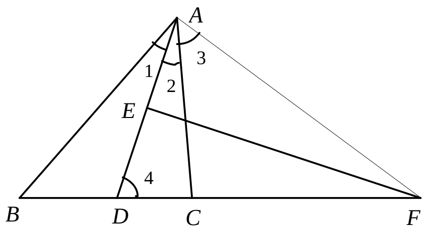
在△$ADF$ 和△$ADE$ 中，$\begin{cases}\angle ADF=\angle ADF\\ \angle AED=\angle DAF\end{cases}$，

∴$\triangle ADF\backsim\triangle ADE$，∴ $\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{DF}{AD}$，∴$AD^2=DE\bullet DF$.

【例5】

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 的垂直平分线交 $AD$ 于 $E$，交 $BC$ 的延长线于 $F$，$FD^2=FB\cdot FC$，求证：$AD$ 平分 $\angle BAC$.




【解析】

连接 $AF$，∵ $EF$ 垂直平分 $AD$，∴ $AF=DF$，∵ $DF^2=FC\cdot FB$，

∴ $AF^2=FC\cdot FB$，∴ $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{FB}{AF}$，又∵ $\angle AFC=\angle BFA$，

∴ $\Delta AFC\backsim\Delta BFA$，∴ $\angle 3=\angle B$，∵ $\angle 4=\angle 2+\angle 3$，$\angle 4=\angle B+\angle 1$，

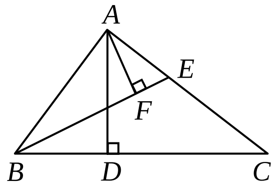
∴ $\angle 2+\angle 3=\angle B+\angle 1$，∴ $\angle 1=\angle 2$，即 $AD$ 平分 $\angle BAC$.

# 模块二　射影定理

【例6】

如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于 $D$，$E$ 是 $AC$ 上任意一点，连结 $BE$，过 $A$ 作 $AF\perp BE$ 于 $F$，

求证：$BD\cdot BC=BF\cdot BE$．




【解析】

分析：射影定理可以明显得到

$BD\cdot BC=AB^2$，$BF\cdot BE=AB^2$，由此证明相等．在实际证明过程中，用相似先导出射影定理．

$\because \angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，$\therefore$

$\angle BAC=\angle ADB=90°$，

又 $\angle ABD=\angle ABC$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CBA$，

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$，即 $AB^2=BD\cdot BC$，

又$\because \triangle ABE$ 为直角三角形，$AF\perp BE$，$\therefore$

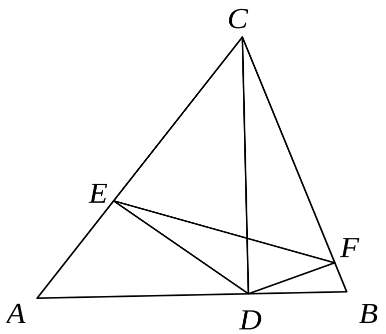
$\angle BAE=\angle AFB=90°$，

又 $\angle ABF=\angle ABE$，$\therefore \triangle FBA\backsim\triangle ABE$，$\therefore \dfrac{AB}{BF}=\dfrac{BE}{AB}$，即 $AB^2=BF\cdot BE$，

$\therefore BD\cdot BC=BF\cdot BE$．

【例7】

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$ 于 $D$，$DE\perp AC$ 于 $E$，$DF\perp BC$ 于 $F$．求证：$\triangle CEF\backsim\triangle CBA$．




【解析】

分别在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle CDB$ 中由射影定理得到：

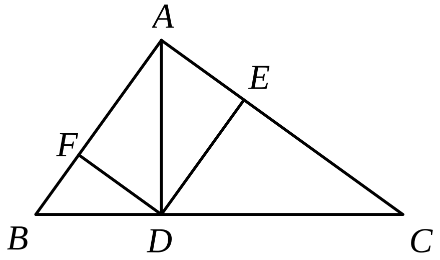
$CD^2=CE\cdot CA$，$CD^2=CF\cdot CB$，

$\therefore CE\cdot CA=CF\cdot CB$，即 $\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CF}{CA}$，

$\because \angle ECF=\angle BCA$，$\therefore \triangle ECF\backsim\triangle BCA$．

【例8】

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AD$ 是斜边 $BC$ 上的高，$DE\perp AC$ 于 $E$， $DF\perp AB$ 于 $F$ ，求证： $\dfrac{AB^4}{AC^4}=\dfrac{FB\cdot FD}{EC\cdot ED}$ .




【解析】

由射影定理可以依次得到 $\dfrac{AB^4}{AC^4}=\dfrac{BD^2\cdot BC^2}{DC^2\cdot BC^2}=\dfrac{BF\cdot AB}{EC\cdot AC}$ ,

于是仅需证明 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{FD}{ED}$ ,

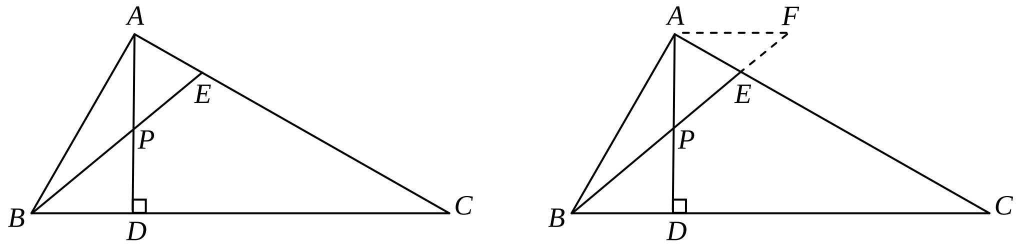
由于 $\triangle BDA\backsim\triangle ADC$ ， $DF$、$DE$ 分别是 $AB$ 与 $AC$ 上的高，

所以有 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DF}{DE}$ ，得证.

【例9】

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$ ， $AD\perp BC$ ，又 $AP=DP$ ， $BP$延长交 $AC$ 于 $E$ ，又 $\dfrac{AC}{AB}=k$ ，

求 $\dfrac{AE}{EC}$ .

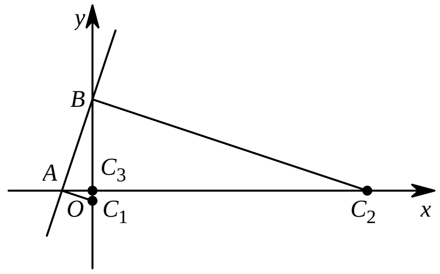



【解析】

$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AF}{BC}=\dfrac{BD}{BC}$ ，又 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{1}{k^2}$ ， $\therefore\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{k^2+1}$ ，即 $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{k^2+1}$ .

【例10】

已知，平面直角坐标系中，直线 $y=3x+3$ 与 $x$ 轴交于点 $A$，与 $y$ 轴交于点 $B$，若坐标轴上存在一点 $C$，使得 $\triangle ABC$ 是直角三角形，则 $C$ 点坐标为________________.




【解析】

如图，$OA=1$，$OB=3$，由射影定理可知，

$OA^2=OB\cdot OC_1$，$OB^2=OA\cdot OC_2$，

则 $C_1\left(0,-\frac{1}{3}\right)$，$C_2(9,0)$，$C_3(0,0)$.

**【教师备课提示】**此题让学生了解坐标系下用射影进行快速计算.

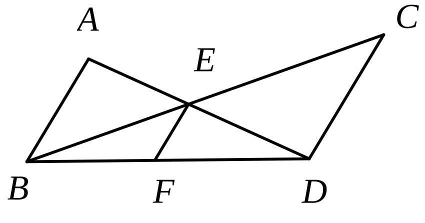
## 模块三　三平行模型

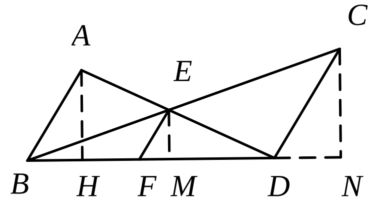
【例11】

如图，已知 $AB\parallel EF\parallel CD$，若 $AB=a$，$CD=b$，$EF=c$，

（1）求证：$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

（2）找出 $S_{\triangle ABD}$、$S_{\triangle BED}$、$S_{\triangle BCD}$ 之间的关系，并证明你的结论.




【解析】

（1）$\because AB\parallel EF\ \therefore \frac{EF}{AB}=\frac{DF}{BD}$，$\because CD\parallel EF\ \therefore \frac{EF}{CD}=\frac{BF}{BD}$

两式相加并变形可得，$\frac{1}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$，即 $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

（2）$\frac{1}{S_{\triangle BED}}=\frac{1}{S_{\triangle ABD}}+\frac{1}{S_{\triangle BCD}}$，过点 $A$、$E$、$C$ 分别作 $BD$ 的垂线，垂足为 $H$、$M$、$N$.

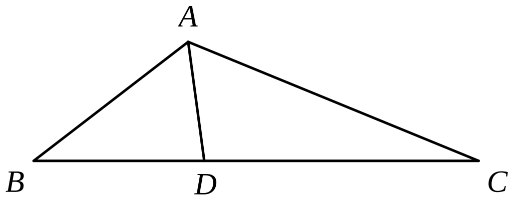
由上题知，$\dfrac{1}{EM}=\dfrac{1}{AH}+\dfrac{1}{CN}$，故 $\dfrac{1}{\frac{1}{2}BD\cdot EM}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}BD\cdot AH}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}BD\cdot CN}$，

即 $\dfrac{1}{S_{\triangle BED}}=\dfrac{1}{S_{\triangle ABD}}+\dfrac{1}{S_{\triangle BCD}}$.

【例12】

在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120°$，$AD$平分$\angle BAC$交$BC$于点$D$.

求证：$\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.




【解析】

方法一：分别过$B$、$C$两点做$AD$的平行线，

分别交$CA$、$BA$的延长线于$E$、$F$两点.

由于$EB\,/\!/\,AD\,/\!/\,FC$，有$\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{FC}$；

由于$\angle EBA=\angle BAD=60°$，

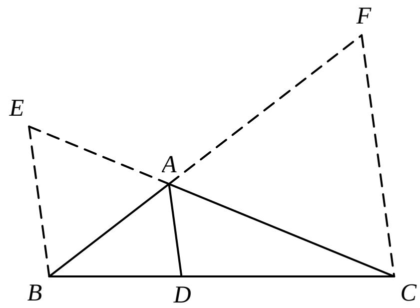
$\angle EAB=180°-\angle BAC=60°$

所以$\triangle EAB$为正三角形，

同理$\triangle FAC$亦为正三角形.

$\therefore BE=AB$，$FC=AC$.

故$\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.



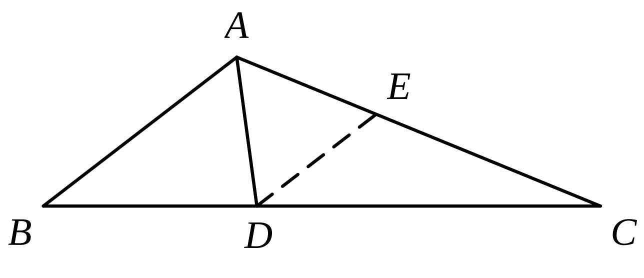

方法二：过点$D$作$AB$的平行线，交$AC$于点$E$.

$\because \angle BAC=120°$，$\angle BAD=\angle CAD$，$\therefore \angle BAD=\angle CAD=60°$

$\because DE\,/\!/\,AB$，$\therefore \angle ADE=\angle BAD=60°$ $\therefore AD=AE=DE$

$\because DE\,/\!/\,AB\Rightarrow\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{CD}{BC}$，$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$

$\therefore \dfrac{DE}{AB}+\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{CD}{BC}+\dfrac{BD}{BC}=1$，等式两边同除以$AD$，则有：$\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}=\dfrac{1}{AD}$.

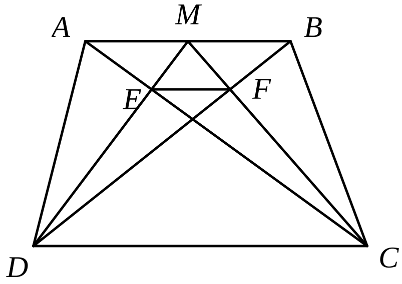


【例13】

已知：如图，在梯形$ABCD$中，$AB \parallel CD$，$M$是$AB$的中点，分别连接$AC$、$BD$、$MD$、$MC$，且$AC$与$MD$交于点$E$，$DB$与$MC$交于$F$．

（1）求证：$EF \parallel CD$

（2）若$AB=a$，$CD=b$，求$EF$的长．




【解析】

（1）$\because AB \parallel CD$，$\therefore \dfrac{ME}{ED}=\dfrac{AM}{CD}$，$\dfrac{MF}{FC}=\dfrac{BM}{CD}$，

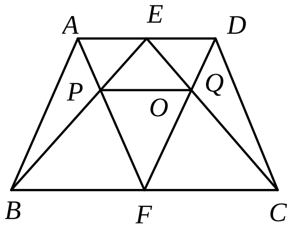
$\because AM=BM$，$\therefore \dfrac{AM}{CD}=\dfrac{BM}{CD}$（中间过渡量），

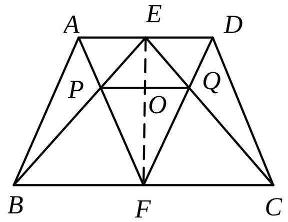
$\therefore \dfrac{ME}{ED}=\dfrac{MF}{FC} \Rightarrow EF \parallel CD$．

（2）$\because AM \parallel EF \parallel CD$，$\therefore \dfrac{1}{EF}=\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{CD} \Rightarrow EF=\dfrac{ab}{a+2b}$．

【例14】

如图，在梯形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，$AD=a$，$BC=b$，$E$，$F$分别是$AD$，$BC$的中点，$AF$交$BE$于$P$，$CE$交$DF$于$Q$，求$PQ$的长．




【解析】

观察此题与上题颇为相似，于是可以尝试证明$PQ \parallel AD \parallel BC$

$\because AD \parallel BC$，$\therefore \dfrac{AP}{PF}=\dfrac{AE}{BF}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b}=\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{DQ}{FQ}=\dfrac{DE}{CF}=\dfrac{a}{b}$

$\therefore \dfrac{AP}{PF}=\dfrac{DQ}{FQ} \Rightarrow PQ \parallel AD \parallel BC$，$\therefore \dfrac{PQ}{AD}=\dfrac{FP}{FA}=\dfrac{b}{a+b} \Rightarrow PQ=\dfrac{ab}{a+b}$．

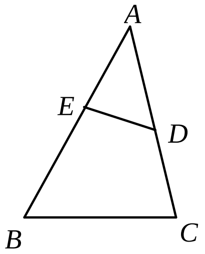
# 笔记整理

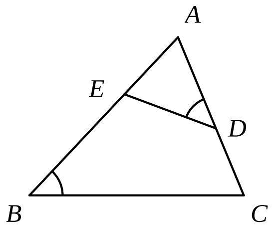
# 课后作业

1.

（1）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$D$、$E$ 两点分别在 $AC$、$AB$ 两边上，$\angle ABC=\angle ADE$，$AB=7$，$AD=3$，$AE=2.7$，求 $AC$ 的长.

(2)如图,$D$、$E$ 是 $\triangle ABC$ 的边 $AC$、$AB$ 上的点,且 $AD\cdot AC=AE\cdot AB$,求证：$\angle ADE=\angle B$.




【解析】

（1）$\because$ $\angle ABC=\angle ADE$，$\angle A=\angle A$，$\therefore$ $\triangle AED\backsim\triangle ACB$，$\therefore$ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$

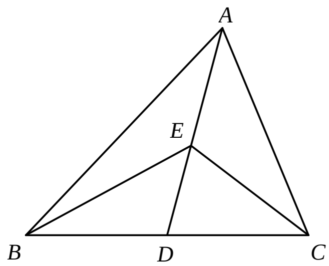
$\therefore$ $AE\cdot AB=AC\cdot AD$，$\because$ $AB=7$，$AD=3$，$AE=2.7$，

$\therefore$ $3AC=7\times2.7$，$AC=6.3$.

（2）$\because$ $AD\cdot AC=AE\cdot AB$，$\therefore$ $\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AB}{AC}$，$\because$ $\angle DAE=\angle BAC$，

$\therefore$ $\triangle DAE\backsim\triangle BAC$，$\therefore$ $\angle ADE=\angle B$.

2. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$D$ 为 $BC$ 中点，$E$ 为 $AD$ 上一点，且 $\angle CBE=\angle BAD$，求证：$\angle BCE=\angle CAD$.




【解析】

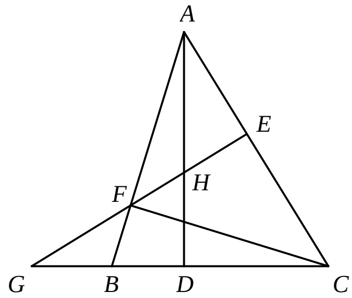
$\because$ $\angle DAB=\angle DBE$，$\angle ADB=\angle BDE$，

$\therefore$ $\triangle DAB\backsim\triangle DBE$，$\therefore$ $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DB}{DE}$，$\because$ $D$ 是 $BC$ 中点，$\therefore$ $BD=CD$，

$\therefore$ $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{DC}{DE}$，又$\because$ $\angle ADC=\angle CDE$，

$\therefore$ $\triangle DAC\backsim\triangle DCE$，$\therefore$ $\angle DAC=\angle DCE$.

3. 如图，已知 $AD$、$CF$ 是 $\triangle ABC$ 的两条高，$EF\perp AC$ 与 $E$，交 $CB$ 延长线于 $G$，交 $AD$ 于 $H$，求证：$EF^2=EH\cdot EG$.




【解析】

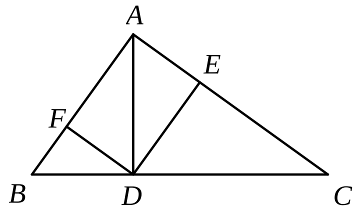
$\because CF\perp AB$，$EF\perp AC$，$\therefore EF^2=AE\cdot CE$，

又由 $AD\perp BC$ 可知，$\angle AEH=\angle CEG=90^\circ$，$\angle AHE=\angle GCE$，

$\therefore \triangle AEH\backsim\triangle GEC$，$\therefore \dfrac{EH}{CE}=\dfrac{AE}{EG}$，$\therefore EH\cdot EG=AE\cdot CE$，$\therefore EF^2=EH\cdot EG$.

4. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AD$ 是斜边 $BC$ 上的高，$DE\perp AC$ 于 $E$，$DF\perp AB$ 于 $F$，

求证：$\dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BF}{CE}$.




【解析】

方法一：$\because \triangle ABC\backsim\triangle FBD\backsim\triangle FDA\backsim\triangle EDC$，

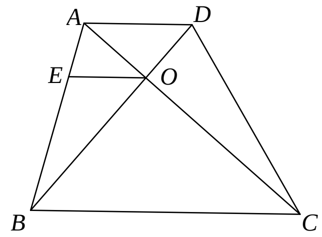
$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{FB}{FD}=\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{ED}{EC}$，

$\therefore \dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{FB}{FD}\cdot\dfrac{FD}{FA}\cdot\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{BF\cdot DE}{CE\cdot AF}$，又 $\because AF=DE$，$\therefore \dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BF}{CE}$

方法二：由 $\triangle ABD\backsim\triangle CAD$，可知 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DF}{DE}$，又 $\because \dfrac{AB^4}{AC^4}=\dfrac{FB\cdot FD}{EC\cdot ED}$，

$\therefore \dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{AB^4}{AC^4}\cdot\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{FB\cdot FD}{EC\cdot ED}\cdot\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{BF}{CE}$.

5. 如图，在梯形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，对角线$AC$、$BD$交于点$O$，点$E$在$AB$上，且$EO \parallel BC$，已知$AD=3$，$BC=6$，求$EO$的长．




【解析】由于$AD \parallel EO \parallel BC$，所以$\frac{1}{OE}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}$，故$OE=\frac{18}{9}=2$．

# 第 4 讲　相似三角形的模型（二）

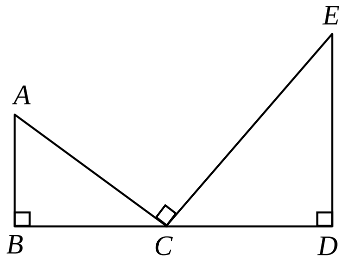
## 知识集锦

### 一、三垂直模型

1．三垂直模型

如图，$AB\perp BD$，$ED\perp BD$，$AC\perp EC$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle CDE$，$\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BC}{ED}=\dfrac{AC}{CE}$．

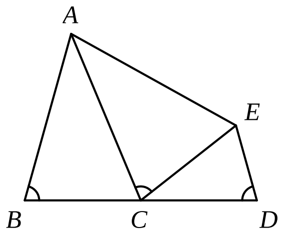
特别地，当 $C$ 是 $BD$ 中点时，有 $\triangle ABC\backsim\triangle CDE\backsim\triangle ACE$．

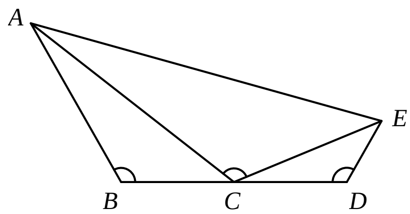



2．“k”字模型

如图，$\angle ABC=\angle CDE=\angle ACE$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle CDE$，$\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BC}{ED}=\dfrac{AC}{CE}$．

特别地，当 $C$ 是 $BD$ 中点时，有 $\triangle ABC\backsim\triangle CDE\backsim\triangle ACE$．



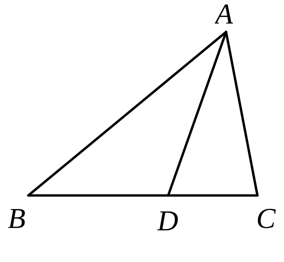

### 二、角分线定理

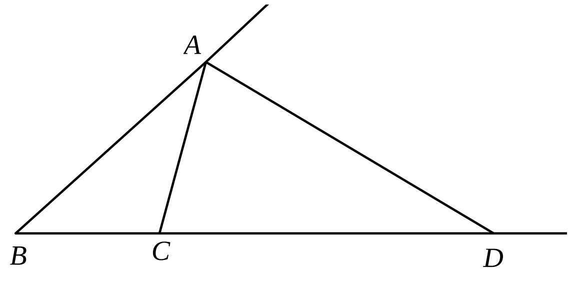
1．内角平分线定理

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，则有：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$．

2．外角平分线定理

如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的外角平分线交对边 $BC$ 的延长线于 $D$，则有 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$．



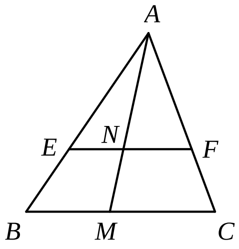



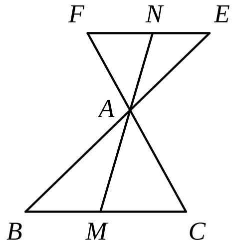
**三、线束定理**

过一点的三条直线截两条平行线，截得的线段对应成比例．

如图，若 $EF \parallel BC$，则有 $\dfrac{EN}{NF}=\dfrac{BM}{MC}$．对“A”字型和“8”字型都成立．

注意除平行线外三条直线必须交于一点．



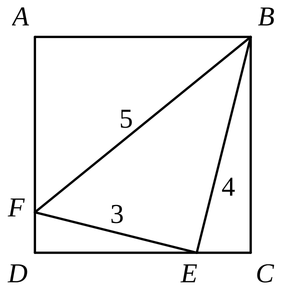



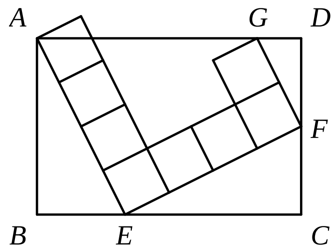

## 模块一　三垂直模型与“k”模型

【例1】

（1）如图，一个边长分别为 3、4、5 的直角三角形的一个顶点与正方形的顶点 $B$ 重合，另两个顶点分别在正方形的两条边 $AD$、$CD$ 上，那么这个正方形的面积是________．

（2）如图，矩形 $ABCD$ 中，由 8 个面积均为 1 的小正方形组成的 $L$ 型模板如图放置，则矩形 $ABCD$ 的周长为________．




【解析】

（1）$\dfrac{256}{17}$．抓住相似模型 $\triangle CBE \backsim \triangle DEF$，$\therefore \dfrac{BC}{ED}=\dfrac{CE}{DF}=\dfrac{4}{3}$，

设 $BC=4a$，$DE=3a$，$\therefore CE=a$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，$BC^2+CE^2=BE^2$，$16a^2+a^2=16$，

$\therefore a^2=\dfrac{16}{17}$，正方形的面积为 $\dfrac{256}{17}$．

（2）$\triangle ABE \backsim \triangle ECF \backsim \triangle FDG$，$\dfrac{AB}{FD}=\dfrac{AE}{FG}=2$，

$\therefore AB=2DF$，$\therefore AB=2CF$，$\dfrac{AB}{EC}=\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{BE}{CF}=1$，

$\therefore AB=CE$，$BE=CF$，

$\therefore CE=2CF$，又$\because EF=4$，$\therefore CE=\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$，$CF=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$，

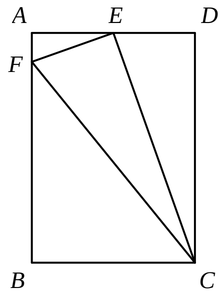
$\therefore BC=\dfrac{12}{5}\sqrt{5}$，$AB=\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$，$\therefore$矩形 $ABCD$ 的周长为 $8\sqrt{5}$．

【例2】

如图，已知在矩形 $ABCD$ 中，$E$ 为 $AD$ 的中点，$EF \perp EC$ 交 $AB$ 于 $F$，连接 $FC$（$AB > AE$）.

（1）$\triangle AEF$ 与 $\triangle ECF$ 是否相似，若相似，证明你的结论；若不相似，请说明理由.

（2）设 $\frac{AB}{BC} = k$ 是否存在这样的 $k$ 值，使得 $\triangle AEF \backsim \triangle BCF$，若存在，证明你的结论并求出 $k$ 值；若不存在，说明理由.




【解析】

（1）由三垂直图形可知，$\triangle AEF \backsim DCE$，

$\therefore \frac{AF}{DE} = \frac{EF}{CE}$，$\because E$ 是 $AD$ 中点，

$\therefore AE = ED$，$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{EF}{EC}$，

又$\because \angle FAE = \angle FEC = 90°$，

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle ECF$.

（2）由 $\triangle AEF \backsim \triangle BCF$ 可知，$\frac{AE}{AF} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2}$，

$\therefore AF = \frac{1}{3}AB$，又$\because \triangle AEF \backsim \triangle DCE$，

从而可知，$\frac{AF}{AE} = \frac{DE}{CD} \Rightarrow AE^2 = AF \cdot CD \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{3}}{3}AB$，

故 $BC = 2AE = \frac{2}{3}\sqrt{3}AB$，

故 $k = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【例3】

把两块全等的直角三角形 $ABC$ 和 $DEF$ 叠放在一起，使三角板 $DEF$ 的锐角顶点 $D$ 与三角板 $ABC$ 的斜边中点 $O$ 重合，其中 $\angle ABC=\angle DEF=90^{\circ}$， $\angle C=\angle F=45^{\circ}$， $AB=DE=4$，把三角板 $ABC$ 固定不动，让三角板 $DEF$ 绕点 $O$ 旋转，设射线 $DE$ 与射线 $AB$ 相交于点 $P$，射线 $DF$ 与线段 $BC$ 相交于点 $Q$.

（1）当射线 $DF$ 经过点 $B$，即点 $Q$ 与点 $B$ 重合时，易证$\triangle APD\backsim\triangle CDQ$. 此时，$AP\cdot CQ=$ ______.

（2）将三角板 $DEF$ 由图 1 所示的位置绕点 $O$ 沿逆时针方向旋转，设旋转角为 $\alpha$. 其中 $0^{\circ}<\alpha<90^{\circ}$，问 $AP\cdot CQ$ 的值是否改变？说明你的理由.

（3）在（2）的条件下，设 $CQ=x$，两块三角板重叠面积为 $y$，求 $y$ 与 $x$ 的函数关系式.

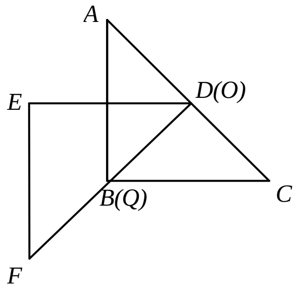


图1

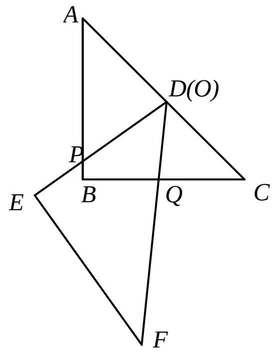


图2

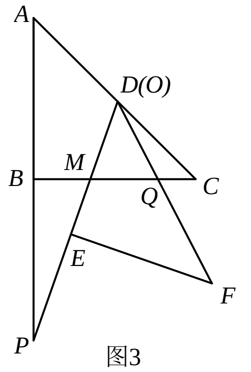


图3

【解析】

（1）8;

（2）$AP\cdot CQ$ 的值不会改变.

理由如下：

在 $\triangle APD$ 与$\triangle CDQ$ 中， $\angle A=\angle C=45°$， $\angle APD=180°-45°-(45°+\alpha)=90°-\alpha$

$\angle CDQ=90°-\alpha$，即 $\angle APD=\angle CDQ$， $\therefore\triangle APD\backsim\triangle CDQ$ $\therefore\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{CD}{CQ}$

$\therefore AP\cdot CQ=AD\cdot CD=AD^2=\left(\dfrac{1}{2}AC\right)^2=8$

（3）情形 1：当 $0°<\alpha<45°$ 时， $2<CQ<4$，即 $2<x<4$，

此时两三角板重叠部分为四边形 $DPBQ$，过 $D$ 作 $DG\perp AP$ 于 $G$，

$DN\perp BC$ 于 $N$， $\therefore DG=DN=2$

由（2）知：$AP\cdot CQ=8$ 得 $AP=\dfrac{8}{x}$

于是 $y=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC-\dfrac{1}{2}CQ\cdot DN-\dfrac{1}{2}AP\cdot DG=8-x-\dfrac{8}{x}(2<x<4)$

情形 2：当 $45°\leqslant\alpha<90°$ 时， $0<CQ\leqslant 2$ 时，即 $0<x\leqslant 2$，

此时两三角板重叠部分为 $\triangle DMQ$，

由于 $AP=\dfrac{8}{x}$， $PB=\dfrac{8}{x}-4$，易证： $\triangle PBM\backsim\triangle DNM$，

$\therefore\dfrac{BM}{MN}=\dfrac{PB}{DN}$ 即 $\dfrac{BM}{2-BM}=\dfrac{PB}{2}$ 解得 $BM=\dfrac{2PB}{2+PB}=\dfrac{8-4x}{4-x}$

$\therefore MQ=4-BM-CQ=4-x-\dfrac{8-4x}{4-x}$

于是 $y=\dfrac{1}{2}MQ\cdot DN=4-x-\dfrac{8-4x}{4-x}(0<x\leqslant 2)$

综上所述，当 $2<x<4$ 时，$y=8-x-\dfrac{8}{x}$

当 $0<x\leqslant 2$ 时，$y=4-x-\dfrac{8-4x}{4-x}$ 或（$y=\dfrac{x^2-4x+8}{4-x}$）

法二：连结 $BD$，并过 $D$ 作 $DN\perp BC$ 于点 $N$，在 $\triangle DBQ$ 与 $\triangle MCD$ 中，

$\angle DBQ=\angle MCD=45°$

$\angle DQB=\angle QCB+\angle QDC=45°+\angle QDC=\angle MDQ+\angle QDC=\angle MDC$

$\therefore \triangle DBQ\backsim\triangle MCD$　　$\therefore \dfrac{MC}{CD}=\dfrac{DB}{BQ}$，$\therefore MC=\dfrac{8}{4-x}$

$\therefore MQ=MC-CD=\dfrac{8}{4-x}-x=\dfrac{x^2-4x+8}{4-x}$ $\therefore y=\dfrac{1}{2}DN\cdot MQ=\dfrac{x^2-4x+8}{4-x}(0<x\leqslant 2)$

法三：过 $D$ 作 $DN\perp BC$ 于点 $N$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DNQ$ 中，

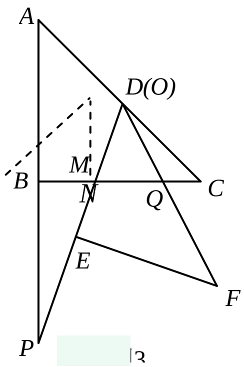
$DQ^2=DN^2+NQ^2=4+(2-x)^2=x^2-4x+8$

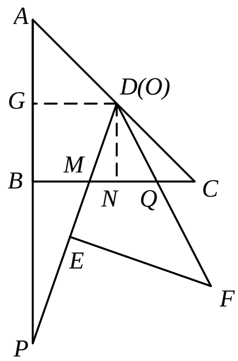
于是在 $\triangle BDQ$ 与 $\triangle DMQ$ 中 $\angle DBQ=\angle MDQ=45°$

$\angle DMQ=\angle DBM+\angle BDM=45°+\angle BDM=\angle BDQ$

$\therefore \triangle BDQ\backsim\triangle DMQ$，$\therefore \dfrac{BQ}{DQ}=\dfrac{DQ}{MQ}$，即 $\dfrac{4-x}{DQ}=\dfrac{DQ}{MQ}$

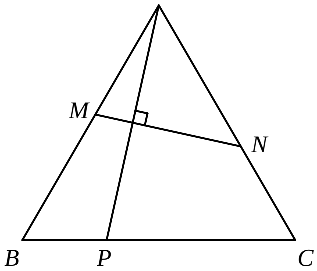
$\therefore MQ=\dfrac{DQ^2}{4-x}=\dfrac{x^2-4x+8}{4-x}$，$\therefore y=\dfrac{1}{2}DN\cdot MQ=\dfrac{x^2-4x+8}{4-x}(0<x\leqslant 2)$

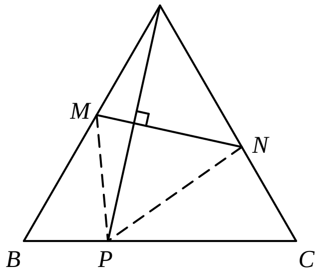



【例4】

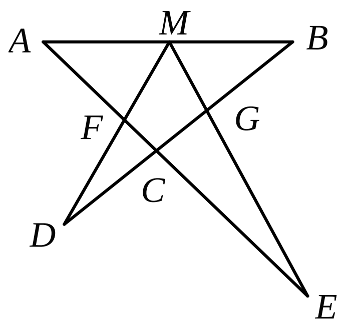
如图，设 $P$ 是等边 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上任一点，连 $AP$，作 $AP$ 的中垂线交 $AB$、$AC$ 于 $M$、$N$．证明：$BP\cdot PC=BM\cdot CN$．



【解析】
连结 $PM$ 、 $PN$ ．∵ $MN$ 是 $AP$ 的中垂线，
∴ $\triangle MPN \cong \triangle MAN$ ， 有 $\angle MPN = \angle MAN = 60°$ ．
又 $\angle BMP = 180° - \angle B - \angle BPM$
$= 120° - \angle BPM$ $= 120° - (180° - \angle MPN - \angle NPC)$
$= 120° - (120° - \angle NPC) = \angle NPC$ ．
则有 $\triangle BPM \backsim \triangle CNP$ ． 故 $BP \cdot PC = BM \cdot CN$ ．

【例5】
如图，$M$ 为线段 $AB$ 的中点， $AE$ 与 $BD$ 交于点 $C$ ， $\angle DME = \angle A = \angle B = \alpha$ ，且 $DM$ 交 $AC$ 于 $F$ ， $ME$ 交 $BC$ 于 $G$ ．
（1）写出图中两对相似三角形，并证明其中的一对；
（2）请连接 $FG$ ．如果 $\alpha = 45°$， $AB = 4\sqrt{2}$， $AF = 3$，求 $FG$ 长．



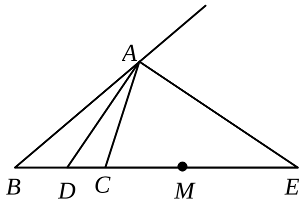

【解析】
（1） $\triangle AMF \backsim \triangle BGM$ ， $\triangle EMF \backsim \triangle EAM$ ，
$\triangle DMG \backsim \triangle DBM$ （任选两对），证明 $\triangle AMF \backsim \triangle BGM$ ．
∵ $\angle A + \angle AFM + \angle AMF = 180°$， $\angle DME + \angle BMG + \angle AMF = 180°$
∴ $\angle A + \angle AFM = \angle DME + \angle BMG$
∵ $\angle DME = \angle A$ ∴ $\angle AFM = \angle BMG$， 又∵ $\angle A = \angle B$， ∴ $\triangle AMF \backsim \triangle BGM$ ．
（2）∵ $\triangle AMF \backsim \triangle BGM$ ， ∴ $\dfrac{AM}{BG} = \dfrac{AF}{BM}$
∵ $M$ 为线段 $AB$ 的中点，∴ $AM = BM = \dfrac{1}{2}AB$
∵ $AB = 4\sqrt{2}$， $AF = 3$，∴ $BG = \dfrac{8}{3}$．
∵ $\alpha = 45°$，∴ $\angle ACB = 90°$，$AC = BC = 4$
∴ $CF = AC - AF = 1$，$CG = BC - BG = \dfrac{4}{3}$
∴ $FG = \sqrt{CF^2 + CG^2} = \dfrac{5}{3}$．

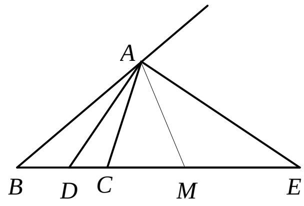
## 模块二　角分线定理

【例6】

已知：$AD$、$AE$ 分别为 $\triangle ABC$ 的内、外角平分线，$M$ 为 $DE$ 的中点.

求证：（1）$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$；（2）$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CE}$；（3）$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BM}{CM}$.




【解析】

（1）（2）即为三角形的角平分线定理，证明略；

（3）连接 $AM$，由已知条件可知 $\angle DAE=90°$，

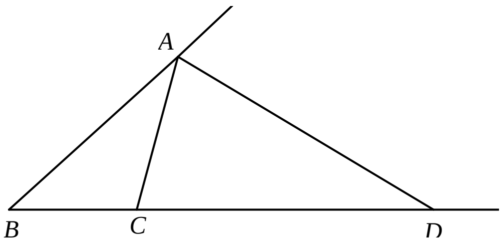
$\angle ACM=\angle CAD+\angle ADC=\angle BAD+\angle DAC+\angle CAM=\angle BAM$，

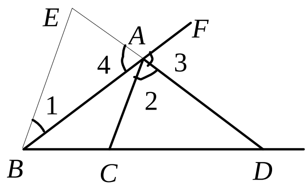
又∵ $\angle AMC=\angle AMB$ ∴ $\triangle AMC\backsim\triangle BMA$，

∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{AM}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{CM}$ ∴ $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BM}{CM}$.

【例7】

已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的外角平分线交对边 $BC$ 的延长线于 $D$，求证：$AD^2=BD\cdot CD-AB\cdot AC$




【解析】

在 $\triangle ABC$ 外作 $\angle ABE=\angle ADB$ 交 $DA$ 的延长线于点 $E$，

∵ $\angle 2=\angle 3$，$\angle 3=\angle 4$，∴ $\angle 2=\angle 4$，又∵ $\angle 1=\angle BDE$，∴ $\triangle AEB\backsim\triangle ACD$

∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{AB}{AD}$，即 $AE\cdot AD=AB\cdot AC$，①

由 $\triangle AEB\backsim\triangle ACD$ 可得：$\angle ACD=\angle E$，又∵ $\angle ADC=\angle BDE$，

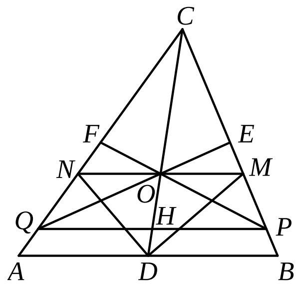
∴ $\triangle DAC\backsim\triangle DBE$，∴ $DA\cdot DE=DC\cdot DB$，②

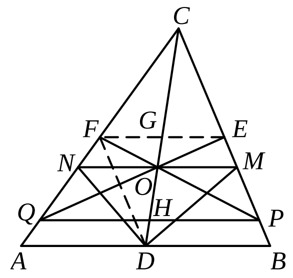
②－①得：$DA\cdot DE-AE\cdot AD=DC\cdot DB-AB\cdot AC$

∴ $AD(DE-AE)=DC\cdot DB-AB\cdot AC$，即 $AD^2=BD\cdot CD-AB\cdot AC$.

【例8】

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$D$、$E$、$F$ 分别是 $AB$、$BC$、$AC$ 的中点，$DM$、$DN$ 分别是 $\triangle CDB$ 和 $\triangle CDA$ 的角平分线，$MN$ 交 $CD$ 于 $O$，$EO$、$FO$ 的延长线分别交 $AC$、$BC$ 于 $Q$、$P$．求证：$PQ=CD$．




【解析】

连结 $EF$，则 $EF /\!/ AB$．设 $EF$ 交 $CD$ 于 $G$，则由平行线截割定理有 $EG=FG$．

因 $DM$ 和 $DN$ 是角平分线，有 $\dfrac{CM}{BM}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{CN}{AN}$．

从而，$MN /\!/ AB /\!/ EF$，且 $\angle CDM=\angle MDB=\angle DMN$．

又由平行线性质，有 $MO=NO$，且 $MO=DO$．

因此 $\dfrac{PO}{PF}=\dfrac{MO}{EF}=\dfrac{NO}{EF}=\dfrac{QO}{QE}$，则 $PQ /\!/ EF /\!/ AB$．

设 $PQ$ 交 $CD$ 于 $H$，则由平行线性质，有 $QH=PH$．

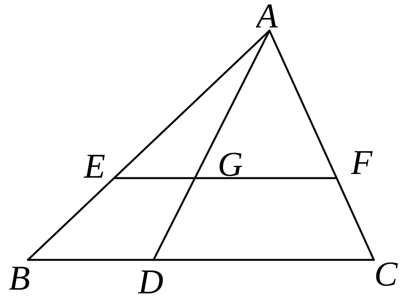
连 $DF$，则 $DF /\!/ BC$，即有 $\dfrac{CO}{OD}=\dfrac{PO}{OF}$．

而 $\dfrac{CD}{EF}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{CO}{OM}=\dfrac{CO}{OD}$，$\dfrac{PQ}{EF}=\dfrac{PH}{FG}=\dfrac{PO}{OF}$，于是 $\dfrac{CD}{EF}=\dfrac{PQ}{EF}$．故 $PQ=CD$．

## 模块三　线束定理

【例9】

在 $\triangle ABC$ 中 $D$ 为 $BC$ 边上一点，$E$、$F$ 分别为 $AB$、$AC$ 上的点，连接 $AD$、$EF$ 有 $EF /\!/ BC$，$EF$ 交 $AD$ 于点 $G$．则 $\dfrac{EG}{FG}=\dfrac{BD}{CD}$．

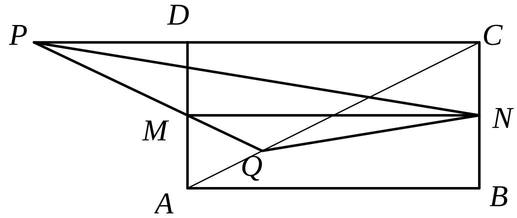



【解析】

$\because EF \parallel BC$， $\therefore \frac{EG}{BD}=\frac{AG}{AD}=\frac{GF}{DC}$，故 $\frac{EG}{FG}=\frac{BD}{CD}$.

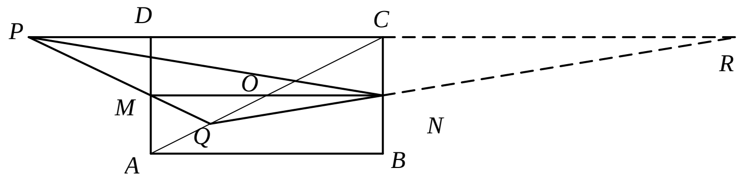
【例10】

$M$、$N$ 分别是矩形的边 $AD$、$BC$ 的中点，在边 $CD$ 的延长线上取点 $P$，$PM$ 交对角线 $AC$ 于 $Q$．证明：$NM$ 平分 $\angle PNQ$．



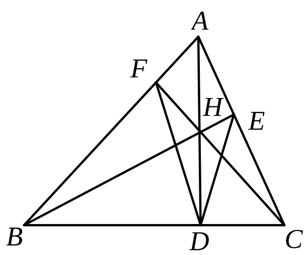

【解析】

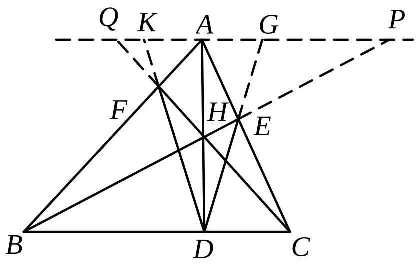
设 $AC$ 交 $MN$ 于 $O$，易知 $MO=NO$．
延长 $PC$、$QN$ 交于 $R$．
因此 $MN \parallel CD$，由线束定理知 $\frac{PC}{RC}=\frac{MO}{ON}=1$．又 $NC \perp PR$，则 $PN=RN$，
从而 $\angle MNQ=\angle R=\angle RPN=\angle PNM$．故 $NM$ 平分 $\angle PNQ$．




【例11】

如图，$H$ 是 $\triangle ABC$ 的高 $AD$ 上的任一点，$BH$、$CH$ 分别交 $AC$、$AB$ 于 $E$、$F$．求证：$\angle EDH=\angle FDH$．




【解析】

过 $A$ 作 $BC$ 的平行线分别交 $CF$、$DF$、$DE$、$BE$ 的延长线于 $Q$、$K$、$G$、$P$，
分别过 $H$、$E$、$F$ 的三条直线都截 $BC$ 于 $B$、$D$、$C$ 三点，从而有 $\frac{BD}{CD}=\frac{AP}{AQ}$ ①，

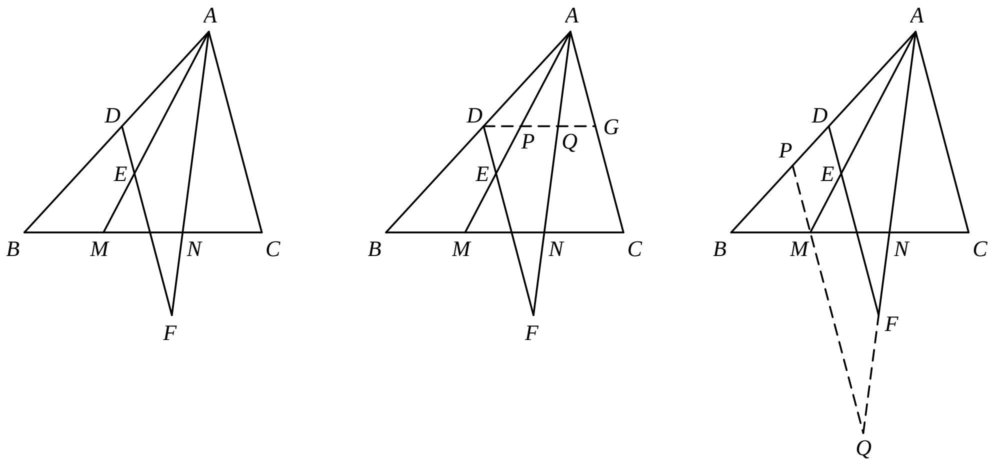
$\frac{CD}{BC}=\frac{AG}{AP}$ ②，$\frac{BC}{BD}=\frac{AQ}{AK}$ ③．

由①×②×③，得 $\frac{AG}{AK}=1$，即 $AG=AK$．

利用 $\mathrm{Rt}\triangle ADK \cong \mathrm{Rt}\triangle ADG$，即有 $\angle EDH=\angle FDH$．

【例12】

如图，$M$、$N$ 为 $\triangle ABC$ 边 $BC$ 上的两点，且满足 $BM=MN=NC$，一条平行于 $AC$ 的直线分别交 $AB$、$AM$ 和 $AN$ 的延长线于点 $D$、$E$ 和 $F$．求证：$EF=3DE$．




【解析】

方法一：如上中图，过 $D$ 作 $DG\parallel BC$ 交 $AC$ 于 $G$，交 $AM$、$AN$ 于 $P$、$Q$，

由线束定理可知 $DP=PQ=QG$，$\because DF\parallel AC$，

$\therefore \frac{DE}{AG}=\frac{DP}{PG}=\frac{1}{2}$，$\frac{DF}{AG}=\frac{DQ}{QG}=2$，$\therefore \frac{DE}{DF}=\frac{1}{4}$，$\therefore EF=3DE$．

过 $E$ 点或 $F$ 点作 $BC$ 的平行线也可得到类似的证法．

方法二：如上右图，过 $M$ 作 $PQ\parallel DF$，交 $AB$ 于 $P$，交 $AF$ 延长线于 $Q$，

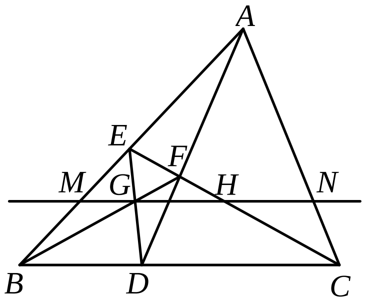
则有 $AC\parallel DF\parallel PQ$，$\therefore \frac{PM}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$，$\frac{QM}{AC}=\frac{MN}{NC}=1$，

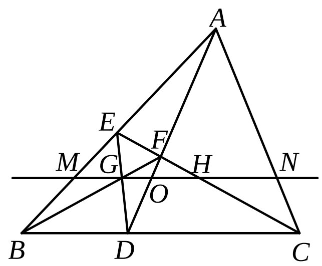
$\therefore \frac{PM}{QM}=\frac{1}{3}$，由线束定理可知 $\frac{DE}{EF}=\frac{PM}{QM}=\frac{1}{3}$，即 $EF=3DE$．

过 $B$ 点或 $N$ 点作 $DF$ 的平行线也可得到类似的证法．

【例13】

如图，已知 $D$、$E$ 分别是 $\triangle ABC$ 的边 $BC$、$AB$ 上的点，$AD$、$CE$ 交于 $F$，$BF$、$DE$ 交于 $G$，过 $G$ 作 $BC$ 的平行线分别交 $AB$、$CE$、$AC$ 于 $M$、$H$、$N$．求证：$GH=NH$．




【解析】

设 $MN$ 交 $AD$ 于 $O$，分别过 $E$、$F$、$A$ 的三条直线都截 $BC$ 于 $B$、$D$、$C$．

三次应用平行线截割性质，有

$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{MG}{GH}$ ①，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{GO}{OH}$ ②，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{MO}{ON}$ ③

由①、②应用等比定理，有

$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{MG+GO}{GH+OH}=\dfrac{MO}{GH+OH}$④，

由③、④，有 $\dfrac{MO}{GH+OH}=\dfrac{MO}{ON}=\dfrac{MO}{OH+NH}$．

从而 $GH+OH=OH+HN$．故 $GH=NH$．

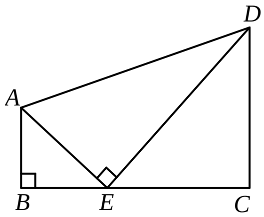
# 笔记整理

# 课后作业

1. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AB // DC$ ， $B=90°$ ，$E$ 为 $BE$ 上一点，且 $AE \perp ED$ .

（1）求证： $\triangle ABE \backsim \triangle ECD$；

（2）若 $AB=3$， $BE=4$， $DC=8$，求 $DE$ 的长.




【解析】

（1）∵ $AB // CD$， $\angle B=90°$

∴ $\angle C=90°$， ∴ $\angle B=\angle C$， ∴ $\angle BAE+\angle AEB=90°$，

又∵ $AE \perp ED$， ∴ $\angle AEB+\angle DEC=90°$

∴ $\angle BAE=\angle DEC$， ∴ $\triangle ABE \backsim \triangle ECD$

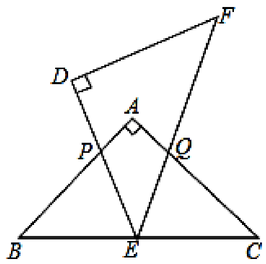
（2）∵ $\triangle ABE \backsim \triangle ECD$， ∴ $\dfrac{AB}{EC}=\dfrac{BE}{CD}$， ∵ $AB=3$， $BE=4$， $DC=8$，

∴ $EC=6$，在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中， $\angle C=90°$， $DE=\sqrt{EC^2+CD^2}=10$ .

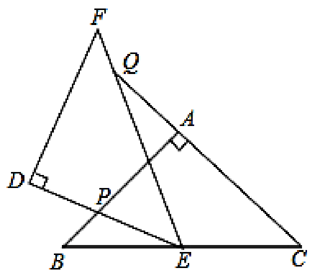
2. 如图，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle EDF=90°$，$\triangle DEF$ 的顶点 $E$ 与 $\triangle ABC$ 的斜边 $BC$ 的中点重合. 将 $\triangle DEF$ 绕点 $E$ 旋转，旋转过程中，线段 $DE$ 与线段 $AB$ 相交于点 $P$，线段 $EF$ 与射线 $CA$ 相交于点 $Q$.

（1）如图①，当点 $Q$ 在线段 $AC$ 上，且 $AP=AQ$ 时，求证：$\triangle BPE \cong \triangle CQE$；

（2）如图②，当点 $Q$ 在线段 $CA$ 的延长线上时，求证：$\triangle BPE \backsim \triangle CEQ$；并求当 $BP=a$，$CQ=\dfrac{9}{2}a$ 时，$P$、$Q$ 两点间的距离（用含 $a$ 的代数式表示）.



图①



图②

【解析】

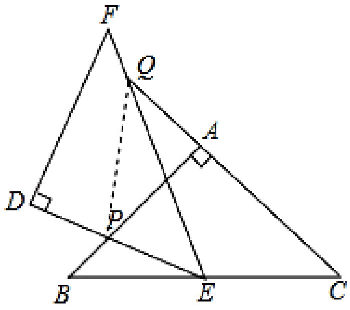
（1）证明：∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

∴ $\angle B=\angle C=45°$，$AB=AC$， ∵ $AP=AQ$， ∴ $BP=CQ$，

∵ $E$是$BC$ 的中点， ∴ $BE=CE$，

在 $\triangle BPE$和$\triangle CQE$ 中 $\begin{cases} BE=CE \\ \angle B=\angle C \\ BP=CQ \end{cases}$， ∴ $\triangle BPE \cong \triangle CQE(SAS)$.

（2）连接 $PQ$，



图②

$\because \triangle ABC$和$\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形，

$\therefore \angle B=\angle C=\angle DEF=45°$，$\because \angle BEQ=\angle EQC+\angle C$

即 $\angle BEP+\angle DEF=\angle EQC+\angle C$，

$\therefore \angle BEP+45°=\angle EQC+45°$，$\therefore \angle BEP=\angle EQC$，

$\therefore \triangle BPE \backsim \triangle CEQ$，$\therefore \dfrac{BP}{CE}=\dfrac{BE}{CQ}$，

$\because BP=a$，$CQ=\dfrac{9}{2}a$，$BE=CE$，

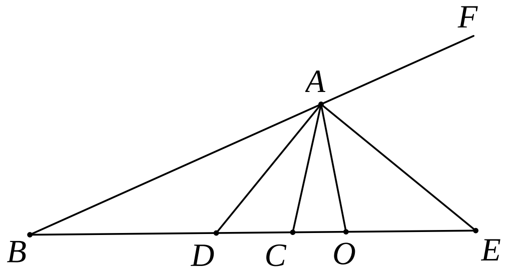
$\therefore BE=CE=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}a$，$\therefore BC=3\sqrt{2}a$，$\therefore AB=AC=3a$，

$\therefore AQ=CQ-AC=\dfrac{3}{2}a$，$PA=AB-BP=2a$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle APQ$ 中，$PQ=\sqrt{AQ^2+AP^2}=\dfrac{5}{2}a$．

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 与 $\angle A$ 相邻的外角平分线交 $BC$ 和它的延长线于 $D$、$E$ 两点，设 $DE$ 的中点为 $O$．

求证：（1）$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BE}{EC}$；（2）$OA^2=OB\cdot OC$，（3）$OB:OC=AB^2:AC^2$．




【解析】

（1）由内角平分线性质得 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$，由外角平分线性质得 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$．

故有 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BE}{EC}$

（2）$\because OD=OE$，$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BO-OD}{DO-OC}$，$\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{BO+OD}{DO+OC}$，即 $\dfrac{BO-OD}{DO-OC}=\dfrac{BO+OD}{DO+OC}$，

运用等比定理得到 $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{OD}{OC}$，$\therefore OD^2=BO\cdot OC$

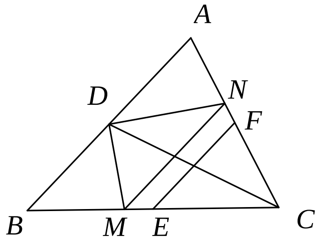
$\because \angle DAE=\dfrac{1}{2}\left(\angle BAC+\angle CAF\right)=90°$，$\therefore AO^2=OD^2=BO\cdot OC$．

（3）由上题知 $\dfrac{BO-OD}{DO-OC}=\dfrac{BO+OD}{DO+OC}=\dfrac{AB}{AC}$，

平方得到 $\dfrac{BO^2+OD^2-2BO\cdot OD}{DO^2+OC^2-2DO\cdot OC}=\dfrac{BO^2+OD^2+2BO\cdot DO}{DO^2+OC^2+2DO\cdot OC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$，

由等比定理得到 $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{4BO\cdot OD}{4DO\cdot OC}=\dfrac{BO}{OC}$，即 $OB:OC=AB^2:AC^2$．

4. 设 $D$、$E$、$F$ 分别是 $\triangle ABC$ 的边 $AB$、$BC$、$CA$ 的中点，$\angle BDC$ 及 $\angle ADC$ 的角平分线分别交 $BC$ 及 $AC$ 于点 $M$、$N$．求证：$\frac{1}{EF}+\frac{1}{DC}=\frac{2}{MN}$．




【解析】

由角平分线性质，有 $\frac{BM}{MC}=\frac{DB}{DC}$，$\frac{AN}{NC}=\frac{AD}{DC}$．

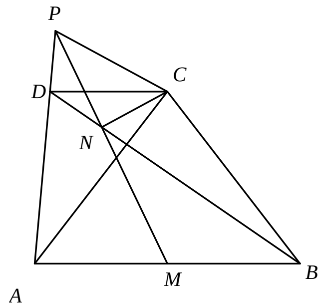
而 $AD=DB$，故 $\frac{BM}{MC}=\frac{AN}{NC}$，

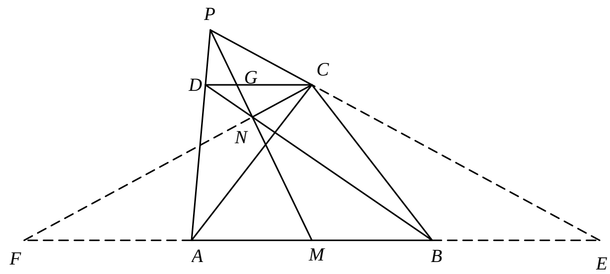
从而 $MN\parallel AB$，即有 $\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{CN}=\frac{BC}{CM}$．

又由 $\frac{BM}{MC}=\frac{DB}{DC}$，有 $\frac{DB+DC}{DC}=\frac{BM+MC}{MC}=\frac{BC}{MC}=\frac{AB}{MN}$．

又由 $EF=\frac{1}{2}AB=DB$，得 $\frac{2EF}{MN}=\frac{AB}{MN}=\frac{DB+DC}{DC}=\frac{EF+DC}{DC}$，故 $\frac{1}{EF}+\frac{1}{DC}=\frac{2}{MN}$．

5. 梯形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 和腰 $BC$ 相等，$M$ 是底边 $AB$ 的中点，$P$ 是腰 $AD$ 延长线上的点，$PM$ 交 $BD$ 于 $N$．求证：$\angle ACP+\angle BCN=180^\circ$．




【解析】

设 $PC$ 交 $AB$ 延长线于 $E$，$CN$ 交 $BA$ 延长线于 $F$，$PN$、$DC$ 交于 $G$．

因过点 $P$ 的三条直线被 $AB$、$CD$ 所截，则 $\frac{AE}{AM}=\frac{CD}{DG}$．

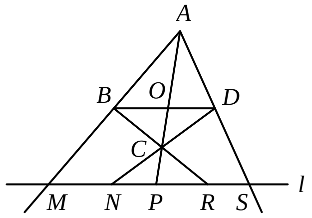
又过点 $N$ 的三条直线被 $AB$、$CD$ 所截，则 $\frac{BF}{BM}=\frac{CD}{DG}$．

又 $AM=BM$，则 $AE=BF$．

注意到 $AC=BC$，$\angle CAB=\angle CBA$，则 $\triangle ACE\cong\triangle BCF$，

故 $\angle ACP+\angle BCN=180^\circ$．

6. 如图,在四边形 $ABCD$ 中，$AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$，直线 $l$ 平行于 $BD$，且与 $AB$ 、$DC$ 、$BC$ 、 $AD$ 及 $AC$ 的延长线分别相交于点 $M$ 、 $N$ 、 $R$ 、 $S$ 和 $P$ . 求证： $PM\cdot PN=PR\cdot PS$ .




【解析】

$\because BD\parallel MS$ ， $\therefore \dfrac{PN}{PR}=\dfrac{OD}{BO}$ ；

$\because BD\parallel MS$ ， $\therefore \dfrac{PS}{PM}=\dfrac{OD}{BO}$ $\therefore \dfrac{PN}{PR}=\dfrac{PS}{PM}\Rightarrow PM\cdot PN=PR\cdot PS$ .

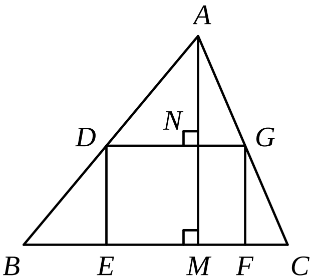
# 第 5 讲　相似三角形综合

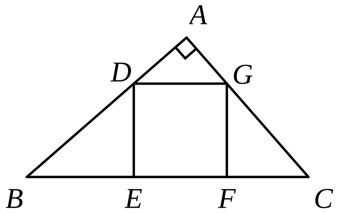
## 知识集锦

**1、与内接矩形有关的相似问题**

如左下图，已知四边形 $DEFG$ 是 $\triangle ABC$ 的内接矩形，$EF$ 在 $BC$ 边上，$D$、$G$ 分别在 $AB$、$AC$ 边上，则有：$\triangle ADG \backsim \triangle ABC$，$\triangle ADN \backsim \triangle ABM$，$\triangle AGN \backsim \triangle ACM$，$\dfrac{DG}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AN}{AM}$.

如右下图，特别地，当 $\angle BAC=90^\circ$ 时，有 $\triangle ADG \backsim \triangle EBD \backsim \triangle FGC \backsim \triangle ABC$.




**2、相似常用模型的构造**

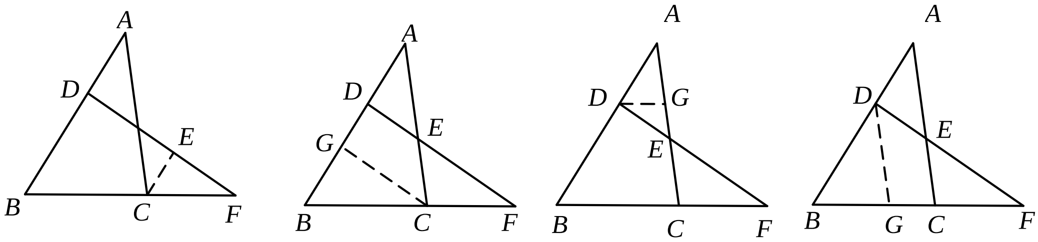
如果两个三角形相似，则对应边成比例，对应角相等.因此相似三角形常用来考查倒边倒角的工具，常用相似三角形来考察线段的比例、乘积和乘积相等的关系.

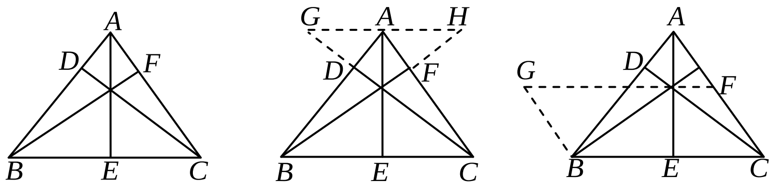
（1）遇到线段的比例关系，通常构造常见的 A 字型、8 字型去转化.

（2）遇到线段的乘积关系，通常要找斜 A 型、斜 8 型或者构造斜 A 型和斜 8 型去转化.

（3）遇到线段的乘积相等，通常要倒比例去证明.

常见构造平行线的方法：



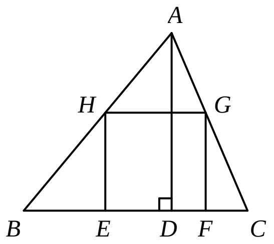


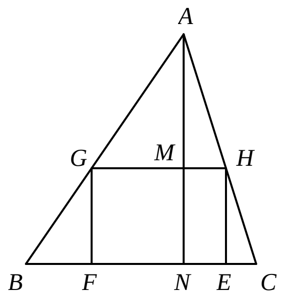
# 模块一　四边形与相似综合

【例1】

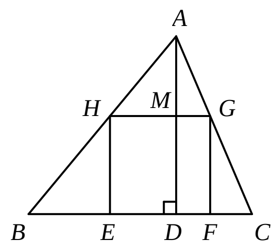
（1）如左下图，$\triangle ABC$ 中，正方形 $EFGH$ 的两个顶点 $E$ 、 $F$ 在 $BC$ 上，另两个顶点 $G$ 、 $H$ 分别在 $AC$ 、 $AB$ 上， $BC=15$ ， $BC$ 边上的高 $AD=10$ ，求 $S_{正方形EFGH}$ .

（2）如右下图，矩形 $EFGH$ 内接于 $\triangle ABC$ ， $F$ 、$E$ 在 $BC$ 边上，$G$ 、$H$ 分别在 $AB$ 、$AC$ 上， $AN\perp BC$ 于 $N$ ，交 $GH$ 于 $M$ ，若矩形周长为 24， $BC=12$ ， $AM=7$ ，求矩形 $EFGH$ 的面积.




【解析】




（1）设正方形 $EFGH$ 的边长为 $x$，$AD$、$HG$ 的交点为 $M$，

则有 $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{HG}{BC}$，即 $\dfrac{10-x}{10}=\dfrac{x}{15}$

解之得， $x=6$，故 $S_{正方形EFGH}=6^2=36$ .

【教师备课提示】

如图，正方形 $EFGH$ 内接于 $\triangle ABC$ 中，AD⊥BC，

设 BC= $a$，AD= $h$，则①正方形边长$=\dfrac{ah}{a+h}$；

② $S_{正方形EFGH}\le\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ .

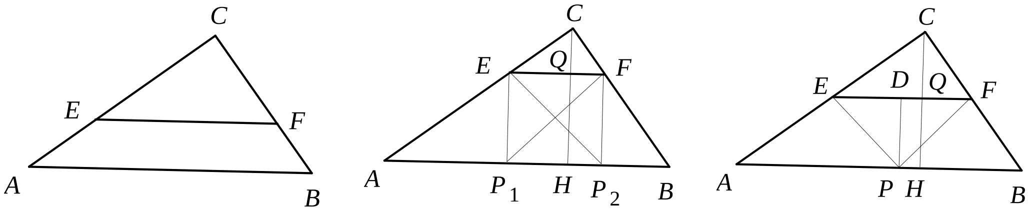
（2）设 $MN=x$， 则 $GF=x$， $GH=\dfrac{24-2x}{2}=12-x$，

又∵ $GH\parallel EF$，∴ $\triangle AGH\backsim\triangle ABC$，∴ $\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{GH}{BC}$，∴ $\dfrac{7}{7+x}=\dfrac{12-x}{12}$， $x^2-5x=0$，

又∵ $x>0$， ∴ $x=5$， ∴ $GF=5$， $GH=7$，

$S_{矩形EFGH}=GF\cdot GH=35$ .

【例2】
如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=5$， $BC=3$， $AC=4$，动点 $E$（与点 $A$， $C$ 不重合）在 $AC$ 边上， $EF\ /\!/\ AB$ 交 $BC$ 于 $F$ 点.
（1）当 $\triangle ECF$ 的面积与四边形 $EABF$ 的面积相等时，求 $CE$ 的长.
（2）当 $\triangle ECF$ 的周长与四边形 $EABF$ 的周长相等时，求 $CE$ 的长.
（3）试问在 $AB$ 上是否存在点 $P$，使得 $\triangle EFP$ 为等腰直角三角形？若不存在，请简要说明理由；若存在，请求出 $EF$ 的长.




【解析】

（1）$\because EF /\!/ AB$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle EFC$
当 $S_{\triangle ECF}=S_{\text{四边形}EABF}$ 时，则 $S_{\triangle CEF}:S_{\triangle CAB}=1:2$
$\therefore \dfrac{CE}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore CE=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.
（2）当 $\triangle ECF$ 与四边形 $EABF$ 周长相等时，则： $CE+CF=AE+AB+BF$
设 $\triangle EFC$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $k$，则 $CE=AC\cdot k=4k$， $CF=BC\cdot k=3k$，
$AE=4-4k$， $CF=3-3k$，
$\therefore 3k+4k=(4-4k)+(3-3k)+5$
解得： $k=\dfrac{6}{7}$，$\therefore CE=AC\cdot k=4k=\dfrac{24}{7}$.
（3）①如图过 $E$（或 $F$），分别作 $AB$ 垂线，垂足为 $P_1$（或 $P_2$），
当 $EF=EP_1$（或 $EF=FP_2$）时，$\triangle EFP_1$（或 $\triangle EFP_2$）为等腰直角三角形.
过 $C$ 作 $CH\perp AB$ 于 $H$，交 $EF$ 于 $Q$，则 $EF=QH$，设 $EF=QH=x$，
由 $AB\cdot CH=AC\cdot BC$，得 $CH=2.4$
$\because \triangle ABC\backsim\triangle EFC$，$\therefore \dfrac{EF}{AB}=\dfrac{CQ}{CH}$，即 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{2.4-x}{2.4}$，$\therefore x=\dfrac{60}{37}$，$\therefore EF=x=\dfrac{60}{37}$
②作 $EF$ 的中垂线 $DP$，交 $AB$ 于 $P$，当 $2DP=EF$ 时 $\triangle EFP$ 为等腰直角三角形.
设 $EF=x$，则 $DP=0.5x$.
$\because \triangle ABC\backsim\triangle EFC$，$\therefore \dfrac{EF}{AB}=\dfrac{CQ}{CH}$，即 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{2.4-0.5x}{2.4}$
解得 $x=\dfrac{120}{49}$，即 $EF=x=\dfrac{120}{49}$.

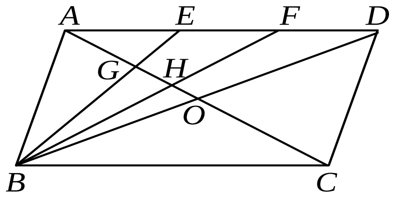
# 模块二　　相似模型综合

【例3】

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$、$BD$ 相交于点 $O$，点 $E$、$F$ 是 $AD$ 上的点，且 $AE=EF=FD$．连接 $BE$、$BF$，使它们分别与 $AO$ 相交于点 $G$、$H$．

（1）求 $EG:BG$ 的值；

（2）设 $AG=a$， $GH=b$， $HO=c$，求 $a:b:c$ 的值．




【解析】

（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AO=\frac{1}{2}AC$，$AD=BC$，$AD\parallel BC$，

∴ $\triangle AEG\backsim\triangle CBG$，∴ $\frac{EG}{GB}=\frac{AG}{GC}=\frac{AE}{BC}$．

∵$AE=EF=FD$，∴$BC=AD=3AE$，

∴$GC=3AG$，$GB=3EG$，∴ $EG:BG=1:3$．

（2）∵$AE=EF=FD$，∴$BC=AD=3AE$，$AF=2AE$．

∵$AD//BC$，∴ $\triangle AFH\backsim\triangle CBH$，∴ $\frac{AH}{HC}=\frac{AF}{BC}=\frac{2AE}{3AE}=\frac{2}{3}$，

∴ $\frac{AH}{AC}=\frac{2}{5}$，即 $AH=\frac{2}{5}AC$．

∵$AC=4AG$，∴ $a=AG=\frac{1}{4}AC$， $b=AH-AG=\frac{2}{5}AC-\frac{1}{4}AC=\frac{3}{20}AC$，

$c=AO-AH=\frac{1}{2}AC-\frac{2}{5}AC=\frac{1}{10}AC$，∴ $a:b:c=\frac{1}{4}:\frac{3}{20}:\frac{1}{10}=5:3:2$．

【例4】

（1）如图 1，$AB // CD$，$AD$ 与 $BC$ 交于点 $P$，过 $P$ 点的直线与 $AB$、$CD$ 分别交于 $E$，$F$．求证：$\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF}$．

（2）如图 2，$AB // CD$，$AD$ 与 $BC$ 交于点 $P$，连接 $CA$、$DB$ 并延长相交于 $O$，连接 $OP$ 并延长交 $CD$ 于 $M$，求证：点 $M$ 为 $CD$ 的中点；

（3）如图 3，在图 2 中，若点 $G$ 从 $D$ 点向左移动（不与 $C$ 点重合），$AG$ 与 $BC$ 交于点 $P$，连 $OP$ 并延长交 $CD$ 于 $M$，直接写出 $MC$、$MG$、$MD$ 之间的关系式．

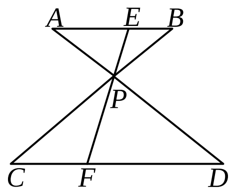


图 1

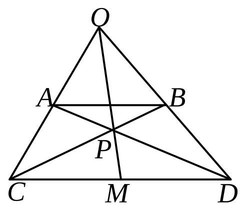


图 2

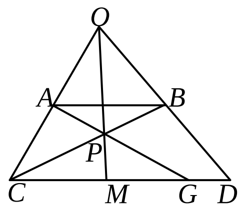


图 3

【解析】

（1）证明：如图 1，∵$AB//CD$，$AD$ 与 $BC$ 交于点 $P$，

∴ $\triangle AEP \backsim \triangle DFP$， $\triangle BEP \backsim \triangle CFP$，

∴ $\frac{AE}{DF}=\frac{EP}{FP}, \frac{BE}{CF}=\frac{EP}{FP}$，

∴ $\frac{AE}{DF}=\frac{BE}{CF}$， ∴ $\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF}$．

（2）证明：如图 2，设 $OM$ 交 $AB$ 于点 N．

∵$AB//CD$，∴ $\triangle AON \backsim \triangle COM$，

$\triangle BON \backsim \triangle DOM$， $\triangle AOB \backsim \triangle COD$，

∴ $\frac{OA}{OC}=\frac{AN}{CM}$， $\frac{OB}{OD}=\frac{BN}{DM}$， $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$， ∴ $\frac{AN}{CM}=\frac{BN}{DM}$①，

∵ $\triangle ANP \backsim \triangle DMP$， $\triangle BNP \backsim \triangle CMP$， $\triangle APB \backsim \triangle DPC$，

∴ $\frac{AN}{DM}=\frac{AP}{DP}$， $\frac{DN}{CM}=\frac{BP}{CP}$， $\frac{AP}{DP}=\frac{BP}{CP}$， ∴ $\frac{AN}{DM}=\frac{BN}{CM}$②，

①÷②，$\frac{DM}{CM}=\frac{CM}{DM}$，∴$CM=DM$，即点 $M$ 为 $CD$ 的中点．

（3）解：$MC^2=MG•MD$，理由如下：如图 3，设 $OM$ 交 $AB$ 于点 $N$．

∵$AB//CD$，∴ $\triangle MCP \backsim \triangle NBP$， $\triangle NAP \backsim \triangle MGP$，

∴ $\frac{MC}{NB}=\frac{MP}{NP}$①， $\frac{NA}{MG}=\frac{NP}{MP}$②，

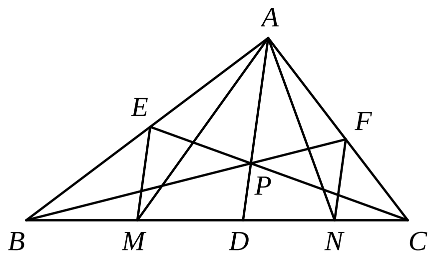
①×②，得 $\frac{MC}{NB}\times\frac{NA}{MG}=\frac{MP}{NP}\times\frac{NP}{MP}=1$， ∴ $\frac{MC}{MG}=\frac{NB}{NA}$．

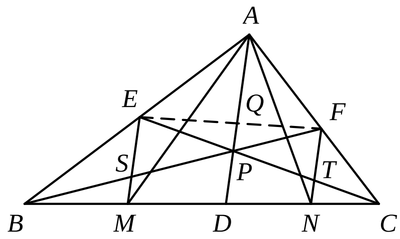
∵ $\triangle AON \backsim \triangle COM$， $\triangle BON \backsim \triangle DOM$， ∴ $\frac{NA}{MC}=\frac{ON}{OM}$， $\frac{NB}{MD}=\frac{ON}{OM}$，

∴ $\frac{NA}{MC}=\frac{NB}{MD}$， ∴ $\frac{MD}{MC}=\frac{NB}{NA}$， ∴ $\frac{MC}{MG}=\frac{MD}{MC}$， ∴ $MC^2=MG\cdot MD$．

【例5】

如图，已知 $\triangle ABC$， $AD$ 平分 $\angle BAC$， $BP$ 交 $AC$ 于 $F$， $CP$ 交 $AB$ 于 $E$，过 $E$、 $F$ 分别作 $EM // AD$， $FN // AD$， $EM$、 $FN$ 与 $BC$ 交于点 $M$、 $N$，连结 $AM$、 $AN$．求证：$AD$ 平分 $\angle MAN$．




【解析】

连结 $EF$ 交 $AD$ 于 $Q$，设 $BF$、 $EM$ 交点为 $S$， $CE$、 $FN$ 交点为 $T$，

$\because EM // AD // FN$， $\therefore \dfrac{EM}{ES}=\dfrac{AD}{AP}=\dfrac{FN}{FT}$，

又 $\because AQ$ 平分 $\angle EAF$， $\therefore \dfrac{EM}{FN}=\dfrac{ES}{FT}=\dfrac{EP}{PT}=\dfrac{EQ}{QF}=\dfrac{AE}{AF}$，

$\because EM // AD // FN$， $\therefore \angle BEM=\angle BAD=\angle CAD=\angle CFN$，

$\therefore \angle AEM=\angle AFN$， $\therefore \triangle AEM \backsim \triangle AFN$，

$\therefore \angle EAM=\angle FAN$， $\therefore \angle MAD=\angle NAD$，

$\therefore AD$ 平分 $\angle MAN$．

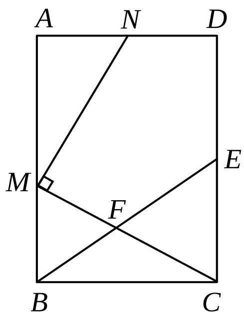
【例6】

如图，在矩形 $ABCD$ 中，$E$ 为 $CD$ 的中点，$F$ 为 $BE$ 上的一点，连结 $CF$ 并延长交 $AB$ 于点 $M$，$MN\perp CM$ 交射线 $AD$ 于点 $N$.

（1）当 $F$ 为 $BE$ 中点时，求证：$AM=CE$；

（2）若 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{EF}{BF}=2$，求 $\dfrac{AN}{ND}$ 的值；

（3）若 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{EF}{BF}=n$，当 $n$ 为何值时，$MN // BE$.




【解析】

（1）当 $F$ 为 $BE$ 中点时，如图 1，则有 $BF=EF$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=DC$，$AB // DC$，

$\therefore \angle MBF=\angle CEF$，$\angle BMF=\angle ECF$.

在△$BMF$和△$ECF$中，$\begin{cases}\angle MBF=\angle CEF\\ \angle BMF=\angle ECF\\ BF=EF\end{cases}$

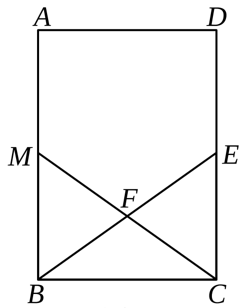


图1

∴△$BMF$≌△$ECF$，∴$BM=EC$.

∵$E$为$CD$的中点，∴ $EC=\dfrac{1}{2}DC$，

∴ $BM=EC=\dfrac{1}{2}DC=\dfrac{1}{2}AB$，

∴$AM=BM=EC$；

（2）如图2，设$MB=a$，∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$AD=BC$，$AB=DC$，

$\angle A=\angle ABC=\angle BCD=90°$，$AB/\!/DC$，

∴△$ECF$∽△$BMF$，

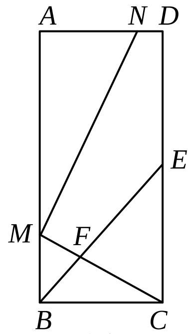


图2

∴ $\dfrac{EC}{BM}=\dfrac{EF}{BF}=2$，∴$EC=2a$，

∴$AB=CD=2CE=4a$，$AM=AB-MB=3a$.

∵ $\dfrac{AB}{BC}=2$，∴$BC=AD=2a$.

∵$MN\perp MC$，∴$\angle CMN=90°$，

∴$\angle AMN+\angle BMC=90°$.

∵$\angle A=90°$，∴$\angle ANM+\angle AMN=90°$，

∴$\angle BMC=\angle ANM$，∴△$AMN$∽△$BCM$，

∴ $\dfrac{AN}{BM}=\dfrac{AM}{BC}$，∴ $\dfrac{AN}{a}=\dfrac{3a}{2a}$，

∴ $AN=\dfrac{3}{2}a$，$ND=\dfrac{1}{2}a$，∴ $\dfrac{AN}{ND}=3$；

（3）当 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{EF}{BF}=n$时，如图3，

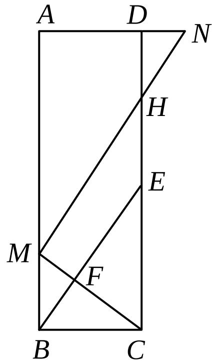


图3

设$MB=a$，同（2）可得$BC=2a$，$CE=na$.

∵$MN/\!/BE$，$MN\perp MC$，∴$\angle EFC=\angle HMC=90°$，

∴$\angle FCB+\angle FBC=90°$.　∵$\angle MBC=90°$，

∴$\angle BMC+\angle FCB=90°$，∴$\angle BMC=\angle FBC$.

∵$\angle MBC=\angle BCE=90°$，∴△$MBC$∽△$BCE$，

∴ $\dfrac{MB}{BC}=\dfrac{BC}{CE}$，

即 $\dfrac{a}{2a}=\dfrac{2a}{na}$，∴$n=4$.

**【教师备课提示】**这道题主要是A字型、8字型和三垂直模型的综合.

# 模块三　常见的相似构造

**【例7】**

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BE$ 是 $AC$ 边上的中线．

（1）如图 1，点 $D$ 在 $BC$ 边上，$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{1}{2}$，$AD$ 与 $BE$ 相交于点 $P$，则 $\dfrac{AP}{PD}$ 的值________；

（2）如图 2，点 $D$ 在 $BC$ 的延长线上，$BE$ 的延长线与 $AD$ 交于点 $P$，$DC$：$BC$：$AC$=1：2：3．①求 $\dfrac{AP}{PD}$ 的值；②若 $CD$=2，则 $BP$=________．

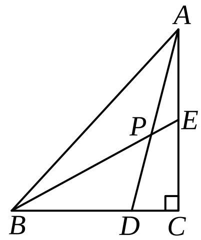



图 1

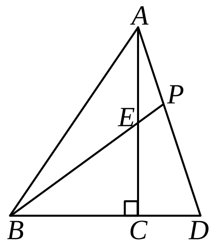



图 2

**【解析】**

（1）如图 1，作 $DF\parallel AC$ 交 $BE$ 于 $F$，

$\therefore \dfrac{DF}{CE}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore \dfrac{AP}{PD}=\dfrac{AE}{DF}=\dfrac{CE}{DF}=\dfrac{3}{2}$，故答案为：$\dfrac{3}{2}$；

（2）①如图 2，作 $CH\parallel AD$ 交 $BP$ 于 $H$，

$\therefore \dfrac{CH}{AP}=\dfrac{CE}{AE}$，又 $AE=EC$，$\therefore CH=AP$，

$\because CH\parallel AD$，$\therefore \dfrac{CH}{PD}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \dfrac{AP}{PD}=\dfrac{2}{3}$；

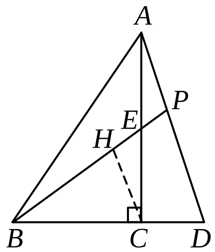



图 2

②$\because DC:BC:AC=1:2:3$，$CD=2$，

$\therefore BC=4$，$AC=6$，$EC=\dfrac{1}{2}AC=3$，

由勾股定理得，$BE=5$，

$\because CH\parallel AD$，$AE=EC$，$\therefore HE=EP$，

设 $HE=EP=x$，则 $BH=5-x$，$BP=5+x$，

$\because CH\parallel AD$，$\therefore \dfrac{CH}{BP}=\dfrac{BC}{BD}$，即 $\dfrac{5-x}{5+x}=\dfrac{2}{3}$，

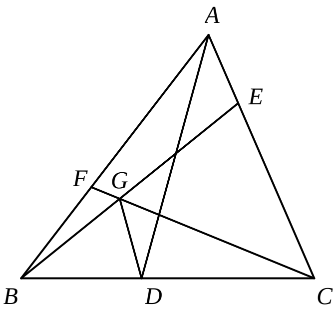
解得 $x=1$，则 $BP=5+x=6$．

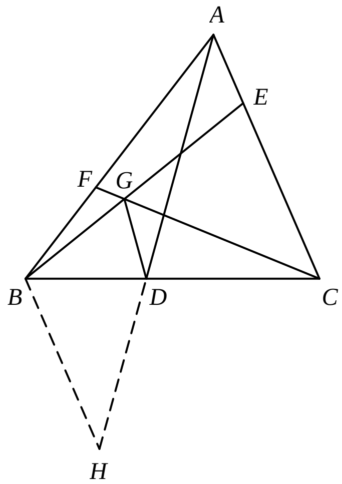
**【教师备课提示】**这道题主要是考查求比例，构造平行线得到 A 字型、8 字型，这道题构造相对简单．

【例8】

如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 上一点，在 $AC$ 上取一点 $E$，使得 $\angle EBC=\angle CAD$，在 $AB$ 上取一点 $F$，使得 $\angle FCB=\angle BAD$，$BE$、$CF$ 交于点 $G$，连结 $AD$、$DG$．

求证：$\angle ADC=\angle GDB$．




【解析】

过 $B$ 点作 $AC$ 的平行线 $BH$ 交 $AD$ 的延长线于 $H$，连结 $DH$，

则 $\angle H=\angle DAC=\angle GBC$，$\angle GCB=\angle BAH$，$\therefore \triangle HBA\backsim\triangle BGC$，$\therefore \dfrac{BH}{BG}=\dfrac{AH}{BC}$．

易证 $\triangle BDH\backsim\triangle CDA$，$\therefore \dfrac{BH}{AC}=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{DH}{AD}$

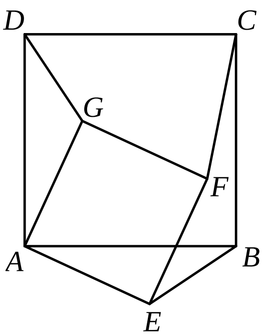
$\therefore \dfrac{BD+DC}{DC}=\dfrac{AD+DH}{AD}$，即 $\dfrac{BC}{AH}=\dfrac{DC}{AD}=\dfrac{BD}{DH}$

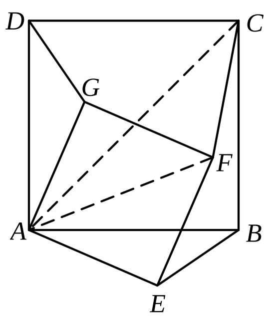
$\therefore \dfrac{BH}{BG}=\dfrac{DH}{BD}$，又 $\because \angle GBD=\angle H$，$\therefore \triangle BHD\backsim\triangle GBD$．

$\therefore \angle GDB=\angle BDH=\angle ADC$．

【例9】

如图，大正方形 $ABCD$ 及小正方形 $AEFG$ 共顶点 $A$，连 $BE$、$CF$、$DG$，求 $BE:CF:DG$．




【解析】

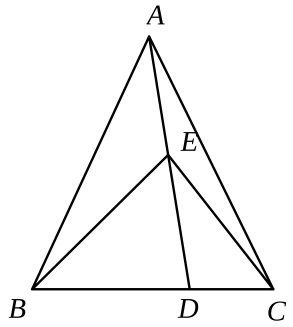
显然有 $\triangle ABE\cong\triangle ADG$，所以 $BE=DG$．

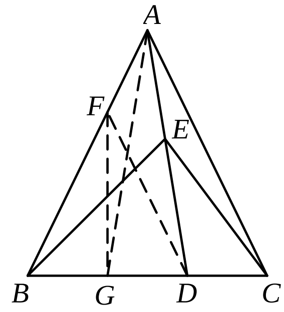
连 $AC$、$AF$，易得 $\angle CAF=\angle BAE$，$\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$，$\dfrac{AF}{AE}=\sqrt{2}$，

则 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AF}{AE}$，故 $\triangle ACF\backsim\triangle ABE$．从而 $\dfrac{CF}{BE}=\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$．所以 $BE:CF:DG=1:\sqrt{2}:1$．

【例10】

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $D$ 是底边上一点， $E$ 是线段 $AD$ 上一点，且 $\angle BED=2\angle CED=\angle BAC$ ．求证： $BD=2CD$ ．




【解析】

过 $D$ 作 $DF\parallel CA$ 交 $AB$ 于 $F$ ，在 $BD$ 上取点 $G$ ，使 $BG=DC$ ，连结 $AG$ 、 $FG$ ．

由 $DF\parallel CA$ ，有 $\angle BFD=\angle BAC$ ， $FB=FD$ ．

又 $AB=AC$ ， $\angle ABG=\angle ACD$ ， $BG=DC$ ，知 $\triangle ABG\cong\triangle ACD$ ．

于是， $AG=AD$ ， $\angle FAG=\angle EAC$ ．

而 $\angle ABE=\angle BED-\angle BAE=\angle BAC-\angle BAE=\angle EAC=\angle FDA$ ，注意到 $\angle BAE$ 公用，

则 $\triangle ABE\backsim\triangle ADF$ ，即有 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AD}$ ，从而 $\dfrac{AF}{AG}=\dfrac{AE}{AC}$ ．

又 $\angle FAG=\angle EAC$ ，故 $\triangle FAG\backsim\triangle EAC$ ，有 $\angle AFG=\angle AEC$ ．

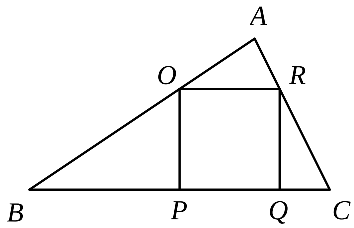
从而 $\angle BFG=\angle DEC=\dfrac{1}{2}\angle BED=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BFD$ ，则 $\triangle BFG\cong\triangle DFG$ ．即有 $BG=GD$ ，

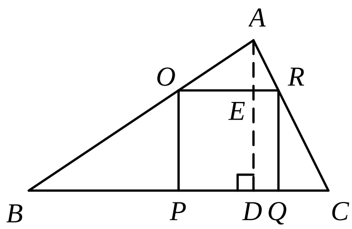
故 $BD=2CD$ ．

# 笔记整理

# 课后作业

1. 如图，正方形 $OPQR$ 内接于 $\triangle ABC$，已知 $S_{\triangle AOR}=1$，$S_{\triangle BOP}=3$ 和 $S_{\triangle CRQ}=1$，那么正方形 $OPQR$ 的边长是________.




【解析】

过 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于 $D$，交 $OR$ 于 $E$，设正方形边长为 $x$，

$S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}BP\cdot OP=3$，$\therefore BP=\frac{6}{x}$，

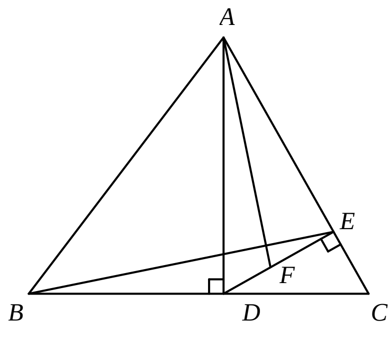
$S_{\triangle CRQ}=\frac{1}{2}CQ\cdot QR=1$，$\therefore CQ=\frac{2}{x}$，

$S_{\triangle AOR}=\frac{1}{2}AE\cdot OR=1$，$\therefore AE=\frac{2}{x}$，

由 $\triangle AOR\backsim\triangle ABC$，得到 $\frac{AE}{AD}=\frac{OR}{BC}$，

$\therefore \dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}+x}=\dfrac{x}{\frac{6}{x}+x+\frac{2}{x}}$，化简得 $x^4=16$，$x=2$.

2. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于 $D$，$DE\perp AC$ 于 $E$，$F$ 是 $DE$ 上一点，且满足 $DF:FE=CD:BD$. 求证 $AF\perp BE$.



【解析】

$\because$ $AD \perp BC$， $DE \perp AC$，

易得 $\angle ADF = \angle BCE$， $\triangle ADE \backsim \triangle DCE$，$\therefore$ $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DE}{CE}$ ①，

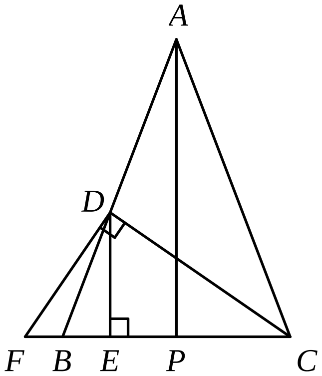
$\because$ $\dfrac{DF}{FE} = \dfrac{CD}{BD}$，$\therefore$ $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{DF}{DE}$ （合比） ②，

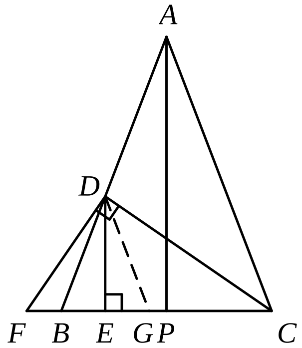
$\therefore$ ①×② 得 $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{DF}{CE}$， 又$\because$ $\angle ADF = \angle BCE$，

$\therefore$ $\triangle ADF \backsim \triangle BCE$，$\therefore$ $\angle DAF = \angle CBE$，

设 $AF$ 与 $BE$ 交于 $G$ 点，则 $\angle AGB = \angle ADB = 90°$，$\therefore$ $AF \perp BE$ .

3. 如图， $AP$ 为等腰 $\triangle ABC$ 底边 $BC$ 上的高， $CD$ 平分 $\angle ACB$，与 $AB$ 交于点 $D$，过 $D$ 作 $DE \perp BC$ 于 $E$， $DF \perp CD$ 交直线 $BC$ 于 $F$ . 求证： $CF = 4PE$ .




【解析】

取 $BC$ 中点 $G$，连结 $DG$，

由内角平分线定理可知，

$\dfrac{PE}{PB} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AD}{AD+DB} = \dfrac{AC}{AC+BC}$， 又 $PB = \dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore$ $PE = \dfrac{AC \cdot BC}{2(AC+BC)}$，

$\because$ $\angle CDF = 90°$， $G$ 是 $CF$ 中点，

$\therefore$ $\angle DGF = 2\angle DCF = \angle ACF$，$\therefore$ $DG \parallel AC$，

$\therefore$ $\dfrac{DG}{AC} = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BD}{AB+BD} = \dfrac{BC}{AC+BC}$，$\therefore$ $DG = \dfrac{AC \cdot BC}{AC+BC}$，

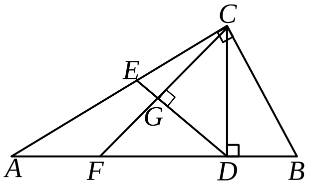
$\therefore$ $DG = 2PE$，$\therefore$ $CF = 4PE$ .

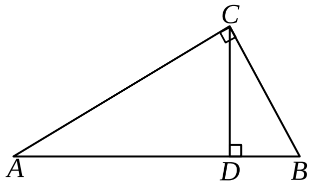
4. 如图，Rt△*ABC* 中，∠*ACB*=90°，∠*A*=30°，*BC*=2，*CD* 是斜边 *AB* 上的高，点 *E* 为边 *AC* 上一点（点 *E* 不与点 *A*、*C* 重合），联结 *DE*，作 *CF*⊥*DE*，*CF* 与边 *AB*、线段 *DE* 分别交于点 *F*、*G*；

（1）求线段 *CD*、*AD* 的长；

（2）设 *CE*=*x*，*DF*=*y*，求 *y* 关于 *x* 的函数解析式，并写出自变量 *x* 的取值范围；

（3）联结 *EF*，当△*EFG* 与△*CDG* 相似时，求线段 *CE* 的长.




备用图

【解析】

（1）在 Rt△*BCD* 中，*BC*=2，∠*A*=30°，∴ $CD=\sqrt{3}$，同理 *AD*=3；

（2）∵∠*CDE*=∠*BFC*=90°- ∠*DCF*，∠*ECD*=∠*B*=60°，

∴△*CDE*∽△*BFC*，∴ $\dfrac{CE}{BC}=\dfrac{CD}{BF}$，

即 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{y+1}$，∴ $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{x}-1$，（$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le x<2\sqrt{3}$）；

（3）∠*EGF*=∠*CGD*=90°

①当△*EGF*∽△*DGC* 时，∠*GEF*=∠*GDC*，

∴*EF*∥*DC*，∴ $\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{DF}{AD}$，

即 $\dfrac{x}{2\sqrt{3}}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{x}-1}{3}$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{39}-\sqrt{3}}{3}$；

②当△*EGF*∽△*CGD* 时，∴∠*GEF*=∠*GCD*=∠*GDF*，

∴*EF*=*DF*，又∵*CF*⊥*DE*，

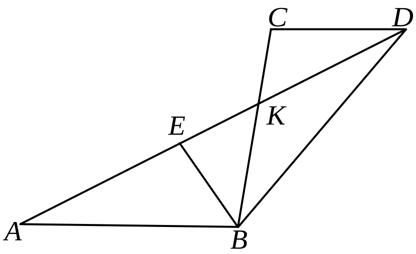
∴*EG*=*DG*，∴ $CD=CE=\sqrt{3}$；

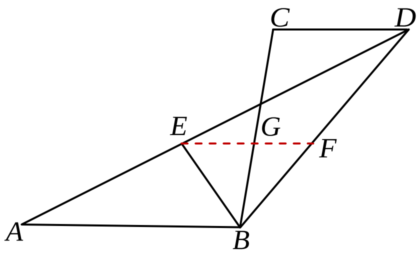
综上，$CE=\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{\sqrt{39}-\sqrt{3}}{3}$.

5. 如图，已知线段 $AB\parallel CD$，$AD$ 与 $BC$ 相交于点 $K$，$E$ 是线段 $AD$ 上一动点.

（1）若 $BK=\frac{5}{2}KC$，求 $\frac{CD}{AB}$ 的值；

（2）连接 $BE$，若 $BE$ 平分 $\angle ABC$，则当 $AE=\frac{1}{2}AD$ 时，猜想线段 $AB$、$BC$、$CD$ 三者之间有怎样的等量关系？请写出你的结论并予以证明．再探究：当 $AE=\frac{1}{n}AD\ (n>2)$，而其余条件不变时，线段 $AB$、$BC$、$CD$ 三者之间又有怎样的等量关系？请直接写出你的结论，不必证明．




【解析】

（1）$\because BK=\frac{5}{2}KC$，$\therefore \frac{CK}{BK}=\frac{2}{5}$，又$\because CD\parallel AB$，

$\therefore \triangle KCD\backsim\triangle KBA$　　$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{CK}{BK}=\frac{2}{5}$

（2）当 $BE$ 平分 $\angle ABC$，$AE=\frac{1}{2}AD$ 时，$AB=BC+CD$；

证明：取 $BD$ 的中点为 $F$，连接 $EF$ 交 $BC$ 于 $G$ 点，由中位线定理，

得 $EF\parallel AB\parallel CD$，$\therefore G$ 为 $BC$ 的中点，$\angle GEB=\angle EBA$，又$\because \angle EBA=\angle GBE$，

$\therefore \angle GEB=\angle GBE$，$\therefore EG=BG=\frac{1}{2}BC$，而 $GF=\frac{1}{2}CD$，$EF=\frac{1}{2}AB$，

$\because EF=EG+GF$，即：$\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}CD$；$\therefore AB=BC+CD$；

同理，当 $AE=\frac{1}{n}AD$（$n>2$）时，$EF\parallel AB$

，同理可得：$\frac{BG}{BC=\frac{AE}{AD}}=\frac{1}{n}$，则 $BG=\frac{1}{n}\cdot BC$，则 $EG=BG=\frac{1}{n}\cdot BC$，

$\frac{GF}{CD}=\frac{BG}{BC}=\frac{1}{n}$，则 $GF=\frac{1}{n}\cdot CD$，$\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AD}=\frac{n-1}{n}$，$\therefore \frac{1}{n}\cdot BC+\frac{1}{n}\cdot CD=\frac{n-1}{n}\cdot AB$，

$\therefore BC+CD=(n-1)AB$，故当 $AE=\frac{1}{n}AD$（$n>2$）时，$BC+CD=(n-1)AB$.

6. 如图 1，$AD$ 是△ $ABC$ 的中线，过点 $D$ 的直线交 $AB$ 边于点 $M$，交 $AC$ 边的延长线于点 $N$.

（1）①若 $AM=\frac{3}{4}AB$，求 $\frac{NC}{NA}$ 的值.

②若 $AM=mAB\ (m>0)$，求 $\frac{NC}{NA}$ 的值（用含 $m$ 的代数式表示）

（2）如图 2，$AD$ 是△ $ABC$ 的中线，$G$ 是 $AD$ 上任意一点（点 $G$ 不与 $A$、$D$ 重合），过点 $G$ 的直线交边 $AB$ 于 $M'$，交 $AC$ 边的延长线于 $N'$，若 $AG=aAD$，$AM'=bAB$（$a$＞0，$b$＞0），请直接写出 $\frac{N'C}{N'A}$ 的值（用含 $a$、$b$ 的代数式表示）.

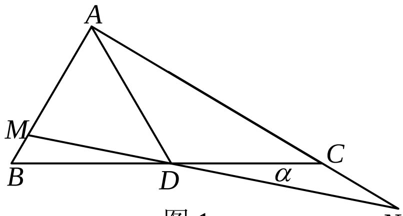


图 1

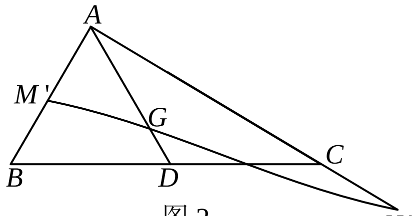


图 2

【解析】

（1）①如图 1 中，作 $CF∥AB$ 交 $MN$ 于点 $F$，

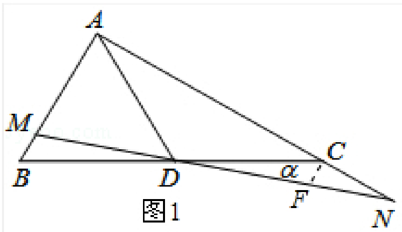


图1

则△ $BDM$∽△ $CDF$，∴ $\frac{BM}{CF}=\frac{BD}{CD}$，

又 $BD=CD$，∴$BM=CF$；

∵ $AM=\frac{3}{4}AB$，∴ $BM=\frac{1}{3}AM$；

∵$CF∥AB$，∴ $\frac{NC}{NA}=\frac{CF}{AM}=\frac{1}{3}$；②∵$CF∥AB$，∴△$CFN$∽△$AMN$，

∴ $\frac{NC}{NA}=\frac{CF}{AM}$，又∵△$BDM$∽△$CDF$，$BD=CD$，∴△$BDM$≌△$CDF$，∴$BM=CF$，

∵$AM=mAB$，∴$BM=AB-AM=$（1 - $m$）$AB$，∴ $\frac{NC}{NA}=\frac{CF}{AM}=\frac{BM}{AM}=\frac{1-m}{m}$；

（2）如图 2，过点 $D$ 作 $MN∥M'N'$交 $AB$ 于 $M$，交 $AC$ 的延长线于 $N$，

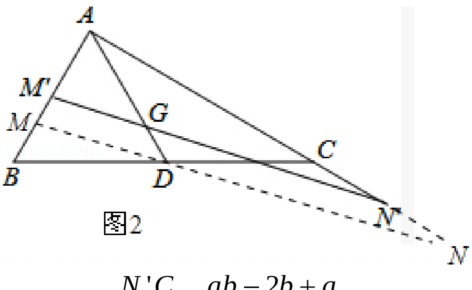


图2

则 $\frac{AM'}{AM}=\frac{AG}{AD}=\frac{AN'}{AN}$，

∴ $\frac{b}{m}=a=\frac{AN'}{AN}$，即 $m=\frac{b}{a}$，$AN'=aAN$，

由（1）得，$CN=\frac{1-m}{m}AN$，

∴ $AC=\frac{2m-1}{m}AN$，则 $N'C=\frac{ma-2m+1}{m}AN$，∴ $\frac{N'C}{N'A}=\frac{ab-2b+a}{ab}$.

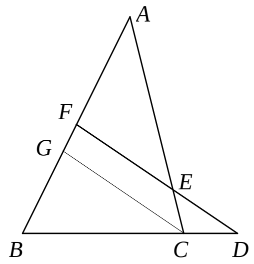
# 第 6 讲 梅涅劳斯定理

## 知识集锦

**模块一：梅涅劳斯定理的应用**

**梅涅劳斯定理：**如果一条直线与$\triangle ABC$的三边$AB$、$BC$、$CA$或其延长线交于$F$、$D$、$E$点，那么$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$．这条直线叫$\triangle ABC$的梅氏线，$\triangle ABC$叫梅氏三角形．

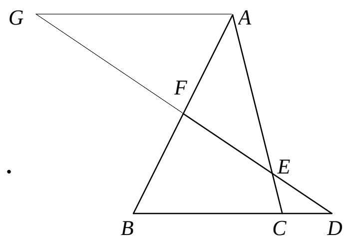
**梅涅劳斯定理的证明：**




证法一：如图，过$C$作$CG\parallel DF$

$\because \frac{DB}{DC}=\frac{FB}{FG}$，$\frac{EC}{AE}=\frac{FG}{AF}$

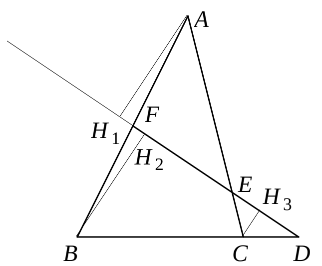
$\therefore \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{FB}{FG}\cdot\frac{FG}{AF}=1$．




证法二：如图，过$A$作$AG\parallel BD$交$DF$的延长线于$G$

$\therefore \frac{AF}{FB}=\frac{AG}{BD}$，$\frac{BD}{DC}=\frac{BD}{DC}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{DC}{AG}$

三式相乘即得：$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AG}{BD}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{DC}{AG}=1$．




证法三：如图，分别过$A$、$B$、$C$作$DE$的垂线，

分别交于$H_1$、$H_2$、$H_3$．则有$AH_1\parallel BH_2\parallel CH_3$，

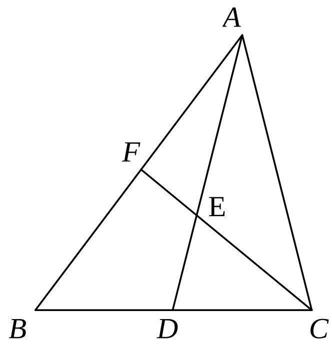
$\therefore \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AH_1}{BH_2}\cdot\frac{BH_2}{CH_3}\cdot\frac{CH_3}{AH_1}=1$．

**模块二：梅涅劳斯逆定理**

**梅涅劳斯逆定理：**若$F$、$D$、$E$分别是$\triangle ABC$的三边$AB$、$BC$、$CA$或其延长线的三点，如果$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，则$F$、$D$、$E$三点共线．

# 模块一　梅涅劳斯定理的应用

【例1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 为中线，过点 $C$ 任作一直线交 $AB$ 于点 $F$，交 $AD$ 于点 $E$，求证：$AE:ED=2AF:FB$．

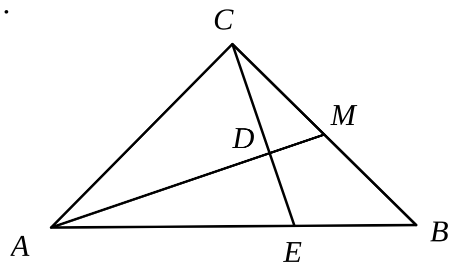



【解析】

∵直线 $FEC$ 是 $\triangle ABD$ 的梅氏线，

∴ $\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DC}{BC}\cdot\frac{BF}{FA}=1$．而 $\frac{DC}{BC}=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{AE}{ED}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{BF}{FA}=1$，即 $\frac{AE}{ED}=\frac{2AF}{BF}$．

【例2】 如图，在△ $ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$．$AM$ 为 $BC$ 边上的中线，$CD\perp AM$ 于点 $D$，$CD$ 的延长线交 $AB$ 于点 $E$．求 $\frac{AE}{EB}$．




【解析】

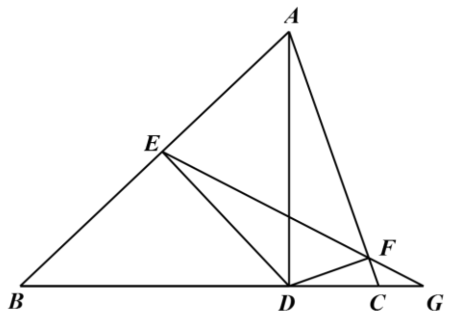
由题设，在 $\mathrm{Rt}\triangle AMC$ 中，$CD\perp AM$，$AC=2CM$，

由射影定理 $\frac{AD}{DM}=\frac{AD\cdot AM}{DM\cdot AM}=\frac{AC^2}{CM^2}=4$．

对 $\triangle ABM$ 和截线 $EDC$，由梅涅劳斯定理，

$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BC}{CM}\cdot\frac{MD}{DA}=1$，即 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}=1$．∴ $\frac{AE}{EB}=2$．

【例3】 已知 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的高，点 $D$ 在 $BC$ 内，且 $BD=3$，$CD=1$，作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，$DF\perp AC$ 于点 $F$，连接 $EF$ 并延长，交 $BC$ 的延长线于点 $G$，求 $CG$.




【解析】

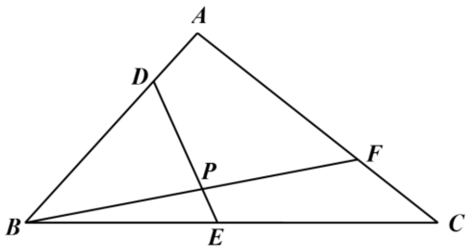
如图，设 $CG=x$，$EFG$ 是$\triangle ABC$ 的梅氏线.

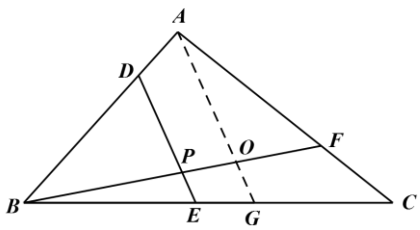
则由梅涅劳斯定理$\dfrac{4+x}{x}\cdot\dfrac{CF}{FA}\cdot\dfrac{AE}{EB}=1$.

显然的 $\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{DC^2}{AD^2}$，$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AD^2}{BD^2}$，

于是$\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{4+x}{x}=1$，得 $x=\dfrac{1}{2}$.

【例4】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$BC=8$，$BD=BE$，$AF=2FC$，$BF$ 交 $DE$ 于点 $P$. 求 $DP:PE$.



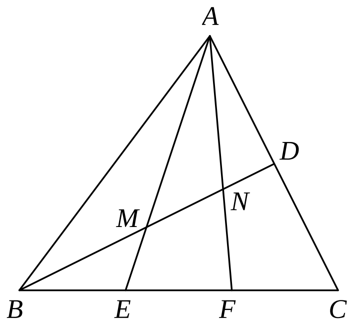

【解析】

如图,过点 $A$ 作 $AG\,//\,DE$ 交 $BC$ 于 $G$，交 $BF$ 于 $O$，

则可得：$AB=BG=5$，且 $\dfrac{DP}{PE}=\dfrac{AO}{OG}$.

$\because$直线 $BF$ 是 $\triangle ACG$ 的梅氏线，$\therefore$ $\dfrac{AO}{OG}\cdot\dfrac{GB}{BC}\cdot\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{AO}{OG}\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{1}{2}=1$.

【例5】 如图,在 $\triangle ABC$ 中，$D$ 为 $AC$ 中点，$BE=EF=FC$ ,求证：$BM:MN:ND=5:3:2$ .




【解析】

∵直线 $AE$ 是 $\triangle BCD$ 的梅氏线，∴ $\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DA}{AC}\cdot\frac{CE}{EB}=1$ .

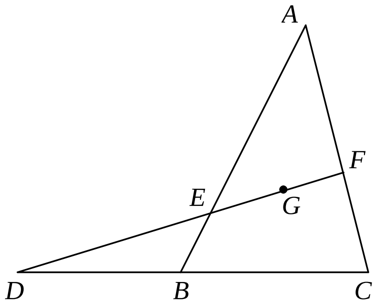
∴ $\frac{BM}{MD}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$， ∴ $\frac{BM}{MD}=\frac{1}{1}$

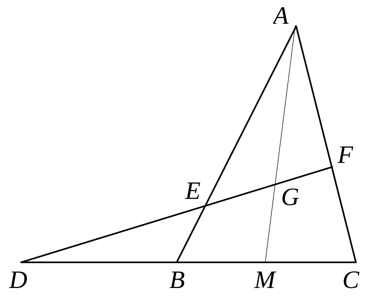
∵直线 $AF$ 是 $\triangle BCD$ 的梅氏线，∴ $\frac{BN}{ND}\cdot\frac{DA}{AC}\cdot\frac{CF}{FB}=1$ ,

∴ $\frac{BN}{ND}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$， $\frac{BN}{ND}=\frac{4}{1}$ . ∴ $BM:MN:ND=5:3:2$ .

【例6】 过 $\triangle ABC$ 的重心 $G$ 的直线分别交 $AB$ 、$AC$ 于点 $E$ 、$F$ ,交 $CB$ 的延长线于点 $D$ .

求证： $\frac{BE}{EA}+\frac{CF}{FA}=1$ .




【解析】

作直线 $AG$ 交 $BC$ 于 $M$ ，∵ $MG:GA=1:2$ ， $BM=MC$ .

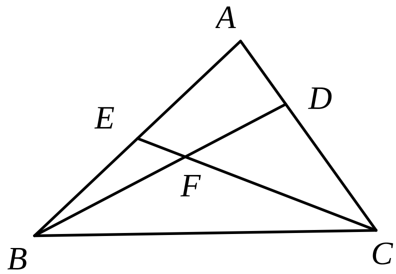
∴ $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DM}\cdot\frac{MG}{GA}=\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DM}\cdot\frac{1}{2}=1$ .

∴ $\frac{EB}{AE}=\frac{BD}{2DM}$ . 同理， $\frac{CF}{FA}=\frac{DC}{2DM}$ ,

而 $BD+DC=BD+BD+2BM=2(BD+BM)=2DM$

∴ $\frac{BE}{EA}+\frac{CF}{FA}=\frac{BD}{2DM}+\frac{DC}{2DM}=\frac{2DM}{2DM}=1$ .

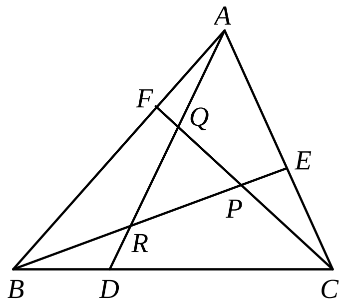
【例7】 如图，点 $D$ 、 $E$ 分别在 $\triangle ABC$ 的边 $AC$ 、 $AB$ 上， $AE=EB$， $\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$， $BD$ 与 $CE$ 交于点 $F$ ， $S_{\triangle ABC}=40$ . 求 $S_{AEFD}$ .




【解析】

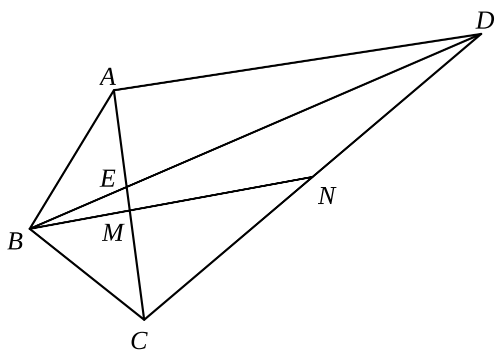
对 $\triangle ECA$ 和截线 $BFD$ , 由梅氏定理得: $\frac{EF}{FC}\cdot\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$ , 即 $\frac{EF}{FC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$ , 所以 $\frac{EF}{FC}=\frac{1}{3}$ . 所以 $S_{\triangle BFE}=\frac{1}{4}S_{\triangle BEC}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$ ， 进而 $S_{AEFD}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BEF}=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{8}\right)S_{\triangle ABC}=\frac{11}{40}\cdot 40=11$ .

【例8】 如图，设 $\frac{BD}{CD}=p$， $\frac{CE}{AE}=q$， $\frac{AF}{FB}=r$，试用 $p$ 、 $q$ 、 $r$ 表示 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}$ .




【解析】
$\frac{FA}{AB}=\frac{r}{1+r}$， $\frac{BD}{DC}=p$，
用梅氏定理得出 $\frac{CQ}{QF}=1\div\left(\frac{r}{1+r}\cdot p\right)=\frac{1+r}{rp}$，所以 $\frac{CQ}{CF}=\frac{1+r}{1+r+rp}$，
所以 $\frac{S_{\triangle AQC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AF}{AB}\cdot\frac{CQ}{CF}=\frac{r}{1+r}\cdot\frac{1+r}{1+r+rp}=\frac{r}{1+r+rp}$，
同理，$\frac{S_{\triangle BRA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{p}{1+p+pq}$， $\frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{q}{1+q+qr}$，
结合 $S_{\triangle PQR}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AQC}-S_{\triangle BRA}-S_{\triangle BPC}$，
最后算得 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(pqr-1)^2}{(1+r+pr)(1+p+pq)(1+q+qr)}$ .

【例9】 在凸四边形 $ABCD$ 中，点 $N$ 在 $CD$ 上， $BN$ 与 $AC$ 交于点 $M$，若 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}$，且 $S_{\triangle ABC}=1$， $S_{\triangle ABD}=3$， $S_{\triangle BCD}=4$，求证：点 $M$ 、 $N$ 分别为 $AC$ 与 $CD$ 的中点.




【解析】
由 $S_{\triangle ABD}=3$， $S_{\triangle BCD}=4$ 可得 $S_{\square ABCD}=7$，
所以 $S_{\triangle ACD}=7-1=6$ .

根据面积比与线段比的关系有：

$\dfrac{BE}{ED}=\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{3}{4}$.

所以设 $\dfrac{CN}{CD}=k$．则 $\dfrac{AM}{AC}=k$，由 $\dfrac{CN}{CD}=k$，可得 $\dfrac{CN}{ND}=\dfrac{k}{1-k}$，

$\dfrac{MC}{AC}=1-k$．而 $\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{4}{7}$，所以 $\dfrac{EM}{AC}=\dfrac{4}{7}-1+k=k-\dfrac{3}{7}$，所以 $\dfrac{EM}{MC}=\dfrac{k-\frac{3}{7}}{1-k}$.

由梅涅劳斯定理有 $\dfrac{EM}{MC}\cdot\dfrac{CN}{ND}\cdot\dfrac{DB}{BE}=1$．即 $\dfrac{k-\frac{3}{7}}{1-k}\cdot\dfrac{k}{1-k}\cdot\dfrac{7}{1}=1$.

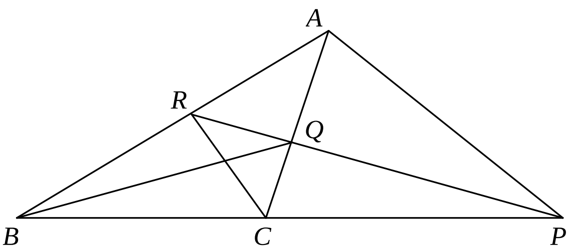
化简为 $7k^2-3k=1-2k+k^2$．$k_1=\dfrac{1}{2},k_2=-\dfrac{1}{3}$.

显然只有 $k=\dfrac{1}{2}$ 为唯一的满足条件的解.

即点 $M$、$N$ 分别为 $AC$ 与 $CD$ 的中点.

## 模块二　梅涅劳斯逆定理

【例10】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的外角平分线与边 $BC$ 的延长线交于点 $P$，$\angle B$ 的平分线与边 $CA$ 交于点 $Q$，$\angle C$ 的平分线与边 $AB$ 交于点 $R$，求证：$P$、$Q$、$R$ 三点共线.




【解析】

$AP$ 是 $\angle BAC$ 的外角平分线，则 $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AB}{CA}$　　①

$BQ$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，则 $\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{BC}{AB}$　　②

$CR$ 是 $\angle ACB$ 的平分线，则 $\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{CA}{BC}$　　③

①×②×③得 $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{AB}{CA}\cdot\dfrac{BC}{AB}\cdot\dfrac{CA}{BC}=1$

因 $R$ 在 $AB$ 上，$Q$ 在 $CA$ 上，$P$ 在 $BC$ 的延长线上，

则根据梅涅劳斯定理的逆定理得：$P$、$Q$、$R$ 三点共线.

**【例11】**从点 $K$ 引四条直线，另两条直线分别交这四条直线于 $A$ 、$B$ 、$C$ 、$D$ 和 $A_1$ 、$B_1$ 、$C_1$ 、 $D_1$，试证： $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}:\frac{A_1D_1}{B_1D_1}$ .

【解析】

若 $AD /\!/ A_1D_1$，结论显然成立；

若 $AD$ 与 $A_1D_1$ 相交于点 $L$，则把梅涅劳斯定理分别用于 $\triangle A_1AL$ 和 $\triangle B_1BL$ 可得：

$\frac{AD}{LD}\cdot\frac{LD_1}{A_1D_1}\cdot\frac{A_1K}{AK}=1$， $\frac{LC}{AC}\cdot\frac{AK}{A_1K}\cdot\frac{A_1C_1}{LC_1}=1$，

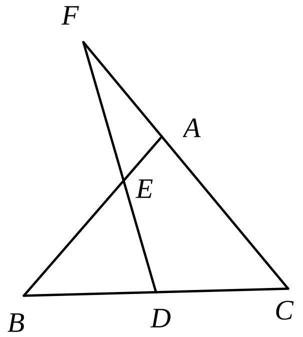
$\frac{BC}{LC}\cdot\frac{LC_1}{B_1C_1}\cdot\frac{B_1K}{BK}=1$， $\frac{LD}{BD}\cdot\frac{BK}{B_1K}\cdot\frac{B_1D_1}{LD_1}=1$

将上面四个式子相乘可得： $\frac{AD}{AC}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{A_1C_1}{A_1D_1}\cdot\frac{B_1D_1}{B_1C_1}=1$.

# 笔记整理

# 课后作业

1. 在△ $ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 的中点，经过点 $D$ 的直线交 $AB$ 于点 $E$，交 $CA$ 的延长线于点 $F$．求证：$\dfrac{FA}{FC}=\dfrac{EA}{EB}$．



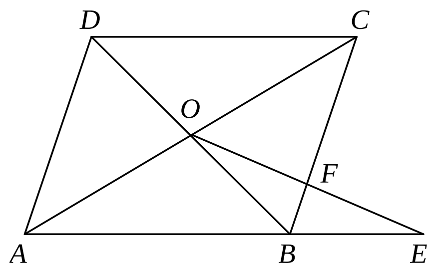

【解析】

直线截 $\triangle ABC$ 三边于 $D$、$E$、$F$ 三点，应用梅氏定理，

知 $\dfrac{CD}{DB}\cdot\dfrac{BE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FC}=1$，又因为 $BD=BC$，

所以 $\dfrac{BE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FC}=1$，即 $\dfrac{FA}{FC}=\dfrac{EA}{EB}$.

2. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 $O$，在 $AB$ 的延长线上任取一点 $E$，连接 $OE$ 交 $BC$ 于点 $F$．若 $AB=a$，$AD=c$，$BE=b$，求 $BF$ 的长.




【解析】

∵ $OE$ 截 $\triangle ABC$ 的三边 $AB$、$AC$、$BC$

或其延长线于 $E$、$O$、$F$ 三点.

∴ $\dfrac{CO}{OA}\cdot\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FC}=1$.

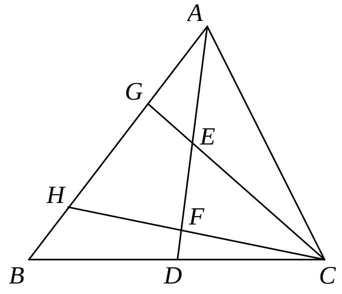
在平行四边形 $ABCD$ 中，∵ $OA=OC$，∴ $\dfrac{OA}{OC}=1$.

∵ $AE=AB+BE=a+b$，∴ $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{a+b}{b}$.

∴ $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{b}{a+b}$，∴ $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{b}{a+2b}$，

∴ $BF=\dfrac{bc}{a+2b}$.

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $D$ 为 $BC$ 的中点， $AE:EF:FD=4:3:1$．求 $AG:GH:AB$．




【解析】

$\because$ $HFC$ 是 $\triangle ABD$ 的梅氏线，

$\therefore$ $\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DF}{FA}=1$．

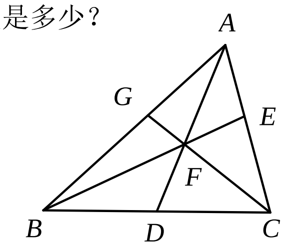
$\because$ $D$ 为 $BC$ 的中点， $AE:EF:FD=4:3:1$，

$\therefore$ $\frac{BC}{DC}=\frac{2}{1}$，$\frac{DF}{FA}=\frac{1}{7}$．$\therefore$ $\frac{AH}{HB}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{7}=1$，$\therefore$ $\frac{AH}{HB}=\frac{7}{2}$．

$\because$ $GEC$ 是 $\triangle ABD$ 的梅氏线，$\therefore$ $\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DE}{EA}=1$，

$\therefore$ $\frac{AG}{GB}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$，$\therefore$ $\frac{AG}{GB}=\frac{1}{2}$．$\therefore$ $AG:GH:HB=3:4:2$．$\therefore$ $AG:GH:AB=3:4:9$．

4. $\triangle ABC$ 中，点 $D$、$E$ 分别是 $BC$， $CA$ 上的点，且 $BD:DC=m:1$，$CE:EA=n:1$． $AD$ 与 $BE$ 交于点 $F$，问 $\triangle ABF$ 的面积与 $\triangle ABC$ 面积的比值是多少？




【解析】

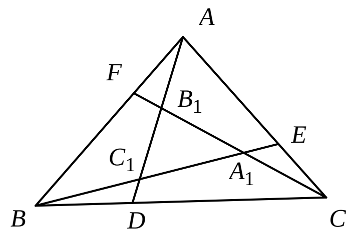
对 $\triangle ADC$ 和截线 $EFB$ 应用梅涅劳斯定理可得：

$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DF}{FA}=1$，$\frac{1}{n}\cdot\frac{m+1}{m}\cdot\frac{DF}{FA}=1$．

所以 $\frac{DF}{FA}=\frac{mn}{m+1}$，进而 $\frac{DF+FA}{FA}=\frac{mn+m+1}{m+1}=\frac{AD}{FA}$．

所以 $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABD}}\cdot\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{FA}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{m+1}{mn+m+1}\cdot\frac{m}{m+1}=\frac{m}{mn+m+1}$．

5. 在 $\triangle ABC$ 的三边 $BC$、$CA$、$AB$ 上分别取点 $D$、$E$、$F$，使得 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{2}$. 若 $BE$ 与 $CF$，$CF$ 与 $AD$，$AD$ 与 $BE$ 的交点分别为 $A_1$、$B_1$、$C_1$. 求证：$\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{7}$.




【解析】

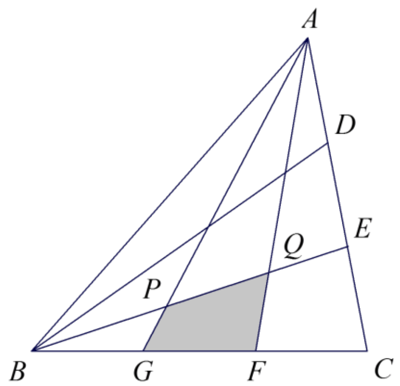
$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DB_1}{B_1A}=1$，即 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{DB_1}{B_1A}=1$，所以 $\dfrac{AB_1}{B_1D}=\dfrac{3}{4}$.

因此 $\dfrac{AB_1}{AD}=\dfrac{3}{7}$，所以 $\dfrac{S_{\triangle AB_1C}}{S_{\triangle ADC}}=\dfrac{3}{7}$.

又因为 $\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{2}{3}$，所以 $\dfrac{S_{\triangle AB_1C}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_{\triangle AB_1C}}{S_{\triangle ADC}}=\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$.

同理 $\dfrac{S_{\triangle BC_1A}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{S_{\triangle CA_1B}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{2}{7}$. 进而可得 $\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{7}$.

6. 如图，$\triangle ABC$ 的面积是 $1\,\text{cm}^2$，$AD=DE=EC$，$BG=GF=FC$，求阴影部分的面积.




【解析】

注意到 $\triangle ACF$ 被 $BE$ 所截，由梅涅劳斯定理可得 $\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{CB}{BF}\cdot\dfrac{FQ}{QA}=1$.

于是 $\dfrac{AQ}{QF}=\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{CB}{BF}=2\times\dfrac{3}{2}=3$.

注意到 $\triangle ACG$ 被 $BE$ 所截，

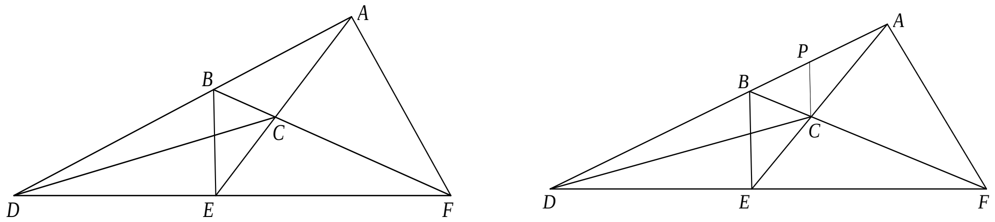
由梅涅劳斯定理可得 $\dfrac{AP}{PG}=\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{CB}{BG}=2\times3=6$.

因此可知 $\dfrac{AQ}{AF}=\dfrac{3}{4}$， $\dfrac{AP}{AG}=\dfrac{6}{7}$．

于是 $\dfrac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle AGF}}=\dfrac{AP\cdot AQ}{AG\cdot AF}=\dfrac{6}{7}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{18}{28}=\dfrac{9}{14}$，

则 $S_{\triangle APQ}=\dfrac{9}{14}S_{\triangle AFG}=\dfrac{9}{14}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{14}$．故知阴影的面积 $S_{PQFG}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{14}=\dfrac{5}{42}\text{cm}^2$．

7. 证明：不等边三角形的三个角的外角平分线与对边的交点是共线的三个点．




【解析】

如图，$CD$、$BE$、$AF$ 分别为三角形 $ABC$ 的三个外角平分线，

分别交 $AB$、$AC$、$BC$ 于 $D$、$E$、$F$．

过 $C$ 作 $BE$ 的平行线，则 $\angle BCP=\angle CBE=\angle EBD=\angle CPB$，

所以 $\triangle BPC$ 是等腰三角形．则 $PB=CB$．

则有：$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{PB}{BA}=\dfrac{CB}{BA}$．同理 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AC}{CB}$； $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BA}{AC}$．

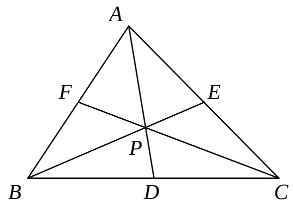
所以 $\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{CB}{BA}\cdot\dfrac{AC}{CB}\cdot\dfrac{BA}{AC}=1$．所以 $D$、$E$、$F$ 共线．

# 第 7 讲　塞瓦定理

## 知识集锦

## 塞瓦定理：

如果$\triangle ABC$的三个顶点与一点$P$的连线$AP$、$BP$、$CP$交对边或其延长线于点$D$、$E$、$F$，如图，那么$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$．通常称点$P$为$\triangle ABC$的塞瓦点．

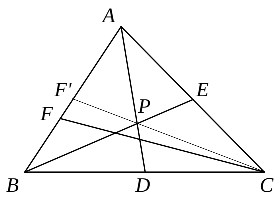


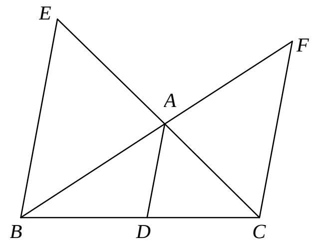

证明：∵直线$FPC$、$EPB$分别是$\triangle ABD$、$\triangle ACD$的梅氏线，

$\therefore\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，$\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AP}{PD}=1$．两式相乘即可得：$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$．

**塞瓦定理的逆定理**

如果点$D$、$E$、$F$分别在$\triangle ABC$的边$BC$、$CA$、$AB$上或其延长线上，并且$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，那么$AD$、$BE$、$CF$相交于一点（或平行）．




证明：（1）若$AD$与$BE$相交于一点$P$时，如图，作直线$CP$交$AB$于$F'$．

由塞瓦定理得：$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$，

又已知$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，$\therefore\frac{AF}{FB}=\frac{AF'}{F'B}$，

$\therefore\frac{AB}{FB}=\frac{AB}{F'B}$，$\therefore FB=F'B$．

$\therefore F'$与$F$重合，$\therefore CF'$与$CF$重合，$\therefore AD$、$BE$、$CF$相交于一点．

（2）若$AD$与$BE$所在直线不相交，则$AD\parallel BE$，如图．

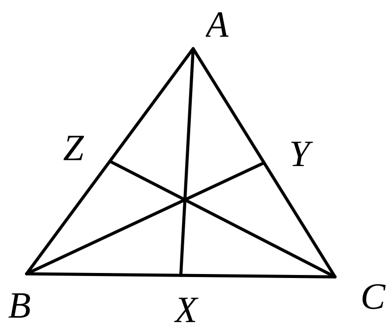
$\therefore\frac{BD}{DC}=\frac{EA}{AC}$，又已知$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，$\therefore\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，即$\frac{CE}{AC}=\frac{FB}{AF}$．

$\therefore BE//FC$，$\therefore AD\parallel BE\parallel FC$．

说明：三线平行的情况在实际题目中很少见．

# 模块一　塞瓦定理及逆定理

【例1】 设 $AX$，$BY$，$CZ$ 是 $\triangle ABC$ 的三条中线，求证：$AX$，$BY$，$CZ$ 三线共点.



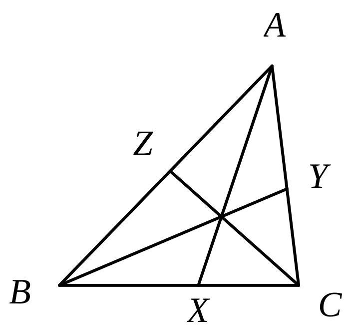

【解析】

由条件知，$BX=XC$，$YC=YA$，$ZA=ZB$.

$\therefore \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$，根据塞瓦定理的逆定理可得

三条中线 $AX$，$BY$，$CZ$ 共点．这个点称为这个三角形的重心.

【例2】 若 $AX$，$BY$，$CZ$ 分别为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线.求证：$AX$，$BY$，$CZ$ 三线共点.




【解析】

由三角形内角平分线定理得：

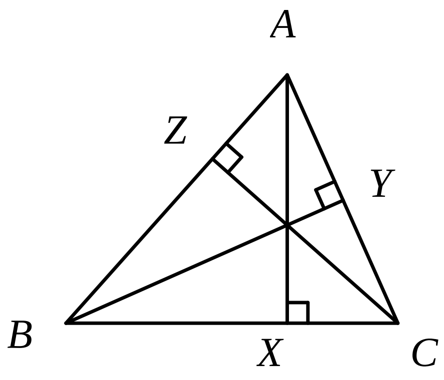
$\frac{BX}{XC}=\frac{AB}{AC}$，$\frac{CY}{YA}=\frac{BC}{BA}$，$\frac{AZ}{ZB}=\frac{AC}{BC}$.

三式分别相乘，得：$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1$.

根据塞瓦定理的逆定理可得三角形三内角平分线 $AX$，$BY$，$CZ$ 共点，

这个点称为这个三角形的内心.

【例3】 若 $AX$，$BY$，$CZ$ 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线，求证： $AX$，$BY$，$CZ$ 三线共点．




【解析】

由 $\triangle ABX \backsim \triangle CBZ$ 得：$\dfrac{BX}{BZ}=\dfrac{AB}{BC}$；

由 $\triangle BYA \backsim \triangle CZA$ 得：$\dfrac{AZ}{AY}=\dfrac{AC}{AB}$；

由 $\triangle AXC \backsim \triangle BYC$ 可得： $\dfrac{YC}{CX}=\dfrac{BC}{AC}$．

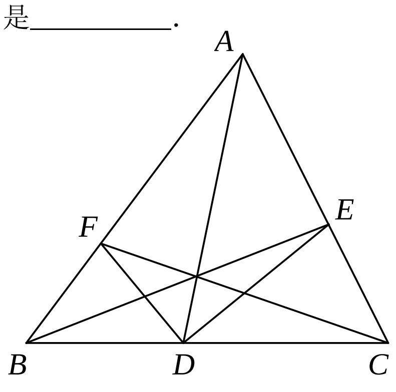
所以 $\dfrac{BX}{BZ}\cdot\dfrac{AZ}{AY}\cdot\dfrac{YC}{CX}=\dfrac{AB}{BC}\cdot\dfrac{AC}{AB}\cdot\dfrac{BC}{AC}=1$．

根据塞瓦定理的逆定理可得三条高线 $AX$，$BY$，$CZ$ 共点．

对直角三角形、钝角三角形，同样也可以证得三条高线共点．

我们把一个三角形三条高线所在直线的交点叫做这个三角形的垂心．

【例4】 在 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 边上任取一点 $D$，设 $\angle ADB$ 、$\angle ADC$ 的平分线与 $AB$ 、$AC$ 分别相交于点 $F$ 、 $E$ ，那么 $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$ 的位置关系是__________．




【解析】

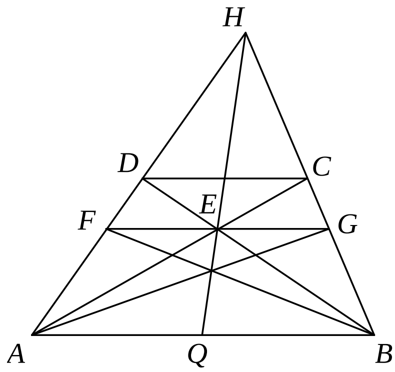
因为 $DF$ 是 $\angle ADB$ 的角平分线．

所以 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AD}{DB}$，同理 $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{CD}{DA}$．

所以 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{DA}=1$.

所以 $AD$、$BE$、$CF$ 三条直线交于一点.

**【例5】** 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AC$、$BD$ 交于点 $E$，$AD$、$BC$ 的延长线交于点 $H$，过点 $E$ 作 $FG\parallel AB$ 交 $AD$ 于点 $F$，交 $BC$ 于点 $G$，求证：$AG$、$BF$、$EH$ 三线共点.




【解析】

设直线 $HE$ 交 $AB$ 于点 $Q$，

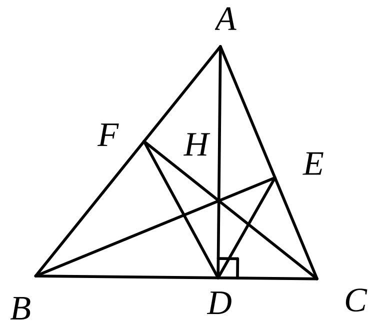
由已知可得 $\frac{HF}{FA}=\frac{HE}{EQ},\frac{BG}{GH}=\frac{EQ}{HE}$，$\therefore\frac{HF}{FA}\cdot\frac{BG}{GH}=1$.

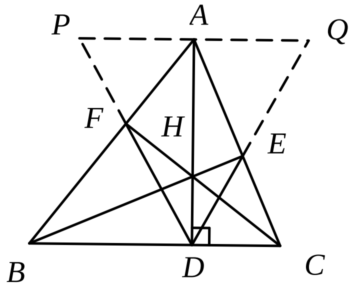
由点 $E$ 为 $\triangle HAB$ 的塞瓦点可得：$\frac{HD}{DA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BC}{CH}=1$，

同理可得：$\frac{HD}{DA}\cdot\frac{BC}{CH}=1$，

$\therefore\frac{AQ}{QB}=1$，$\therefore\frac{HF}{FA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BG}{GH}=1$，$\therefore AG$、$BF$、$EH$ 三线共点.

**【例6】** 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 是 $BC$ 边上的高线，$H$ 是线段 $AD$ 内任意一点，$BH$ 和 $CH$ 的延长线分别交 $AC$、$AB$ 于点 $E$、$F$，求证：$\angle EDH=\angle FDH$.



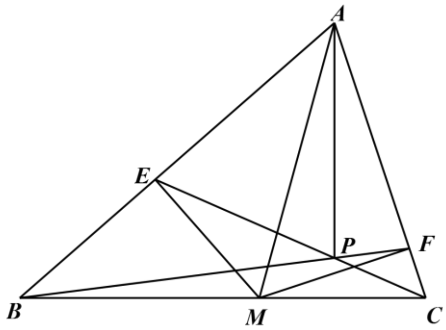



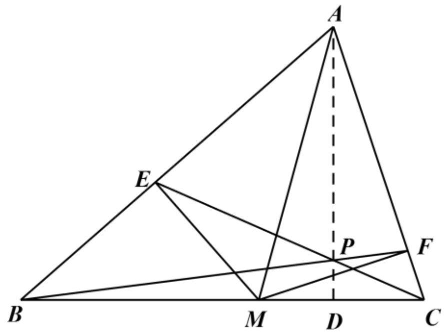

【解析】

过点 $A$ 作 $PQ\parallel BC$，与 $DF$，$DE$ 的延长线分别交于点 $P$，$Q$. 则 $DA\perp PQ$.

由塞瓦定理得 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$．又因为 $PQ /\!/ BC$，所以 $\frac{AF}{FB}=\frac{AP}{BD}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{AQ}$，
所以 $\frac{AP}{BD}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CD}{AQ}=1$．进而 $AP=AQ$．
所以 $PD=QD$，即 $\triangle PQD$ 是等腰三角形，所以 $\angle EDA=\angle FDA$．

【例7】 如图，$AM$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的角平分线，$ME\perp AB$ 于点 $E$，$MF\perp AC$ 于点 $F$，$CE$ 与 $BF$ 交于点 $P$，求证：$AP\perp BC$．



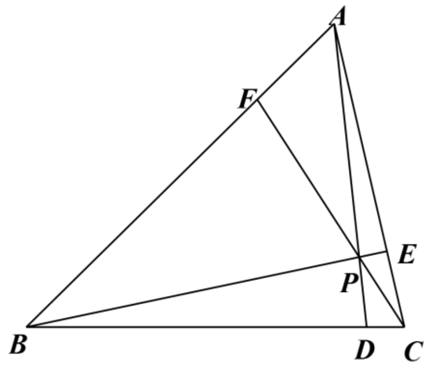




【解析】

作 $AD\perp BC$，易知 $\triangle BEM\backsim\triangle BDA$，则 $\frac{BE}{BD}=\frac{BM}{AB}$；
$\triangle ACD\backsim\triangle MCF$，则 $\frac{CD}{CF}=\frac{AC}{MC}$；
利用角分线定理，有 $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}$；
由角分线的性质，有 $AE=AF$；
于是可得 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$，由塞瓦定理的逆定理可知，
$AD$、$BF$、$CE$ 交于一点，结合题意可知，$AP$、$AD$ 重合，则 $AP\perp BC$．

# 模块二　梅塞综合

【例8】 如图，$E$、$F$ 分别为$\triangle ABC$ 的 $AC$、$AB$ 边上的点，且 $AE=3EC$，$BF=3FA$，$BE$、$CF$ 交于点 $P$，$AP$ 的延长线交 $BC$ 于点 $D$．求 $AP:PD$ 的值．




【解析】

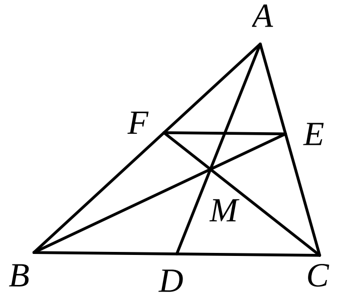
$\because$ $P$ 为$\triangle ABC$ 的塞瓦点．$\therefore \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{1}{3}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{1}{3}=1$，$\therefore \frac{BD}{DC}=\frac{9}{1}$，$\therefore \frac{BD}{BC}=\frac{9}{10}$．

$\because$ $EPB$ 为$\triangle ACD$ 的梅氏线，$\therefore \frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AP}{PD}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{3}=1$，$\therefore \frac{AP}{PD}=\frac{10}{3}$．

# 笔记整理

# 课后作业

1. 如图，$M$ 为$\triangle ABC$ 内的一点，$BM$ 与 $AC$ 交于点 $E$，$CM$ 与 $AB$ 交于点 $F$，若 $AM$ 通过 $BC$ 的中点 $D$，求证：$EF \parallel BC$.



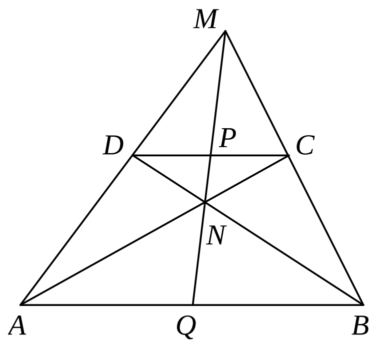

【解析】

对$\triangle ABC$ 和点 $M$ 应用塞瓦定理可得：$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

又因为 $BD=DC$，所以 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

进而 $\frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EC}$，所以 $EF \parallel BC$.

2. 如果梯形 $ABCD$ 的两腰 $AD$、$BC$ 的延长线交于 $M$，两条对角线交于 $N$. 求证：直线 $MN$ 必平分梯形的两底.



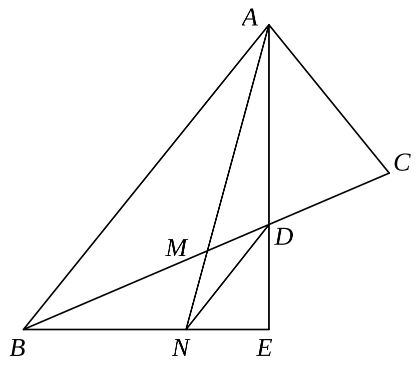

【解析】

$\because AB \parallel CD$，$\therefore \frac{MD}{DA}=\frac{CM}{BC}$，$\therefore \frac{MD}{DA}\cdot\frac{BC}{CM}=1$

$\because \frac{MD}{DA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BC}{CM}=1$（由塞瓦定理得）

$\therefore \frac{AQ}{QB}=1$，$\therefore AQ=QB$，$\because \frac{DP}{AQ}=\frac{PC}{QB}$，$\therefore DP=PC$.

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$M$是$BC$的中点，$AD$平分$\angle BAC$，点$B$在$AD$上的射影为点$E$，$BE$交$AM$于点$N$，求证：$DN\parallel AB$.




【解析】

连接$EM$并延长交$AB$于点$G$，延长$BE$、$AC$交于点$F$.

因$AE\perp BF$，$AD$平分$\angle BAC$，则$\triangle ABF$为等腰三角形.

从而$AB=AF$，$BE=EF$.

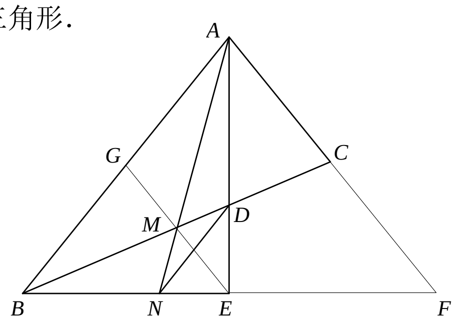
因$BM=MC$，则$ME\parallel CF$，$BG=GA$.

在$\triangle ABE$中，$AN$、$BD$、$EG$相交于一点$M$，

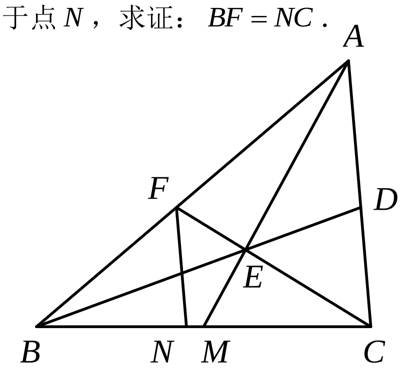
由塞瓦定理得

$\dfrac{BN}{NE}\cdot\dfrac{ED}{DA}\cdot\dfrac{AG}{GB}=1$，

于是$\dfrac{EN}{NB}=\dfrac{ED}{DA}$，因此$DN\parallel AB$.




4. 如图，在$\triangle ABC$中，$AM$是$BC$边上的中线，$BD$为$\angle B$的平分线，$AM$和$BD$交于点$E$，$CE$的延长线交$AB$于点$F$，$FN\parallel AC$，交$BC$于点$N$，求证：$BF=NC$.




【解析】

由塞瓦定理有

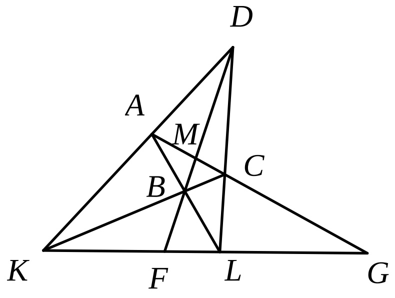
$\dfrac{BM}{MC}\cdot\dfrac{CD}{DA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$

由角平分线定理有$\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{BC}{AB}$，所以$\dfrac{BC}{AB}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$.

所以又由$FN\parallel AC$，得到$\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{NC}{BC}$. 所以$\dfrac{BC}{BC}\cdot\dfrac{NC}{FB}=1$. 即$BF=NC$.

5. 如图，四边形 $ABCD$ 的对边 $AB$ 和 $DC$， $DA$ 和 $CB$ 分别相交于点 $L$，$K$， 对角线 $AC$ 与 $BD$ 交于点 $M$． 直线 $KL$ 与 $BD$、 $AC$ 分别交于点 $F$、$G$．

求证：$\dfrac{KF}{LF}=\dfrac{KG}{LG}$．




【解析】

对 $\triangle DKL$ 与点 $B$ 应用塞瓦定理得：$\dfrac{DA}{AK}\cdot\dfrac{KF}{FL}\cdot\dfrac{LC}{CD}=1$．

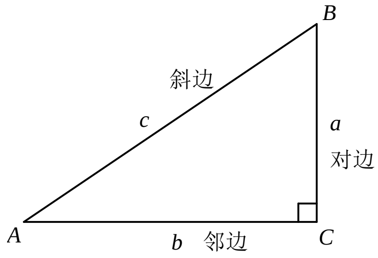
对 $\triangle DKL$ 和截线 $ACG$ 应用梅涅劳斯定理可得：$\dfrac{DA}{AK}\cdot\dfrac{KG}{GL}\cdot\dfrac{LC}{CD}=1$．进而可得 $\dfrac{KF}{LF}=\dfrac{KG}{LG}$．

# 第8讲　三角函数（一）

## 知识集锦

### 一、锐角三角函数的定义

锐角 $A$ 的正弦、余弦、正切、余切都叫做 $\angle A$ 的锐角三角函数.




**1．正弦：** Rt$\triangle ABC$ 中，锐角 $A$ 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$，即 $\sin A=\dfrac{a}{c}$.

**2．余弦：** Rt$\triangle ABC$ 中，锐角 $A$ 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A$，即 $\cos A=\dfrac{b}{c}$.

**3．正切：** Rt$\triangle ABC$ 中，锐角 $A$ 的对边与邻边的比叫做 $\angle A$ 的正切，记作 $\tan A$，即 $\tan A=\dfrac{a}{b}$.

**4．余切：** Rt$\triangle ABC$ 中，锐角 $A$ 的邻边与对边的比叫做 $\angle A$ 的余切，记作 $\cot A$，即 $\cot A=\dfrac{b}{a}$.

### 二、特殊角三角函数

| 三角函数 | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin A$ | 0 | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos A$ | 1 | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan A$ | 0 | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | 无 |
| $\cot A$ | 无 | $\sqrt{3}$ | 1 | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

### 三、锐角三角函数的取值范围

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a<c$，$b<c$，又 $\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}$，$\cot A=\dfrac{b}{a}$，所以 $0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$，$\tan A>0$，$\cot A>0$.

### 四、三角函数关系

**1．同角三角函数关系：** $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$，$\tan A\cdot\cot A=1$

**2．互余角三角函数关系：** $\sin A=\cos(90°-A)$；　$\cos A=\sin(90°-A)$；

$\tan A=\cot(90°-A)$；　$\cot A=\tan(90°-A)$.

**3．锐角三角函数值的变化规律：**

令 $c=1$，锐角 $\angle A$ 越小，则 $a$ 越小，则 $b$ 越大；当 $\angle A$ 越大，则 $a$ 就越大，$b$ 就越小，且 $a<c, b<c$，所以当角度在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内变化时，正弦值随角度的增大（或减小）而增大（或减小）；余弦值随角度的增大（或减小）而减小（或增大）．而正切值也是随角度的增大（或减小）而增大（或减小）；余切值随角度的增大（或减小）而减小（或增大）．

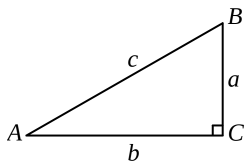
可以应用 $0^\circ \sim 90^\circ$ 间的正弦值、余弦值、正切值、余切值的增减性来比较角的正弦、余弦、正切、余切值的大小，其规律是：（1）$A$、$B$ 为锐角且 $A>B$，则 $\sin A>\sin B$，$\cos A<\cos B$，$\tan A>\tan B$，$\cot A<\cot B$；（2）$A$、$B$ 为锐角且 $A<B$，则 $\sin A<\sin B$，$\cos A>\cos B$，$\tan A<\tan B$，$\cot A>\cot B$．该规律反过来也成立．

## 五、解直角三角形：

**1．解直角三角形的概念**

在直角三角形中，除直角外，一共有 5 个元素，即 3 条边和 2 个锐角，由直角三角形中除直角外的已知元素，求出所有未知元素的过程，叫做解直角三角形．

**2．直角三角形的边角关系**




（1）三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$．（勾股定理）

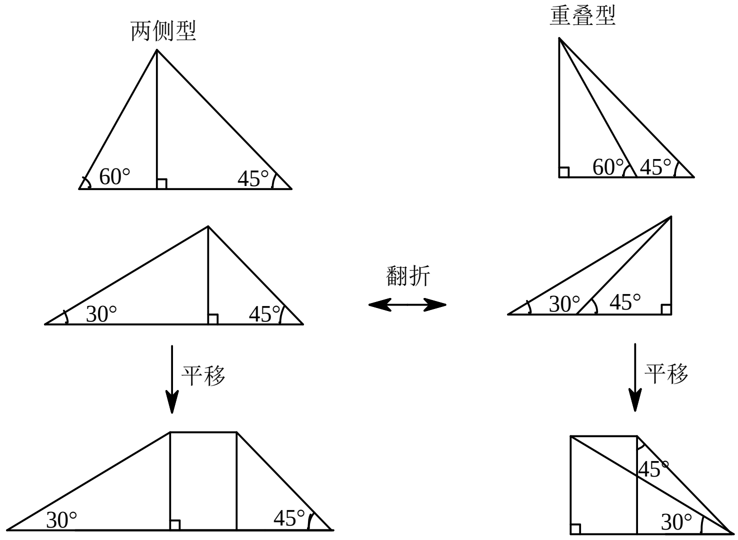
（2）锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90^\circ$

（3）边角之间的关系：$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}$

**3．解直角三角形的四种基本类型**

| 已知条件 | | 解法类型 |
|---|---|---|
| 一条边和一个锐角 | 斜边 $c$ 和锐角 $\angle A$ | $\angle B=90^\circ-\angle A$，$a=c\sin A$，$b=c\cos A$ |
| | 直角边 $a$ 和锐角 $\angle A$ | $\angle B=90^\circ-\angle A$，$b=\dfrac{a}{\tan A}$，$c=\dfrac{a}{\sin A}$ |
| 两条边 | 两条直角边 $a$ 和 $b$ | $c=\sqrt{a^2+b^2}$，由 $\tan A=\dfrac{a}{b}$，求 $\angle A$，$\angle B=90^\circ-\angle A$ |
| | 斜边 $c$ 和直角边 $a$ | $b=\sqrt{c^2-a^2}$，由 $\sin A=\dfrac{a}{c}$，求 $\angle A$，$\angle B=90^\circ-\angle A$ |

4．基本图形



# 模块一　三角函数的基本概念

**【例1】** （1）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对三角形的边分别为 $a$、$b$、$c$．若 $a=3$，$b=4$，则 $c=$________，$\sin A=$________，$\cos A=$__________，$\tan A=$______，$\sin B=$________，$\cos B=$__________，$\tan B=$_________.

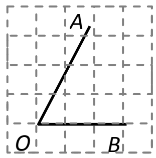
（2）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\cos A=\frac{3}{5}$，那么 $\sin A$ 的值等于（　　）.

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

（3）如图，正方形网格中，$\angle AOB$ 如图放置，则 $\cos\angle AOB$ 的值为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．2

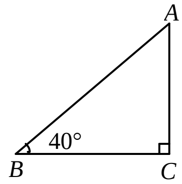
C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$




（4）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边 $AB$ 的长为 $m$，$\angle B=40^\circ$，则直角边 $BC$ 的长是（　　）

A．$m\sin 40^\circ$　　B．$m\cos 40^\circ$

C．$m\tan 40^\circ$　　D．$\frac{m}{\tan 40^\circ}$




（5）若 $6\cos(\alpha-16^\circ)=3\sqrt{3}$，则锐角 $\alpha$ 的角度是________.

**【解析】**（1）5，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{3}$；（2）B；（3）C；（4）B；（5）46°.

**【例2】** 在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边。已知 $a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，则 $b\sin B+c\sin C$ 的值等于________.

**【解析】** 注意到 $b^2+c^2=5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}=10=a^2$．所以 $\angle A$ 为直角．所以 $\sin B=\frac{b}{a}$，$\sin C=\frac{c}{a}$．所以 $b\sin B+c\sin C=\frac{b^2+c^2}{a}=\sqrt{10}$．

# 模块二　三角函数的计算

【例3】 求下列各式的值：

（1） $2\cos^2 30°-2\sin 60°\cos 45°$；

（2） $3\tan 30°+\cot 45°+\cos 30°+2\sin 60°-2\tan 45°$．

（3） $\cos^2 45°-\dfrac{1}{\sin 30°}+\dfrac{1}{\tan 30°}+\cos^2 30°+\sin^2 45°$

【解析】（1） $2\cos^2 30°-2\sin 60°\cos 45°=2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

（2） $3\tan 30°+\cot 45°+\cos 30°+2\sin 60°-2\tan 45°$

$=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2\times 1=\sqrt{3}+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}-2=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}-1$.

（3） $\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}$.

【例4】 计算题

（1） $\dfrac{2\sin 30°}{4\cos 60°-1}+\dfrac{1}{\sin 45°\cdot\cos 30°}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 45°+\tan 15°\cdot\tan 75°$

（2） $2\sin 30°-3\tan 45°\cot 45°+4\cos 60°$

【解析】（1） $\dfrac{2\sin 30°}{4\cos 60°-1}+\dfrac{1}{\sin 45°\cdot\cos 30°}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 45°+\tan 15°\cdot\tan 75°$

$=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{4\times\frac{1}{2}-1}+\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1=1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}+1=2+\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$.

（2） $2\sin 30°-3\tan 45°\cot 45°+4\cos 60°=2\times\dfrac{1}{2}-3+4\times\dfrac{1}{2}=0$.

【例5】 比较下列各式的大小.

（1） $\sin 53°$ 和 $\cos 53°$；

（2）当 $\angle A$ 是锐角时， $\sin A$ 和 $\tan A$；

【解析】（1）解法一：$\because$ $\cos 53°=\sin 37°$， 且 $\sin 37°<\sin 53°$，

$\therefore$ $\sin 53°>\cos 53°$ .

解法二：$\because$ $\sin 53°=\cos 37°$， 且 $\cos 37°>\cos 53°$，

$\therefore$ $\sin 53°>\cos 53°$ .

（2）解法一：根据三角函数定义：$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}$

$\because$ $b<c$， $\therefore\dfrac{a}{c}<\dfrac{a}{b}$， 即 $\sin A<\tan A$ .

解法二： $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$， $\therefore\sin A-\tan A=\sin A\left(1-\dfrac{1}{\cos A}\right)$

$\because$ $\angle A$ 是锐角，$\therefore$ $0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$，$\therefore$ $\dfrac{1}{\cos A}>1$，$\therefore$ $1-\dfrac{1}{\cos A}<0$

$\therefore$ $\sin A\left(1-\dfrac{1}{\cos A}\right)<0$，即 $\sin A-\tan A<0$，$\therefore$ $\sin A<\tan A$.

【例6】（1）求 $\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 89°$ 的值；

（2）已知 $\alpha$ 为锐角，且 $2\sin^2\alpha-5\cos\alpha+1=0$，求 $\alpha$ 的度数.

【解析】（1）$44\dfrac{1}{2}$

（2）$\because$ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\therefore$ $2(1-\cos^2\alpha)-5\cos\alpha+1=0$，即：$2\cos^2\alpha+5\cos\alpha-3=0$.

$\therefore$ $(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+3)=0$.

解得：$\cos\alpha=-3$ 或 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

$\because$ $0\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$，$\therefore$ $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\alpha=60°$.

【例7】（1）求 $\tan 1°\cdot\tan 2°\cdot\tan 3°\cdot\cdots\cdot\tan 89°$ 的值；

（2）若锐角 $A$ 满足 $\tan A-\cot A=2$，求 $\tan^2 A+\cot^2 A$ 的值；

（3）化简 $\sqrt{\tan^2 40°+\cot^2 40°-2}$；

【解析】（1）$\because$ $\tan\alpha\cot\alpha=1$，$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$

$\therefore$ $\tan 1°\tan 89°=\tan 1°\cot 1°=1$，

$\tan 2°\tan 88°=\tan 2°\cot 2°=1$，…………，

$\tan 44°\tan 46°=\tan 44°\cot 44°=1$，而 $\tan 45°=1$，

$\therefore$ $\tan 1°\cdot\tan 2°\cdot\tan 3°\cdot\cdots\cdot\tan 89°=1$.

（2）$\because$ $\tan A-\cot A=2$，$\tan A\cot A=1$，

$\therefore$ $(\tan A-\cot A)^2=\tan^2 A+\cot^2 A-2\tan A\cot A=\tan^2 A+\cot^2 A-2=4$.

$\therefore$ $\tan^2 A+\cot^2 A=4+2=6$.

（3）$\because$ $\tan\alpha\cot\alpha=1$，

又 $\tan 40°=\cot(90°-40°)=\cot 50°<\cot 40°$，

$\therefore$ $\sqrt{\tan^2 40°+\cot^2 40°-2}=\sqrt{\tan^2 40°+\cot^2 40°-2\tan 40°\cot 40°}$

$=\sqrt{(\cot 40°-\tan 40°)^2}=\cot 40°-\tan 40°$.

【例8】（1）$\alpha$ 为锐角，且满足 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，求 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 的值.

（2）若 $0°<\alpha<45°$，且 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{3}{16}\sqrt{7}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

【解析】（1）因为 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，故 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{10}$.

从而有 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=3\cos^2\alpha=\frac{3}{10}$.

（2）由 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{16}\sqrt{7}\Rightarrow\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{63}{256}$，结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可得 $\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=\frac{63}{256}\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{9}{16}$ 或 $\frac{7}{16}$.

由 $0°<\alpha<45°$ 可知 $\sin^2\alpha<\sin^2 45°=\frac{1}{2}$，故 $\sin^2\alpha=\frac{7}{16}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

【例9】 如果 $\sin\alpha+\cos\alpha=a$ ①，$\sin\alpha-\cos\alpha=b$ ②，$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\sin\alpha=-b^2$ ③，求 $a$，$b$ 的值.

【解析】①×②可得，$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=ab$ ④，

由③，④可知，$\sin\alpha=ab+b^2$.

①+②可得，$2\sin\alpha=a+b\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}(a+b)$，从而 $\cos\alpha=\frac{1}{2}(a-b)$，

从而有 $ab+b^2=\frac{1}{2}(a+b)\Rightarrow(2b-1)(a+b)=0$.

若 $a+b=0$，则 $\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}(a-b)=-b$，故 $b^2=1\Rightarrow b=\pm1$，此时 $a=\mp1$；

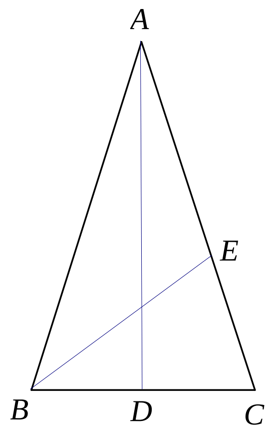
若 $2b-1=0\Rightarrow b=\frac{1}{2}$，则由 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=1\Rightarrow a^2+b^2=2$，故 $a=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，

综上所述，$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，$\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$，$\begin{cases}a=\frac{\sqrt{7}}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{7}}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

## 模块三　解特殊三角形

【例10】利用顶角为 $36°$ 的等腰三角形求 $\sin18°$ 的值.

【解析】如图，等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=36°$.作 $\angle ABC$ 的平分线，交 $AC$ 于点 $E$. 取 $BC$ 中点 $D$，连接 $AD$，则 $AD\perp BC$.




设 $CD=x$，则 $BC=BE=AE=2x$，由角平分线定理可知 $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$，即 $\frac{2x}{EC}=\frac{AC}{2x}$

又 $AC=AE+CE=2x+CE$，故 $CE^2+2xCE-4x^2=0$

从而 $CE=\frac{-2x\pm2\sqrt{5}x}{2}=(-1\pm\sqrt{5})x$，又 $CE>0$，故 $CE=(\sqrt{5}-1)x$

于是，$\sin18°=\frac{CD}{AC}=\frac{x}{2x+(\sqrt{5}-1)x}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

【例11】在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90°$ .

（1）已知： $a=1$， $c=\sqrt{2}$，求 $\angle A$、 $\angle B$， $b$；

（2）已知： $a=\sqrt{3}$， $b=1$，求 $\angle A$、 $\angle B$， $c$；

（3）已知： $\sin A=\dfrac{2}{3}$， $c=6$，求 $a$，$b$；

（4）已知： $\tan B=\dfrac{3}{2}$， $b=3$，求 $a$、 $c$；

（5）已知： $\angle A=60°$， $S_{\triangle ABC}=12\sqrt{3}$，求 $a$、 $b$、 $c$ 及 $\angle B$.

【解析】（1） $\angle A=\angle B=45°$， $b=1$；

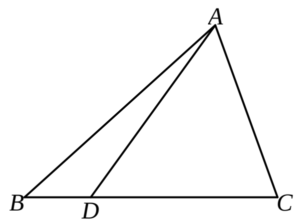
（2） $\angle A=60°$， $\angle B=30°$， $c=2$；

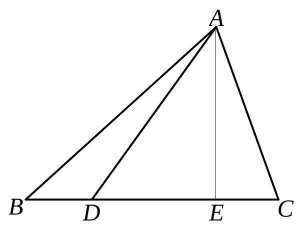
（3） $a=4$， $b=2\sqrt{5}$；

（4） $a=2$， $c=\sqrt{31}$；

（5） $a=6\sqrt{2}$， $b=2\sqrt{6}$， $c=4\sqrt{6}$， $\angle B=30°$.

【例12】已知:如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=45°$，$AB=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$，$D$ 是 $BC$ 上一点，$AD=5$，$CD=3$，求 $\angle ADC$ 的度数及 $AC$ 的长.




【解析】过 $A$ 点作 $AE\perp BC$ 于 $E$，则 $\angle AEB=90°$.

在 $Rt\triangle ABE$ 中， $\angle AEB=90°$，$\angle B=45°$，

$\therefore AE=AB\sin 45°=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

在 $Rt\triangle ADE$ 中， $\angle AED=90°$， $\therefore$ $\sin\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ $\angle ADE=60°$， $DE=AD\cos 60°=\dfrac{5}{2}$，

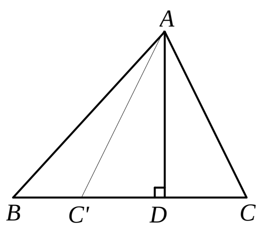
在 $Rt\triangle ACE$ 中， $\angle AEC=90°$， $\therefore$ $AC=\sqrt{AE^2+EC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{19}$.

【例13】已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 为锐角， $\sin B=\dfrac{4}{5}$， $AB=15$， $AC=13$，求 $BC$ 的长.

【解析】过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于点 $D$

在 $\triangle ADB$ 中， $\angle ADB=90°$

$\because \sin B=\dfrac{4}{5}$， $AB=15$



∴ $AD = AB \cdot \sin B = 15 \times \frac{4}{5} = 12$

由勾股定理，可得 $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$

在 $\triangle ADC$ 中，$\angle ADC = 90^\circ$，$AC = 13$，$AD = 12$

由勾股定理,，可得 $CD = 5$，∵ $AD < AC < AB$

∴当 $B$、$C$ 两点在 $AD$ 异侧时，可得 $BC = BD + CD = 9 + 5 = 14$

当 $B$、$C$ 两点在 $AD$ 同侧时，可得 $BC = BD - CD = 9 - 5 = 4$

∴$BC$ 边的长为 14 或 4.

# 笔记整理

# 课后作业

1. 已知 Rt△$ABC$ 中， $\angle C=90°$， $\tan A=\dfrac{5}{12}$，求 $\angle B$ 的四个三角函数值.

【解析】在 Rt△$ABC$ 中，由正切定义可知 $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{5}{12}$，设 $BC=5k$，$AC=12k$，

则 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(5k)^2+(12k)^2}=13k$ .

$\therefore \sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{12k}{13k}=\dfrac{12}{13}$， $\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5k}{13k}=\dfrac{5}{13}$，

$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{12k}{5k}=\dfrac{12}{5}$， $\cot B=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{5k}{12k}=\dfrac{5}{12}$ .

2. 判断：

（1）若 $\angle A$ 为锐角，则 $\sin A$ 是一个任意正数. （ ）

（2） $\cos 29°<\sin 63°$。 （ ）

（3）若 $\angle A$ 为锐角，则 $0<\tan A<1$。 （ ）

【解析】（1）×；（2）√；（3）×.

3. （1）已知 $\alpha$ 为锐角， $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$____________；

（2）若锐角 $A$ 满足 $\tan A+\dfrac{1}{\tan A}=3$，则 $\tan^2 A+\dfrac{1}{\tan^2 A}=$____________；

【解析】（1）$\therefore (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$， $\because$ $\alpha$ 为锐角， $\therefore$ $\sin\alpha+\cos\alpha>0$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；

（2） $\tan^2 A+\dfrac{1}{\tan^2 A}=\left(\tan A+\dfrac{1}{\tan A}\right)^2-2\tan A\dfrac{1}{\tan A}=9-2=7$ .

4. 若 $45°<\alpha<90°$，且 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{60}{169}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

【解析】$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$（$\alpha$ 为锐角），求作以 $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ 和 $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ 为两根的一元二次方程.

【解析】$\because$ $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，两边平方得： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2$

又∵ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，∴ $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

∴ $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2\sqrt{2}$，$\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=2$

∴以 $\frac{1}{\sin\alpha}$ 和 $\frac{1}{\cos\alpha}$ 为两根的一元二次方程为：$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

6. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$.若 $\sin A$，$\sin B$ 是方程 $x^2-\sqrt{2}x-k=0$ 的两根，求 $\angle A$，$\angle B$ 的大小及 $k$ 的值.

**【解析】**由一元二次的根系关系可知 $\begin{cases}\sin A+\sin B=\sqrt{2}\\ \sin A\cdot\sin B=-k\end{cases}$，由 $\angle C=90°$ 可知，$\sin A=\cos B$，

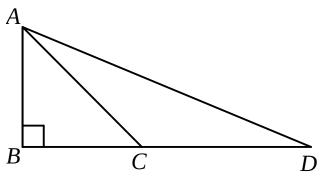
从而可知，$\cos B+\sin B=\sqrt{2}$，$\cos B\cdot\sin B=-k$

故 $\cos^2 B+\sin^2 B=(\cos B+\sin B)^2-2\cos B\cdot\sin B=2+2k=1\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$

从而可知，$\cos B\cdot\sin B=\frac{1}{2}$，$(\cos B-\sin B)^2=0\Rightarrow\cos B=\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故 $\angle A=\angle B=45°$，$k=-\frac{1}{2}$.

7. 利用几何方法求 22.5° 的正切值.



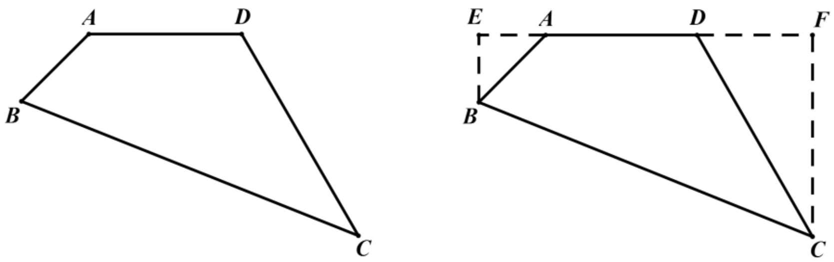

**【解析】**如图所示，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$AB=BC$

设 $AB=1$，则 $BC=1$，$AC=\sqrt{2}$，

∵ $CD=AC$，∴ $CD=\sqrt{2}$，$BD=1+\sqrt{2}$，

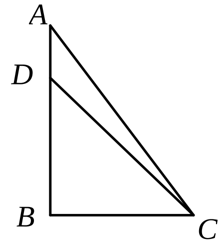
$\tan 22.5°=\frac{AB}{BD}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，$CD=4\sqrt{3}$，$AD=8-2\sqrt{3}$，$\angle A=135°$，$\angle D=120°$，求 $BC$ 。




**【解析】**如图，作 $BE\perp AD$ 于点 $E$，$CF\perp AD$ 于点 $F$，则 $BE=2$，$CF=6$，$EF=EA+AD+DF=2+8-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=10$，在直角梯形 $EBCF$ 中，可求得 $BC=2\sqrt{29}$.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$\cos A=\dfrac{5}{7}$，$BD=4\sqrt{6}$，$\angle BDC=45^\circ$，求 $AC$.




**【解析】**在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$\cos A=\dfrac{5}{7}$

$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{5}{7}$，$AB=5x$，$AC=7x$

由勾股定理得：$BC=2\sqrt{6}x$

$\because$ $\angle BDC=45^\circ$

$\therefore$ $BC=BD\cdot\tan 45^\circ=BD$

$\because$ $BD=4\sqrt{6}$

$\therefore$ $2\sqrt{6}x=4\sqrt{6}$，$x=2$

$\therefore$ $AC=7x=14$

# 第 9 讲　三角函数（二）

## 知识集锦

**1．正弦定理：** $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

**2．余弦定理：** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$；

# 模块一　正余弦定理的直接应用

【例1】 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{2}{3}$， $BC=6$， $AB=4.5$，那么 $\angle C=$_______.

【解析】 $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$， $\dfrac{6}{\frac{2}{3}}=\dfrac{4.5}{\sin C}$， $\sin C=\dfrac{1}{2}$， $\therefore \angle C=30°$ 或 $150°$

【例2】 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60°$， $AB=4$， $AC=6$， $BC=$_______.

【解析】 $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$

$=4^2+6^2-2\times4\times6\times\dfrac{1}{2}$

$=16+36-24$

=28.

$\therefore BC=2\sqrt{7}$

【例3】 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):\sqrt{10}$ ，求 $\triangle ABC$ 中的最大内角.

【解析】 $\dfrac{a}{\sin \mathrm{A}}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{C}{\sin C}$， $\therefore a:b:c=(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):\sqrt{10}$

设 $a=(\sqrt{3}-1)k$， $b=(\sqrt{3}+1)k$， $c=\sqrt{10}k$，最大角为 $\angle C$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle C=120°$

【例4】 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60°$，周长为 20cm，面积为 $10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$，求三角形边 $a$，$b$，c 的边长.

【解析】 $S=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\angle A=\dfrac{1}{2}\cdot bc\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

$\therefore bc=40$

又 $b+c=20-a$

$\therefore b^2+c^2+2bc=400-40a+a^2$

$\because a^2=b^2+c^2-bc=b^2+c^2+2bc-400+40a$

即 $a=7$

$\therefore \begin{cases} bc=40 \\ b+c=13 \end{cases}$

$\therefore b=5$， $c=8$ 或 $b=8$， $c=5$.

综上，三边为 5，7，8.

【例5】 若钝角三角形的三边分别为$\sqrt{3}$、2、$x$，试求$x$的取值范围.

【解析】 $x^2=3+4-4\sqrt{3}\cos x(90°<x<180°)$

又 $-1<\cos x<0$

$\therefore 7<x^2<7+4\sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{7}<x<2+\sqrt{3}$

$2^2=3+x^2-2\sqrt{3}x\cos x$

又 $-1<\cos x<0$

$\therefore 3+x^2-2\sqrt{3}<2^2<3+x^2$

$\therefore 2-\sqrt{3}<x<1$

综上，$\sqrt{7}<x<2+\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}<x<1$

## 模块二　　正余弦定理与边角关系

【例6】 在$\triangle ABC$中，若$a\cos A+b\cos B=c\cos C$，试判断此三角形的形状.

【解析】 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\therefore a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\dfrac{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-\mathrm{b}^2)}{2abc}=\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$

$a^2b^2+a^2c^2-a^4+a^2b^2+b^2c^2-b^4=a^2c^2+b^2c^2-c^4$

$\therefore a^4-2a^2b^2+b^4=c^4$

$(a^2-b^2)^2=c^4$

$\therefore |a^2-b^2|=c^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$ 或 $b^2=a^2+c^2$

$\therefore$ 为 Rt$\triangle$

【例7】 已知在$\triangle ABC$中，$a=2\sqrt{3}$，$B=45°$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，求此三角形另外两个内角.

【解析】根据已知条件由余弦定理可得：

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos45°=8$

即 $b=2\sqrt{2}$，由正弦定理可得$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

$\therefore$ $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}>\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

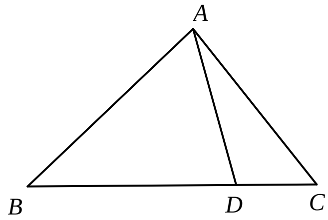
$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}>\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

即 $C>45°$， $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $A=60°$ 或 $A=120°$，∴ $C=75°$， $C=15°$（舍去）

即 $A=60°$，$C=75°$

【例8】 如图，已知 $\angle B=45°$， $AD=10$， $CD=6$， $AC=14$，则 $AB=$________.

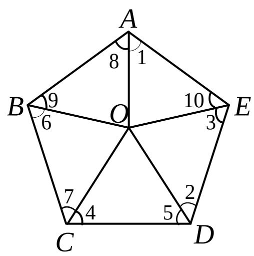



【解析】 $\triangle ADC$ 中， $\cos C=\dfrac{14^2+6^2-10^2}{2\cdot14\cdot6}=\dfrac{11}{14}$，

于是 $\sin C=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

∴ $AB=\dfrac{AC}{\sin B}\cdot\sin C=\dfrac{14}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=5\sqrt{6}$ .

【例9】 如图，$O$ 是凸五边形 $ABCDE$ 内一点，且 $\angle1=\angle2$，$\angle3=\angle4$，$\angle5=\angle6$，$\angle7=\angle8$. 求证： $\angle9$ 与 $\angle10$ 相等或互补.




【解析】由题设，根据正弦定理，得

$\dfrac{OA}{\sin\angle10}=\dfrac{OE}{\sin\angle1}=\dfrac{OE}{\sin\angle2}=\dfrac{OD}{\sin\angle3}=\dfrac{OD}{\sin\angle4}$

$=\dfrac{OC}{\sin\angle5}=\dfrac{OC}{\sin\angle6}=\dfrac{OB}{\sin\angle7}=\dfrac{OB}{\sin\angle8}=\dfrac{OA}{\sin\angle9}$ ，

从而 $\sin\angle9=\sin\angle10$. 故 $\angle9$ 与 $\angle10$ 相等或互补.

【例10】在 $\triangle ABC$ 中， $AB=33\text{cm}$， $AC=21\text{cm}$， $BC=m\text{cm}$，$m$ 为整数，又在 $AB$ 上可找到 $D$，在 $AC$ 上可找到 $E$，使 $AD=DE=EC=n\text{cm}$，$n$ 为整数. 问 $m$ 可取哪些值.

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，有

$\cos\angle A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{33^2+21^2-m^2}{2\cdot33\cdot21}=\dfrac{1530-m^2}{2\cdot7\cdot3^2\cdot11}$ .

又在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理，有

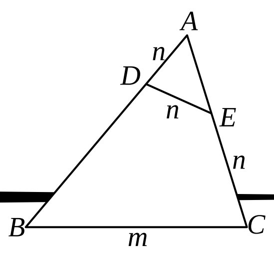
$\cos\angle A=\dfrac{AD^2+AE^2-DE^2}{2AD\cdot AE}=\dfrac{n^2+(21-n)^2-n^2}{2n(21-n)}=\dfrac{21-n}{2n}$ .

从而有 $\dfrac{1530-m^2}{2\cdot7\cdot3^2\cdot11}=\dfrac{21-n}{2n}$，

即 $n(2223-m^2)=3^3\cdot7^2\cdot11$.

由于 $m$、$n$ 是正整数，

所以，$n$ 是 $3^3\cdot7^2\cdot11$ 的约数.



由图知，$EC < AC$，$AD + DE > DE$，
则 $7 < n < 21$.
所以，$n$ 只能取 9 或 11.
当 $n = 9$ 时，$m^2 = 2223 - 3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 606$，由于 606 不是完全平方数，所以此时无解.
当 $n = 11$ 时，$m^2 = 2223 - 3^3 \cdot 7^2 = 900$，得 $m = 30$. 所以，$m$ 只能取 30.

**【例11】** 设 $P$、$Q$ 为线段 $BC$ 上两定点，且 $BP = CQ$，$A$ 为 $BC$ 外一动点，当点 $A$ 运动到使 $\angle BAP = \angle CAQ$ 时，$\triangle ABC$ 是什么三角形？试证明你的结论.

**【解析】** 假设 $AB \neq AC$，不妨设 $AB > AC$，则 $\angle B < \angle C$，从而 $\angle QPA < \angle AQP$，得 $AP > AQ$. 设 $\angle BAP = \angle CAQ = \alpha$，由正弦定理，有 $\frac{AP}{\sin B} = \frac{BP}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin \alpha} = \frac{AQ}{\sin C}$，从而 $\frac{AP}{Q} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB}$，即 $AP \cdot AB = AC \cdot AQ$. 因 $AB > AC$，则 $AP < AQ$，此与 $AP > AQ$ 矛盾，故 $AB = AC$.

# 笔记整理

# 课后作业

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$a$，$b$，$c$ 分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，且 $b^2+c^2-a^2=bc$，求 $\angle A$ 的大小.

【解析】$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$a^2=b^2+c^2-bc$

$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle A=60°$

2. 已知三角形两边之和是 10，这两边夹角为 $30°$，面积为 $\dfrac{25}{4}$. 求证：此三角形为等腰三角形.

【解析】$\begin{cases} a+b=10 \\ \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin 30°=\dfrac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=10 \\ ab=25 \end{cases}$，且 $a>0$，$b>0 \Rightarrow a=b=5$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A:\sin B=\sqrt{2}:1$，且 $c^2=b^2+\sqrt{2}bc$，求 $\angle ABC$ 的度数.

【解析】设 $a=\sqrt{2}k$，$b=k$，$c^2=k^2+\sqrt{2}kc$

$\therefore c^2=\sqrt{2}kc-k^2=0\cdot$

$\triangle=2k^2+4k^2=6k^2$

又 $c>0$，$\therefore c=\dfrac{\sqrt{2}k+\sqrt{6}k}{2}$

$$\cos B=\frac{\dfrac{8k^2+4\sqrt{3}k^2}{4}+2k^2-k^2}{2\sqrt{2}k\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}k}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \angle B=30°$

4. （1）在 $\triangle ABC$ 中，若 $2\cos B\sin A=\sin C$，则 $\triangle ABC$ 的形状一定是（　　）

A．等腰直角三角形　　　　B．直角三角形

C．等腰三角形　　　　D．等边三角形

（2）在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$，则 $\triangle ABC$ 的形状一定是（　　）

A．锐角三角形　　　　B．直角三角形

C．钝角三角形　　　　D．不能确定

【解析】（1）C.

从角的关系出发

$2\cos B\sin A=\sin C$，$\sin(A+B)-\sin(B-A)=\sin C$，$\sin(B-A)=0$，$A=B$

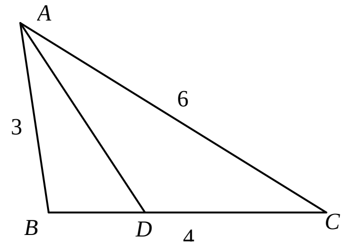
从边的关系出发

$2\cos B\sin A=\sin C$，$2\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot a=c$，$a^2-b^2=0$，$a=b$

（2）A．

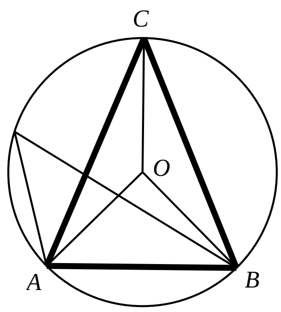
$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{2\sin A\sin B}<0$，∴ $C$ 一定是钝角．

5. 若 $\triangle ABC$ 的三条边长分别是 3，4，6，求它的较大的锐角的平分线分三角形所成的两个三角形的面积比．




【解析】由余弦定理易知，长度为 6 的边所对的角为钝角，长度为 4 的边所对的角为较大的锐角．在下图中，由角平分线定理知 $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

6. 如果 $\triangle ABC$ 内接于半径为 $R$ 的圆，且 $2R(\sin^2 A-\sin^2 C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值．




【解析】 $a^2-c^2=\sqrt{2}ab-b^2$，于是 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $\angle C=45°$

如图，$S_{\triangle ABC}$ 的最大值为

$\dfrac{1}{2}\sin135°\cdot R^2+\dfrac{1}{2}\sin135°\cdot R^2+\dfrac{1}{2}\sin90°\cdot R^2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}R^2$．

7. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$AC$ 边上的中线 $BD=\sqrt{5}$，求 $\sin A$ 的值．

【解析】设 $E$ 为 $BC$ 的中点，连接 $DE$，则 $DE\,/\!/\,AB$，且 $DE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，设 $BE=x$，

在 $\triangle BDE$ 中利用余弦定理可得：$5=x^2+\frac{8}{3}+2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}x$

解得 $x=1$，$x=-\frac{7}{3}$（舍去）

故 $BC=2$，从而 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=\frac{28}{3}$

即 $AC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，又 $\sin B=\frac{\sqrt{30}}{6}$，故 $\frac{2}{\sin A}=\frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\frac{\sqrt{30}}{6}}$，$\sin A=\frac{\sqrt{70}}{14}$

**8.** 在 $\triangle ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，证明：$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$．

**【解析】**解法一：转化为角关系

由余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，

两式相减得 $a^2-b^2=b^2-a^2+2ca\cdot\cos B-2bc\cdot\cos A$．

所以 $a^2-b^2=ca\cdot\cos B-bc\cdot\cos A$，所以 $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{a\cos B-b\cos A}{c}$．

由正弦定理，$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$，$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，

所以 $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$．

故等式成立．

解法二：转化为边关系

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot b}{c}$$

$$=\frac{a^2+c^2-b^2-(b^2+c^2-a^2)}{2c^2}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

# 第 10 讲　三角函数（三）

## 知识集锦

### 1．角的概念的推广

（1）角：一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形．其中顶点、始边、终边称为角的三要素．角可以是任意大小的．

（2）角按其旋转方向可分为：正角，零角，负角．

①正角：习惯上规定，按照逆时针方向旋转而成的角叫做正角；

②负角：按照顺时针方向旋转而成的角叫做负角；

③零角：当射线没有旋转时，我们也把它看成一个角，叫做零角．

（3）在直角坐标系中讨论角：

①角的顶点在原点，始边在 $x$ 轴的非负半轴上，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角．

②若角的终边在坐标轴上，就说这个角不属于任何象限，它叫轴线角．

### 2．诱导公式：

1）终边相同的角的同一三角函数的值相等（ $k\in\mathbb{Z}$）：

$\sin(\alpha+k\cdot180^\circ)=\sin\alpha$， $\cos(\alpha+k\cdot180^\circ)=\cos\alpha$， $\tan(\alpha+k\cdot180^\circ)=\tan\alpha$

2）终边反向的角的三角函数：

$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(180^\circ+\alpha)=\tan\alpha$

3）互为相反数的角的三角函数：

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$， $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

4）互补的角的三角函数：

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$

5）互余的角的三角函数：

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$， $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$， $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$

6）逆时针旋转 $90^\circ$ 角的三角函数：

$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$， $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$， $\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$

利用公式一～四，可把任意角的三角函数转化为锐角三角函数．

利用公式五～六，可实现正弦函数与余弦函数的相互转化．

### 3．两角和差公式：

1）两角和与差的余弦公式

$C_{\alpha-\beta}$：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$C_{\alpha+\beta}$：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

2）两角和与差的正弦公式

$S_{\alpha-\beta}$：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$S_{\alpha+\beta}$：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

3）两角和与差的正切公式

$T_{\alpha+\beta}$：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$．

$T_{\alpha-\beta}$：$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$．

**4．二倍角的正弦、余弦、正切**

$S_{2\alpha}:\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$．

$C_{2\alpha}:\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$．

$T_{2\alpha}:\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$．

**5．和差化积公式：**

（1）$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（2）$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（3）$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（4）$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

# 模块一　诱导公式

**【例1】**（1）求下列三角函数值：

① $\sin 390^\circ$；② $\cos 225^\circ$；③ $\sin 750^\circ$；④ $\sin-1120^\circ$

（2）已知 $\tan-336^\circ=a$，那么 $\sin 1992^\circ=$（　　）

A．$\dfrac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$　　B．$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$　　C．$-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$　　D．$-\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

**【解析】**（1）①$\dfrac{1}{2}$；

② $\cos 225^\circ=\cos(180^\circ+45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

③$\sin\dfrac{25\pi}{6}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+4\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$；

④ $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-3\times 2\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（2）C．

**【例2】** 利用诱导公式化简：

①$\sin(450^\circ-\alpha)=$______；②$\sin(270^\circ+\alpha)=$ ______；③$\sin(540^\circ-\alpha)=$________；
④ $\cos(450^\circ-\alpha)=$_________；⑤ $\cos(270^\circ+\alpha)=$ _________；⑥ $\cos(540^\circ-\alpha)=$
________.

**【解析】**（1）① $\cos\alpha$；② $-\cos\alpha$；③ $\sin\alpha$；④ $\sin\alpha$；⑤ $\sin\alpha$；⑥ $-\cos\alpha$

【例3】 若 $\cos(90^\circ-\alpha)=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in(90^\circ,180^\circ)$，求 $\sin(450^\circ+\alpha)$ 的值.

【解析】 $\sin(450^\circ+\alpha)=-\dfrac{4}{5}$.

【例4】 计算：$\dfrac{\sqrt{1-2\sin20^\circ\cos20^\circ}}{\cos20^\circ-\sqrt{1-\cos^2160^\circ}}$

【解析】原式 $=\dfrac{\sqrt{(\sin20^\circ-\cos20^\circ)^2}}{\cos20^\circ-\sqrt{\sin^2160^\circ}}=\dfrac{\cos20^\circ-\sin20^\circ}{\cos20^\circ-\sin160^\circ}=\dfrac{\cos20^\circ-\sin20^\circ}{\cos20^\circ-\sin20^\circ}=1$

【例5】 已知 $\sin(630^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{3}$，且 $180^\circ<\alpha<270^\circ$，则 $\dfrac{1}{\sin(\alpha-1260^\circ)}$ 的值为__________.

【解析】 $\sin(630^\circ-x)=-\cos x=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \cos x=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore \sin(x-1260^\circ)=\sin x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

【例6】 $f(\sin x)=\cos2x$，则 $f(\cos x)=$____________.

【解析】 $f(\cos x)=f[\sin(90^\circ-x)]=\cos[2(90^\circ-x)]=\cos(180^\circ-2x)=-\cos2x$

【例7】 在 $\triangle ABC$ 中，$A$，$B$，$C$ 为内角，求证：

（1） $\cos(2A+B+C)=-\cos A$

（2） $\tan\dfrac{A+B}{4}=-\tan\dfrac{540^\circ+C}{4}$

【解析】（1）证明： $\cos(2A+B+C)=\cos(180^\circ+A)=-\cos A$

（2）证明： $\tan\dfrac{A+B}{4}=\tan\dfrac{180^\circ-C}{4}=\tan\left(180^\circ-\dfrac{180^\circ-C}{4}\right)=-\tan\dfrac{540^\circ+C}{4}$.

【例8】 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a-b=c\cos B-c\cos A$，判断三角形的形状.

【解析】方法一： $a-b=c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\therefore 2ab(a-b)=b(a^2+c^2-b^2)-a(b^2+c^2-a^2)$

$\therefore ab(a-b)=bc^2-ac^2+a^3-b^3$

$\therefore (a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$

$\therefore$ 等腰 $\triangle$ 或 Rt$\triangle$

方法二：$\sin A-\sin B=\sin C(\cos B-\cos A)$

$$2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot(-2)\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$

$$\therefore\sin\frac{S}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}$$

$$\therefore\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\left(2\cdot\cos^2\frac{C}{2}-1\right)=0$$

$$\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}\cdot\cos C=0$$

$\therefore A=B$ 或 $C=90^\circ$

$\therefore$ 为等腰 $\triangle$ 或 Rt$\triangle$

**【例9】** 设 $f(n,\alpha)=\sin(n\cdot 90^\circ+\alpha)(n\in\mathrm{N}^*)$，求 $f(1,45^\circ)+f(2,45^\circ)+\cdots+f(2011,45^\circ)$ 的值.

**【解析】** $f(1,\alpha)=\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$， $f(2,\alpha)=\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$，

$f(3,\alpha)=\sin(270^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$， $f(4,\alpha)=\sin(360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$.

根据函数周期性，对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$，有

$f(4n+1,\alpha)=f(1,\alpha)=\cos\alpha$，

$f(4n+2,\alpha)=f(2,\alpha)=-\sin\alpha$，

$f(4n+3,\alpha)=f(3,\alpha)=-\cos\alpha$，

$f(4n,\alpha)=f(4,\alpha)=\sin\alpha$.

所以 $f(1,\alpha)+f(2,\alpha)+\cdots+f(2011,\alpha)+f(2012,\alpha)=0$.

所以 $f(1,\alpha)+f(2,\alpha)+\cdots+f(2011,\alpha)=-f(2012,\alpha)=-\sin\alpha$.

所以 $f(1,45^\circ)+f(2,45^\circ)+\cdots+f(2011,45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**【例10】** 在 $\triangle ABC$ 中，若 $h_a+h_b+h_c=9r$，判断三角形的形状.

**【解析】** $\dfrac{2S}{a}+\dfrac{2s}{b}+\dfrac{2s}{c}=\dfrac{9s}{p}$

$$\therefore(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$$

方法一：$(a+b+c)(ab+bc+ca)=9abc$

$\therefore a(a-c)^2+b(c-a)^2+c(b-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$

$\therefore$ 三角形为等边三角形.

方法二：由柯西不等式.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\left(\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}+\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}+\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}}\right)^2=9$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，取“=”

$\therefore$ 等边三角形.

# 模块二　和差角公式及和差化积

【例11】已知$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in(90°,180°)$，$\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$，$\beta$是第三象限角，求$\cos(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$的值.

【解析】（1）由$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$得$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$；

由$\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$，$\beta$是第三象限角得$\sin\beta=-\dfrac{5}{13}$，

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)+\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{33}{65}$；

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)-\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{63}{65}$；

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)-\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{16}{65}$；

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{56}{65}$.

【例12】（1）计算$\sin43°\cos13°-\cos43°\sin13°$的结果等于________.

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（2）$\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$可以化为________.

A．$\cos(\alpha-2\beta)$　　B．$\cos\alpha$　　C．$\cos\beta$　　D．$\sin(2\alpha-\beta)$

（3）$\sin133°\cos13°+\cos47°\cos77°$的结果等于________.

【解析】（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$\cos\alpha$；（3）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【教师备案】两角和与差的正切公式的变形和逆用，常见的变形有：

$$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$$

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha+\beta)$$

$$\tan\alpha\tan\beta=1-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}$$

无论哪种变形都有正切的和与积的形式，因此可以提醒学生在题目中遇到正切的和与积时可以往正切和差公式的逆用上联想。

【例13】（1）已知$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，则$\tan\alpha\cdot\tan\beta$的值为_______.

（2）已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{6}$， $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，则 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值为________.

**【解析】**（1）$\dfrac{1}{2}$；

依题意有 $\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5}\\ \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{2}{5}\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5}\end{cases}$． $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{1}{2}$．

（2）$-3$；

依题意有 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{4}\\ \cos\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{12}\end{cases}$， $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=-3$．

**【教师备案】**$S_{(\alpha-\beta)}$ 与 $S_{(\alpha+\beta)}$ 相加减可得含 $\sin\alpha\cos\beta$ 与 $\cos\alpha\sin\beta$ 的式子，相比即得 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$；

$C_{(\alpha-\beta)}$ 与 $C_{(\alpha+\beta)}$ 相加减可得含 $\sin\alpha\sin\beta$ 与 $\cos\alpha\cos\beta$ 的式子，相比即得 $\tan\alpha\tan\beta$．

**【例14】**（1）已知 $\cos(2x+60°)=-\dfrac{1}{2}$， $x\in[-30°,60°]$，求角 $x$．

（2）已知 $\alpha$， $\beta$ 均为锐角，且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2},\tan\beta=\dfrac{1}{5}$，$\tan\gamma=\dfrac{1}{8}$，则 $\alpha+\beta+\gamma=$

________.

（3）已知 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$， $\tan\beta=-\dfrac{1}{7}$， $\alpha,\beta\in(0,180°)$，求 $2\alpha-\beta$ 的值.

**【解析】**（1）$\dfrac{\pi}{6}$；

$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$，$\therefore 0\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\pi$． 且 $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$， $\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$．

（2）$\dfrac{\pi}{4}$；

$\because \tan\alpha=\frac{1}{2}, \tan\beta=\frac{1}{5}$ ， $\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$,

$\therefore \tan[(\alpha+\beta)+\gamma]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}=1$,

又$\because 0<\tan\alpha=\frac{1}{2}<1, 0<\tan\beta=\frac{1}{5}<1$，$0<\tan\gamma=\frac{1}{8}<1$,

$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ ，$0<\beta<\frac{\pi}{4}$ ，$0<\gamma<\frac{\pi}{4}$ ， $\therefore 0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$， $\therefore \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$.

（3）

$-\frac{3\pi}{4}$；

$\because$ $\tan\alpha=\tan\left[(\alpha-\beta)+\beta\right]=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\frac{1}{3}$

又由$\alpha\in(0,\pi)$， $\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{6}$， $0<2\alpha<\frac{\pi}{3}$． ①

由 $\tan\beta=-\frac{1}{7}$， $\beta\in(0,\pi)$， $\therefore \frac{5\pi}{6}<\beta<\pi$． 得到 $-\pi<-\beta<-\frac{5\pi}{6}$．  ②

由①．②知 $-\pi<2\alpha-\beta<-\frac{\pi}{2}$．

$\because$ $\tan(2\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(\alpha-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=1$

# 笔记整理

# 课后作业

1. （1）若 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$， $\alpha$ 是第四象限角，

求 $\dfrac{\sin(\alpha-360^\circ)+\sin(-\alpha-540^\circ)\cos(\alpha-540^\circ)}{\cos(180^\circ-\alpha)-\cos(-180^\circ-\alpha)\cos(\alpha-720^\circ)}$ 的值.

（2）$\sqrt{1-2\sin(180^\circ+2)\cos(180^\circ+2)}$ 等于（　　）

A． $\sin2-\cos2$　　B． $\cos2-\sin2$

C． $\pm(\sin2-\cos2)$　　D． $\sin2+\cos2$

【解析】（1）原式 $=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

（2）A

2. 已知 $\cos(30^\circ-\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求 $\cos(150^\circ+\alpha)-\sin^2(\alpha-30^\circ)$ 的值.

【解析】所以 $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$ .

3. （1） $\cos15^\circ\cos45^\circ-\cos75^\circ\sin45^\circ$ 的值为（　　）

A． $\dfrac{1}{2}$　　B． $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C． $-\dfrac{1}{2}$　　D． $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（2）（目标班专用）计算： $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+3x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+3x\right)$.

【解析】（1） $\dfrac{1}{2}$；（2） $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$， $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan\alpha\cdot\tan\beta$ 的值为_______.

【解析】 $-\dfrac{1}{7}$

5. （1）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $3\sin A+4\cos B=6, 3\cos A+4\sin B=1$，则 $\angle C$ 的大小为____________.

（2）已知在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A=\dfrac{3}{5}$， $\cos B=\dfrac{5}{13}$，则 $\cos C$ 的值为____________.

A. $-\frac{16}{65}$或$\frac{56}{65}$　　B. $\frac{16}{65}$或$\frac{56}{65}$　　C. $\frac{56}{65}$　　D. $\frac{16}{65}$

（3）已知 $\triangle ABC$ 为非直角三角形，求证：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ .

**【解析】**（1）$\angle C=\frac{\pi}{6}$

（2）$\frac{16}{65}$

（3）证明：因为 $A+B+C=\pi$，所以 $A+B=\pi-C$ .

所以 $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$ .

即 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-\tan C$ ,

$\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\cdot\tan B)$ ,

所以 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ .

# 第 11 讲　二次函数（一）

## 知识集锦

### 一、基本概念：

**1．二次函数的定义：**

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$（$a$，$b$，$c$ 为常数，$a\neq0$）的函数称为 $x$ 的二次函数，其中 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量，$a$、$b$、$c$ 分别为二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项．

**注意：**和一元二次方程类似，二次项系数 $a\neq0$，而 $b$、$c$ 可以为零．二次函数的自变量的取值范围是全体实数．

**2．二次函数图象与系数的关系**

（1）$a$ 决定抛物线的开口方向

当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下．反之亦然．

$|a|$ 决定抛物线的开口大小：$|a|$ 越大，抛物线开口越小；$|a|$ 越小，抛物线开口越大．

**注意：**几条抛物线的解析式中，若 $|a|$ 相等，则其形状相同，即若 $a$ 相等，则开口及形状相同，若 $a$ 互为相反数，则形状相同、开口相反．

（2）$b$ 和 $a$ 共同决定抛物线对称轴的位置（抛物线的对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$）

当 $b=0$ 时，抛物线的对称轴为 $y$ 轴；

当 $a$、$b$ 同号时，对称轴在 $y$ 轴的左侧；

当 $a$、$b$ 异号时，对称轴在 $y$ 轴的右侧．

（3）$c$ 的大小决定抛物线与 $y$ 轴交点的位置（抛物线与 $y$ 轴的交点坐标为 $(0,c)$）

当 $c=0$ 时，抛物线与 $y$ 轴的交点为原点；

当 $c>0$ 时，交点在 $y$ 轴的正半轴；

当 $c<0$ 时，交点在 $y$ 轴的负半轴．

**3．二次函数图象的画法**

**五点绘图法：**

利用配方法将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化为顶点式 $y=a(x-h)^2+k$，确定其开口方向、对称轴及顶点坐标，然后在对称轴两侧，左右对称地描点画图．一般我们选取的五点为：顶点、与 $y$ 轴的交点 $(0,c)$、以及 $(0,c)$ 关于对称轴对称的点 $(2h,c)$、与 $x$ 轴的交点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$（若与 $x$ 轴没有交点，则取两组关于对称轴对称的点）．

画草图时应抓住以下几点：开口方向，对称轴，顶点，与 $x$ 轴的交点，与 $y$ 轴的交点．

**4．二次函数的图象信息**

（1）根据抛物线的开口方向判断 $a$ 的正负性．

（2）根据抛物线的对称轴判断 $-\dfrac{b}{2a}$ 的大小．

（3）根据抛物线与 $y$ 轴的交点，判断 $c$ 的大小．

（4）根据抛物线与 $x$ 轴有无交点，判断 $b^2-4ac$ 的正负性．

（5）根据抛物线所经过的已知坐标的点，可得到关于 $a$，$b$，$c$ 的等式．

（6）根据抛物线的顶点，判断 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 的大小．

## 二、二次函数的图象及性质

**1．二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ 的性质：**

（1）抛物线 $y=ax^2$ 的顶点是坐标原点$(0,0)$，对称轴是 $x=0$（$y$ 轴）.

（2）函数 $y=ax^2$ 的图象与 $a$ 的符号关系．

①当 $a>0$ 时$\Leftrightarrow$抛物线开口向上$\Leftrightarrow$顶点为其最低点；

②当 $a<0$ 时$\Leftrightarrow$抛物线开口向下$\Leftrightarrow$顶点为其最高点；

| $a$ 的符号 | 开口方向 | 顶点坐标 | 对称轴 | 性质 |
|---|---|---|---|---|
| $a>0$ | 向上 | $(0,0)$ | $y$ 轴 | $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大； $x<0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小； $x=0$ 时，$y$ 有最小值 0. |
| $a<0$ | 向下 | $(0,0)$ | $y$ 轴 | $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小； $x<0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大； $x=0$ 时，$y$ 有最大值 0. |

**2．二次函数 $y=ax^2+c(a\neq 0)$ 的性质**

| $a$ 的符号 | 开口方向 | 顶点坐标 | 对称轴 | 性质 |
|---|---|---|---|---|
| $a>0$ | 向上 | $(0,c)$ | $y$ 轴 | $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大； $x<0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小； $x=0$ 时，$y$ 有最小值 $c$. |
| $a<0$ | 向下 | $(0,c)$ | $y$ 轴 | $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小； $x<0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大； $x=0$ 时，$y$ 有最大值 $c$. |

**3．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 或 $y=a(x-h)^2+k$ $(a\neq 0)$ 的性质**

（1）开口方向：$\begin{cases}a>0\Leftrightarrow 向上\\ a<0\Leftrightarrow 向下\end{cases}$

（2）对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$（或 $x=h$）

（3）顶点坐标：$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$（或 $(h,k)$）

（4）最值：

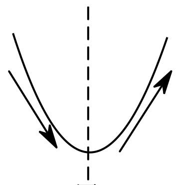


图1

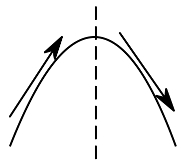


图2

$a>0$ 时有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$（或 $k$）（如图 1）；

$a<0$ 时有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$（或 $k$）（如图 2）；

（5）单调性：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的变化情况（增减性）

①如图 1 所示，当 $a>0$ 时，对称轴左侧 $x<-\dfrac{b}{2a}$，$y$ 随着 $x$ 的增大而减小，在对称轴的右侧 $x>-\dfrac{b}{2a}$，$y$ 随 $x$ 的增大而增大；

②如图 2 所示，当 $a<0$ 时，对称轴左侧 $x<-\dfrac{b}{2a}$，$y$ 随着 $x$ 的增大而增大，在对称轴的右侧 $x>-\dfrac{b}{2a}$，$y$ 随 $x$ 的增大而减小；

（6）与坐标轴的交点：①与 $y$ 轴的交点：$(0,c)$；②与 $x$ 轴的交点：使方程 $ax^2+bx+c=0$（或 $a(x-h)^2+k=0$）成立的 $x$ 值.

## 三、二次函数解析式：

**1．一般式：** $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c(a\neq 0)}$

如果已知二次函数的图象上的三点坐标（或称函数的三对对应值）$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$，那么方程组$\begin{cases}y_1=ax_1{}^2+bx_1+c\\y_2=ax_2{}^2+bx_2+c\\y_3=ax_3{}^2+bx_3+c\end{cases}$就可以唯一确定 $a$、$b$、$c$，从而求得函数解析式 $y=ax^2+bx+c$．

**温馨提示：**已知任意 3 点坐标，可用一般式求解二次函数解析式．

**2．顶点式：** $\boldsymbol{y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)}$

由于 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，所以当已知二次函数图象的顶点坐标 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 时，就可以设二次函数形如 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，从而利用其他条件，容易求得此函数的解析式．这里直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 又称为二次函数图象的对称轴．

**温馨提示：**已知顶点坐标或对称轴时，可用顶点式求解二次函数解析式．

**3．交点式：** $\boldsymbol{y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)}$

我们知道，$y=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，这里 $x_1$，$x_2$ 分别是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根．当已知二次函数的图象与 $x$ 轴有交点（或者说方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根）时，就可以令函数解析式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，从而求得此函数的解析式．

**温馨提示：**已知抛物线与 $x$ 的两个交点坐标，可用交点式求解二次函数解析式．

**4．对称式：** $\boldsymbol{y=a(x-x_1)(x-x_2)+k(a\neq 0)}$

**温馨提示：**当抛物线经过点 $(x_1,k)$、$(x_2,k)$ 时，可以用对称式来求二次函数的解析式．

**注意：**任何二次函数的解析式都可以化成一般式或顶点式，但并非所有的二次函数都可以写成交点式，只有抛物线与 $x$ 轴有交点，即 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，抛物线的解析式才可以用交点式表示．二次函数解析式的这三种形式可以互化．

# 模块一　二次函数的概念及图象判断

【例1】 已知函数 $y=(m^2+m)x^{m^2-m}+(m^2+3m+2)x+m^2+2m$，当 $m$ 是什么数时，函数是二次函数？

【解析】 由二次函数的定义可以知道：$m^2-m=2$，且 $m^2+m\neq 0$

解 $m^2-m=2$ 得：$m=2$ 或 $m=-1$．

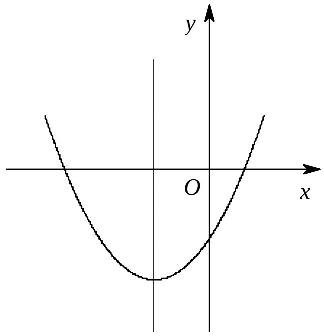
由 $m^2+m\neq 0$ 知：$m\neq -1$ 且 $m\neq 0$．

所以，$m=2$．此时函数为：$y=6x^2+12x+8$．

【例2】 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则点 $(a+b,ac)$ 在直角坐标系的（　　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限



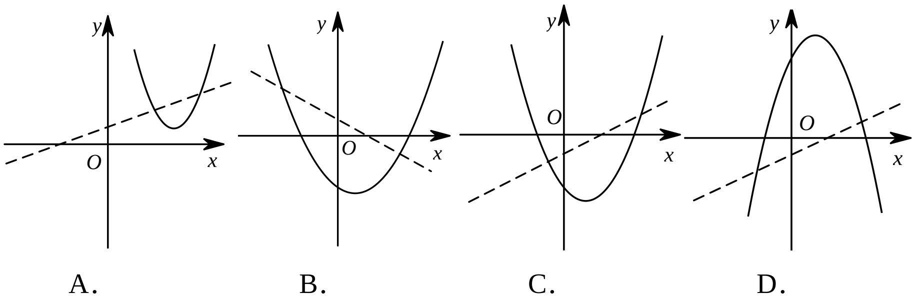

【解析】 由图象知 $a>0$，$-\dfrac{b}{2a}<0$，$a\cdot 0^2+b\cdot 0+c<0$，

则有 $b>0$，$c<0$．

因而 $ac<0$，$a+b>0$．

点 $(a+b，ac)$ 在第四象限，故选 D.

【例3】 如图，已知函数 $y=ax+b$ 和 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，那么它们的图象可以是（　　）．

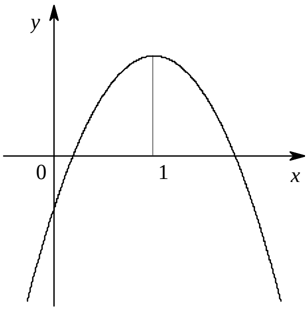



【解析】 因为二次函数图象的顶点为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，所以当 $a<0$ 时，若 $b>0$，则 $-\dfrac{b}{2a}>0$，且图象开口向下，但B中二次函数图象开口向上；若 $b<0$ 则 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$，但 D 中二次函数图象的对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$．故 B，D 不符合，当 $a>0$ 时，若 $b>0$，则 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$，但 A 中二次函数图象的对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$，故 A 不符合．若 $b<0$，则 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$．因此选 C.

【例4】 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则下列六个代数式：$ab$、$ac$、$a+b+c$、$a-b+c$、$2a+b$、$2a-b$ 中，其值为正的式子的个数是（　　）.

A．2 个　　　　B．3 个

C．4 个　　　　D．5 个

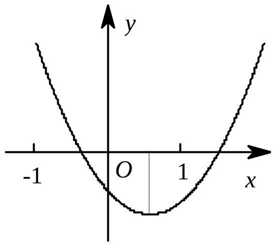



【解析】因为 $a<0$，$-\dfrac{b}{2a}>0$，$0\cdot a+b\cdot 0+c<0$，$a\cdot 1^2+b\cdot 1+c>0$，$a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c<0$，$-\dfrac{b}{2a}<1$，所以有 $b+c$，$b>0$，$c<0$，$a+b+c>0$，$a-b+c<0$，$2a+b<0$，从而推得 $ab<0$，$ac>0$，$2a-b<0$．故选 A.

【例5】 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如下右图所示．并设 $M=|a+b+c|-|a-b+c|+|2a+b|-|2a-b|$，则（　　）

A．$M>0$　　B．$M=0$

C．$M<0$　　D．不能确定 $M$ 为正，为负或为 0



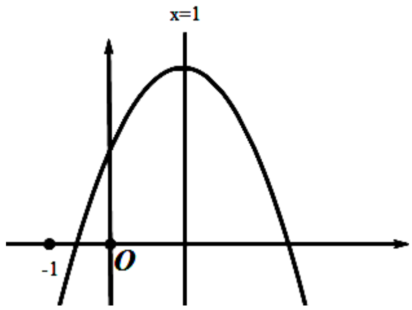

【解析】C.

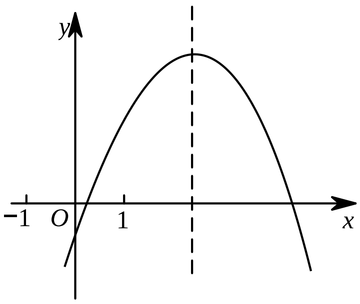
【例6】 （1）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像如图所示，有下列 5 个结论：

① $abc>0$；② $b<a+c$；③ $4a+2b+c>0$；④ $2c<3b$；⑤ $a+b>m(am+b)$（实数 $m\neq 1$），其中正确的结论有______.（填序号）

（2）二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，给出下列结论：① $2a+b>0$；② $b>a>c$；③若 $-1<m<n<1$，则 $m+n<-\dfrac{b}{a}$；④ $3|a|+|c|<2|b|$.其中正确的结论是_________（写出你认为正确的所有结论序号）.

【例1】



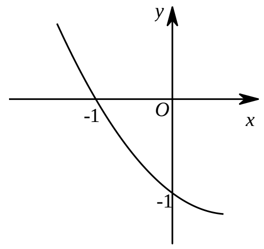

【解析】（1）③④⑤

（2）①③④

【例7】 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的一段图象如图所示.

（1）确定 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的符号；

（2）求 $a+b+c$ 的取值范围.




【解析】（1）由抛物线开口向上，所以 $a>0$ . 又抛物线经过点 $(0,-1)$ ，所以 $c=-1<0$ . 因为抛物线的对称轴在 $y$ 轴的右侧，从而 $-\dfrac{b}{2a}>0$ ，结合 $a>0$ 便可知 $b<0$ .

所以 $a>0$ ， $b<0$ ， $c<0$ .

⑵设 $f(x)=ax^2+bx+c$ ，由图象及⑴可知

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=0, \\ a>0, \\ b<0, \\ c=-1, \end{cases} \text{，即} \begin{cases} a-b=1, \\ b<a<1, \\ -1<b<0, \\ c=-1. \end{cases}$$

因为 $a+b+c=(b+1)+b-1=2b$ ,

所以 $-2<a+b+c<0$ .

【例8】 已知函数 $y=ax^2+(2a-5)x+a-3$ 与坐标轴恰有两个交点，求 $a$ .

【解析】 $a=0,3,\dfrac{25}{8}$

# 模块二　二次函数解析式

【例9】 已知二次函数图象经过点 $A(1,3)$ 、 $B(0,2)$ 、 $C(5,3)$ 三点，求此二次函数解析式.

【解析】解法一：设一般式

设此二次函数解析式为： $y=ax^2+bx+c$ ,

由已知得： $\begin{cases} a+b+c=3 \\ c=2 \\ 25a+5b+c=3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{5} \\ b=\dfrac{6}{5} \\ c=2 \end{cases}$

∴此二次函数的解析式为 $y=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{6}{5}x+2$ .

解法二：设顶点式

∵抛物线经过 $A(1,3)$ 、 $C(5,3)$ ,

∴抛物线的对称轴为 $x=3$ .

设抛物线的解析式为： $y=a(x-3)^2+h$ ,

将 $A(1,3)$ 、 $B(0,2)$ 代入得： $\begin{cases}4a+h=3\\9a+h=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\h=\dfrac{19}{5}\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{5}(x-3)^2+\dfrac{19}{5}$，化为一般式为： $y=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{6}{5}x+2$．

解法三：设对称点式

∵抛物线经过 $A(1,3)$ 、 $C(5,3)$，

∴设抛物线的解析式为： $y=a(x-1)(x-5)+3$．

将 $B(0,2)$ 代入得： $5a+3=2$，解得 $a=-\dfrac{1}{5}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{5}(x-1)(x-5)+3$，

化为一般式得 $y=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{6}{5}x+2$．

**【例10】**已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=2$，且经过点 $(1,4)$ 、$(5,0)$，求二次函数的解析式.

**【解析】**解法一：设双根式

∵二次函数的对称轴为 $x=2$，且经过点 $(5,0)$，

∴二次函数与 $x$ 轴的另一个交点坐标是 $(-1,0)$，

设二次函数的解析式为： $y=a[x-(-1)](x-5)$，即： $y=a(x+1)(x-5)$，

又∵图象经过点 $(1,4)$，

∴ $4=a(1+1)(1-5)$，即： $4=2a(-4)$，∴ $a=-\dfrac{1}{2}$．

∴二次函数的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}(x+1)(x-5)$．化为一般式得 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{5}{2}$．

解法二：设顶点式

∵抛物线的对称轴为 $x=2$，∴设二次函数的解析式为： $y=a(x-2)^2+k$，

又∵抛物线经过点 $(1,4)$ 、 $(5,0)$，

∴有方程组： $\begin{cases}4=a(1-2)^2+k\\0=a(5-2)^2+k\end{cases}$，即： $\begin{cases}4=a+k\\0=9a+k\end{cases}$，解方程组得： $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\k=\dfrac{9}{2}\end{cases}$，

∴所求二次函数的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+\dfrac{9}{2}$，化为一般式得 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{5}{2}$．

解法三：设一般式

根据题设可得： $\begin{cases}a+b+c=4\\25a+5b+c=0\\-\dfrac{b}{2a}=2\end{cases}$，解此方程组得： $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=2\\c=\dfrac{5}{2}\end{cases}$，

∴所求二次函数的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{5}{2}$．

【例11】设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件； $f(0)=2$， $f(1)=-1$，且其图象在 $x$ 轴上所截得的线段长为 $2\sqrt{2}$．求这个二次函数的解析式.

【解析】由 $f(0)=2$， $f(1)=-1$，得 $\begin{cases} c=2, \\ a+b+c=-1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c=2, \\ b=-(a+3), \end{cases}$

因此 $f(x)=ax^2-(a+3)x+2$．

设图象与 $x$ 轴的交点坐标为 $(x_1,0)$， $(x_2,0)$，则

$2\sqrt{2}=|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\sqrt{\left(\dfrac{a+3}{a}\right)^2-4\times\dfrac{2}{a}}$，

整理得 $7a^2+2a-9=0$，

则 $a=1$ 或 $a=-\dfrac{9}{7}$．

所以 $f(x)=x^2-4x+2$，或 $f(x)=-\dfrac{9}{7}x^2-\dfrac{12}{7}x+2$．

【例12】当 $n=1,2,\cdots 2004$ 时，求所有二次函数 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 的图象与 $x$ 轴所截得的线段长度之和.

【解析】二次函数的解析式用两点式表示为 $y=n(n+1)\left(x-\dfrac{1}{n+1}\right)\left(x-\dfrac{1}{n}\right)$，

则它与 $x$ 轴两交点为 $\left(\dfrac{1}{n+1},0\right)$， $\left(\dfrac{1}{n},0\right)$，

所截线段长度为 $d_n=\left|\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\ (n=1,2,\cdots,2004)$，

所以 $d_1+d_2+\cdots+d_{2004}=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2004}-\dfrac{1}{2005}\right)$

$=1-\dfrac{1}{2005}=\dfrac{2004}{2005}$．

# 笔记整理

# 课后作业

1. 函数 $y=(a+1)x^{a^2+2}+(a-3)x+a$.

（1）当 $a$ 取什么值时，它为二次函数.

（2）当 $a$ 取什么值时，它为一次函数.

【解析】考察一次函数和二次函数的概念.

（1）二次函数：$\begin{cases}a^2+2=2\\a+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\a\neq -1\end{cases}$，进而 $a=0$

∴当 $a=0$ 时，上述函数是二次函数.

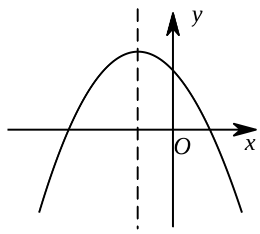
（2）一次函数：

①$\begin{cases}a+1=0\\a-3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\a\neq 3\end{cases}$，进而 $a=-1$；

②$\begin{cases}a^2+2=1\\(a+1)+(a-3)\neq 0\end{cases}$，无解

∴当 $a=-1$ 时，上述函数是一次函数.

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如下右图所示，则点 $P(a,bc)$ 在第____________象限.

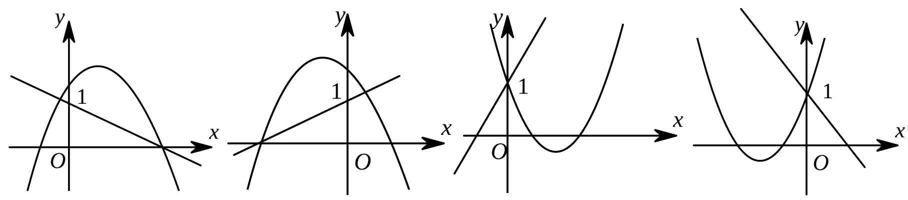



【解析】由图象可知，$a<0$，$b<0$，$c>0$.

∴ $bc<0$.

∴ $P(a,bc)$ 在第三象限.

3. 函数 $y=ax+1$ 与 $y=ax^2+bx+1(a\neq 0)$ 的图象可能是（　　）

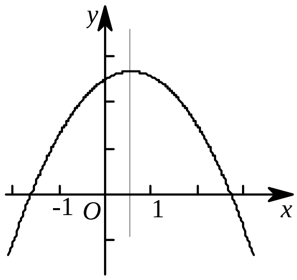


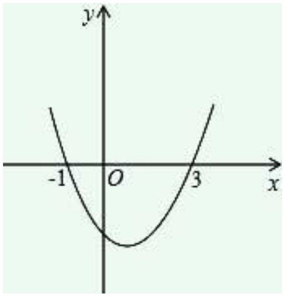

【解析】本题考查函数图象与性质，当 $a>0$ 时，直线从左向右是上升的，抛物线开口向上，$D$ 是错的，函数 $y=ax+1$ 与 $y=ax^2+bx+1(a\neq 0)$ 的图象必过(0, 1)，所以 $C$ 是正确的，故选 $C$.

4. （1）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图所示，下列结论：① $abc>0$；② $2a+b>0$；③ $a-b+c<0$；④ $a+c>0$，其中正确结论的个数为（　　）.

A．4 个　　B．3 个　　C．2 个　　D．1 个

（2）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像如图所示，它与 $x$ 轴两个交点分别为 $(-1,0)$，$(3,0)$．对于下列命题：① $b-2a=0$；② $abc<0$；③ $-a-\dfrac{1}{2}b+c<0$；④ $8a+c>0$．其中正确的有___________．（填写序号）

【例2】 




【解析】（1）D

（2）③④

5. 已知二次函数图象的对称轴平行于 $y$ 轴，顶点为 $(1,2)$，且与直线 $y=2x+k$ 相交于 $(2,-1)$，试求：

（1）二次函数的解析式；

（2）$k$ 的值；

（3）该二次函数的图象与直线 $y=2x+k$ 的另一交点的坐标．

【解析】本题用“顶点”待定法简便．

（1）因为二次函数图象的顶点为 $(1，2)$，对称轴平行于 $y$ 轴，所以，可令此二次函数的解析式为 $y=a(x-1)^2+2$．

又点 $(2,-1)$ 在二次函数的图象上，则有 $-1=a(2-1)^2+2$，

得 $a=-3$．

故所求的二次函数解析式为 $y=-3(x-1)^2+2$．

（2）由题意知点 $(2,-1)$ 在直线 $y=2x+k$ 上，则 $-1=2\times 2+k$．得 $k=-5$．

（3）根据题意有

$2x-5=-3(x-1)^2+2$，即 $3x^2-4x-4=0$，得 $x=2$ 或 $x=-\dfrac{2}{3}$．

所以 $x=2$ 时，$y=-1$；$x=-\dfrac{2}{3}$ 时，$y=-\dfrac{19}{3}$．

故二次函数的图象与直线 $y=2x+k$ 的另一交点的坐标为 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{19}{3}\right)$．

6. 已知一个二次函数过 $(0,0)$、$(-1,11)$、$(1,9)$ 三点，求二次函数的解析式．

【解析】设二次函数的解析式为：$y=ax^2+bx+c$，

∵函数图象经过 $(0,0)$、$(-1,11)$、$(1,9)$ 三点，

∴ $\begin{cases}0=c\\11=a-b+c\\9=a+b+c\end{cases}$，解此方程组得：$\begin{cases}a=10\\b=-1\\c=0\end{cases}$．

∴二次函数的解析式为 $y=10x^2-x$．

7. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $x=3$ 时取得最大值为 10，并且它的图象在 $x$ 轴上截得的线段长为 4．求 $f(x)$．

**【解析】**因为对称轴为 $x=3$，且在 $x$ 轴上截得的线段长为 4，则图象可知，与 $x$ 轴的交点的横坐标为 1、5，可设 $f(x)=a(x-1)(x-5)$，从而得到 $a(x-1)(x-5)=a(x-3)^2+10$，由 $f(1)=0$ 或 $f(5)=0$，解得 $a=-\frac{5}{2}$．所以 $f(x)=-\frac{5}{2}x^2+15x-\frac{25}{2}$．

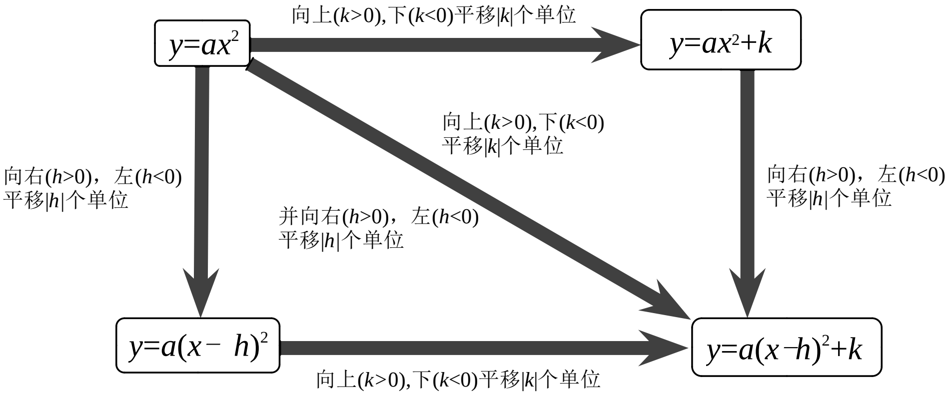
# 第12讲　二次函数（二）

## 知识集锦

### 一、二次函数图象的平移变换

（1）具体步骤：

先利用配方法把二次函数化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，确定其顶点 $(h,k)$，然后做出二次函数 $y=ax^2$ 的图像，将抛物线 $y=ax^2$ 平移，使其顶点平移到 $(h,k)$．具体平移方法如图所示：




（2）平移规律：在原有函数的基础上“左加右减”，“上加下减”

### 二、二次函数图象的对称变换

二次函数图象的对称一般有五种情况，可以用一般式或顶点式表达

**1．关于 $x$ 轴对称**

$y=ax^2+bx+c$ 关于 $x$ 轴对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2-bx-c$；

$y=a(x-h)^2+k$ 关于 $x$ 轴对称后，得到的解析式是 $y=-a(x-h)^2-k$；

**2．关于 $y$ 轴对称**

$y=ax^2+bx+c$ 关于 $y$ 轴对称后，得到的解析式是 $y=ax^2-bx+c$；

$y=a(x-h)^2+k$ 关于 $y$ 轴对称后，得到的解析式是 $y=a(x+h)^2+k$；

**3．关于原点对称**

$y=ax^2+bx+c$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2+bx-c$；

$y=a(x-h)^2+k$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y=-a(x+h)^2-k$；

**4．关于顶点对称**

$y=ax^2+bx+c$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2-bx+c-\dfrac{b^2}{2a}$；

$y=a(x-h)^2+k$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y=-a(x-h)^2+k$．

**5．关于点$(m,n)$对称**

$y=a(x-h)^2+k$ 关于点 $(m,n)$ 对称后，得到的解析式是 $y=-a(x+h-2m)^2+2n-k$

根据对称的性质，显然无论作何种对称变换，抛物线的形状一定不会发生变化，因此 $|a|$ 永远不变．求抛物线的对称抛物线的表达式时，可以依据题意或方便运算的原则，选择合适的形式，习惯上是先确定原抛物线（或表达式已知的抛物线）的顶点坐标及开口方向，再确定其对称抛物线的顶点坐标及开口方向，然后再写出其对称抛物线的表达式．

**三、二次函数图象的翻折变换**

**1．关于 $x$ 轴翻折（下翻上）**

函数 $y=|f(x)|$ 的图象可以由函数 $y=f(x)$ 通过关于 $x$ 轴的翻折变换得到，具体规则为函数 $y=f(x)$ 图象在 $x$ 轴上方的部分不变，在 $x$ 轴下方的部分翻折到 $x$ 轴上方；

**2．关于 $y$ 轴翻折（消去左边，右抄左）**

函数 $y=f(|x|)$ 的图象可以由函数 $y=f(x)$ 通过关于 $y$ 轴的翻折变换得到，具体规则为先擦去函数 $y=f(x)$ 的图象在 $y$ 轴左边的部分，然后将该函数图象在 $y$ 轴右边的部分翻折复制到左边.

# 模块一　二次函数的三大变换

**【铺垫】**（1）把抛物线 $y=-x^2$ 向左平移 1 个单位，然后向上平移 3 个单位，则平移后的抛物线的解析式为（　　）.

A．$y=-(x-1)^2-3$　　B．$y=-(x+1)^2-3$

C．$y=-(x-1)^2+3$　　D．$y=-(x+1)^2+3$

（2）二次函数 $y=-2x^2+4x+1$ 的图象如何移动就得到 $y=-2x^2$ 的图象（　　）.

A．向左移动 1 个单位，向上移动 3 个单位

B．向右移动 1 个单位，向上移动 3 个单位

C．向左移动 1 个单位，向下移动 3 个单位

D．向右移动 1 个单位，向下移动 3 个单位

**【解析】**（1）D.

（2）将 $y=-2x^2+4x+1$ 配方得：$y=-2(x-1)^2+3$，

要将二次函数 $y=-2(x-1)^2+3$ 的图象平移得到到 $y=-2x^2$，应选 C .

**【例1】**（1）设抛物线 $y=2x^2$，把它向右平移 $p$ 个单位，或向下移 $q$ 个单位，都能使抛物线与直线 $y=x-4$ 恰好有一个交点，求 $p$ 、$q$ 的值.

（2）把抛物线 $y=2x^2$ 向左平移 $p$ 个单位，向上平移 $q$ 个单位，则得到的抛物线经过点 $(1,3)$ 和 $(4,9)$，求 $p$ 、$q$ 的值.

（3）把抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向左平移 3 个单位，向下移 2 个单位后，所得抛物线为 $y=ax^2$，其图象经过点 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，求原解析式.

**【解析】**（1）抛物线 $y=2x^2$ 向右平移 $p$ 个单位后，得到 $y=2(x-p)^2$ .

由 $\begin{cases} y=2(x-p)^2, \\ y=x-4, \end{cases}$ 得方程 $2(x-p)^2=x-4$，即 $2x^2-(4p+1)x+2p^2+4=0$ .

因为抛物线与直线恰好有一个交点，所以上述方程有两个相同的实数根，故判别式

$\triangle=(4p+1)^2-4\times2\times(2p^2+4)=0$，得 $p=\frac{31}{8}$，这时的交点为 $\left(\frac{33}{8},\frac{1}{8}\right)$.

抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 $q$ 个单位，得到抛物线 $y=2x^2-q$，

于是得方程 $2x^2-q=x-4$，即 $2x^2-x+(4-q)=0$，

该方程有两个相同的实数根，故判别式 $\triangle=1-4\times2\times(4-q)=0$，得 $q=\frac{31}{8}$，

这时的交点为 $\left(\frac{1}{4},-\frac{15}{4}\right)$.

（2）把 $y=2x^2$ 向左平移 $p$ 个单位，向上平移 $q$ 个单位，得到的抛物线为 $y=2(x+p)^2+q$.

于是，由题设得. $\begin{cases}3=2(1+p)^2+q，\\9=2(4+p)^2+q，\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-2，\\q=1，\end{cases}$

即抛物线向右平移了两个单位，向上平移了一个单位.

（3）首先，抛物线 $y=ax^2$ 经过点 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，可求得 $a=-\frac{1}{2}$，

设原来的二次函数为 $y=-\frac{1}{2}(x-h)^2+k$，可得 $\begin{cases}-h+3=0，\\k-2=0，\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}h=3，\\k=2，\end{cases}$

所以原二次函数为 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$，即 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$.

说明：将抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向右平移 $p$ 个单位，得到的抛物线是 $y=a(x-p)^2+b(x-p)+c$；向左平移 $p$ 个单位得到 $y=a(x+p)^2+b(x+p)+c$；向上平移 $q$ 个单位，得到 $y=ax^2+bx+c+q$；向下平移 $q$ 个单位得到 $y=ax^2+bx+c-q$.

**【铺垫】** 已知二次函数 $y=x^2-2x-1$，求：（1）关于 $x$ 轴对称的二次函数解析式；（2）关于 $y$ 轴对称的二次函数解析式；（3）关于原点对称的二次函数解析式.

**【解析】**（1） $y=-x^2+2x+1$；

（2） $y=x^2+2x-1$；

（3） $y=-x^2-2x+1$.

**【例2】** 已知二次函数 $y=ax^2+4ax+4a-1$ 的图象是 $C_1$.

（1）求 $C_1$ 关于点 $R(1,0)$ 中心对称的图象 $C_2$ 的解析式；

（2）设曲线 $C_1$、$C_2$ 与 $y$ 轴的交点分别为 $A,B$，当 $|AB|=18$ 时，求 $a$ 的值.

**【解析】**（1）设 $C_1$ 上任意一点为 $(x_1,y_1)$，$C_2$ 上关于 $R(1,0)$ 中心对称的点为 $(x_2,y_2)$，则有

$$\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=1\\\frac{y_1+y_2}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2-x_2\\y_1=-y_2\end{cases}$$

由点 $(x_1,y_1)$ 在 $y=ax^2+4ax+4a-1$ 的图象上可知， $y_1=a{x_1}^2+4ax_1+4a-1$，即 $-y_2=a(2-x_2)^2+4a(2-x_2)+4a-1$.

即 $y_2=-a(x_2-2)^2+4a(x_2-2)+1-4a$．

故图象$C_2$的解析式为：$y=-a(x-2)^2+4a(x-2)+1-4a=-ax^2+8ax+1-16a$．

（2）令 $y=ax^2+4ax+4a-1$ 中 $x=0$，可得 $y=4a-1$，故 $A(0,4a-1)$；

令 $y=-ax^2+8ax+1-16a$ 中 $x=0$，可得 $y=1-16a$，故 $B(0,1-16a)$．

又$|AB|=18$，故$|20a-2|=18\Rightarrow a=1$或 $a=-\dfrac{4}{5}$．

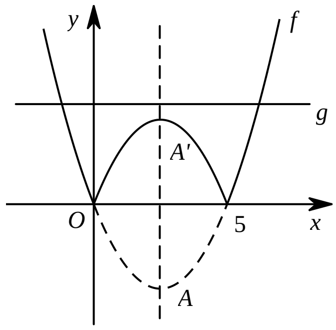
**【例3】** 当$a$在什么范围内取值时，对于方程$|x^2-5x|=a$，

①没有实根；②有两个实根；③有三个实根；④有四个实根．

**【解析】** 考虑函数 $f(x)=|x^2-5x|$ 和函数 $g(x)=a$．方程 $|x^2-5x|=a$ 的解也即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点．

函数 $g(x)=a$ 的图象是截距为 $a$，与 $x$ 轴平行的直线；而函数 $f(x)=|x^2-5x|$ 的图象可以由抛物线 $y=x^2-5x$ 的图象经过关于 $x$ 轴的翻折得到，如图：

由于函数 $y=x^2-5x$ 的顶点为 $A\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{25}{4}\right)$，因此 $A'\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{25}{4}\right)$．于是根据图象有：




①当 $a<0$ 时，原方程没有实根；

②当 $a=0$ 时，原方程有且只有两个实数根；

③当$0<a<\dfrac{25}{4}$时，原方程有 4 个不同实根；

④当 $a=\dfrac{25}{4}$ 时，原方程有 3 个不同实根；

⑤当 $a>\dfrac{25}{4}$ 时，原方程有 2 个不同实根．

**【教师备案】** 教师在讲完这道题后，可以让学生考虑每种情况对应的所有实根的和，以加深对题目的理解．

**【例4】** 已知关于$x$的方程$x^2-2|x|+2=m$恰有三个实数根，求$m$的值．

**【解析】** 由原方程可得 $(|x|-1)^2=m-1$，由于方程有解，则 $|x|=1\pm\sqrt{m-1}$，由 $|x|=1+\sqrt{m-1}>0$ 得到的

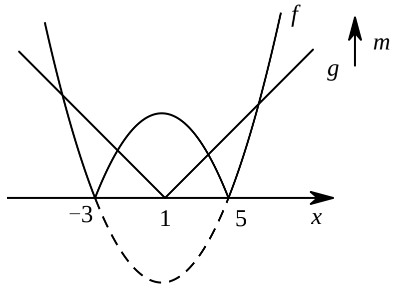
$x=\pm(1+\sqrt{m-1})$ 是两个不同的根，方程三个实数根中余下的一个来自于 $|x|=1-\sqrt{m-1}$，因此$|x|=1-\sqrt{m-1}=0$，$m=2$．

注：容易知道当 $a$ 为方程的根时，$-a$ 也是方程的根，而方程的根为奇数个，说明必有一根为 0．代入 $x=0$，解得 $m=2$．

**【例5】** 绝对值方程 $|(x-5)(x+3)|=|x-1|+m$ 有三个不同实数解，则实数 $m$ 的值是________.

**【解析】** 设 $f(x)=\}|(\mathrm{x}-5)(x+3)|$， $g(x)=|x-1|+m$，则 $f(x)$ 的图象如图所示，而 $g(x)$ 的图象可以由函数 $y=|x-1|$ 的图象向上平移 $m$ 个单位得到.

容易知道，当 $f(1)=g(1)$ 时该方程有三个不同的实数解，此时 $m=16$.

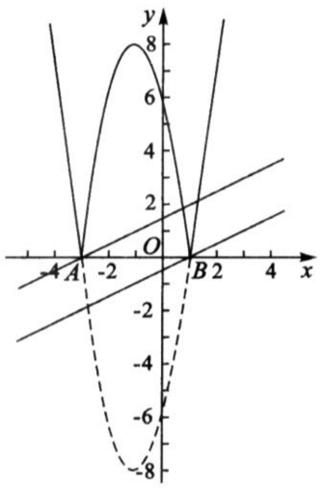



**【例6】** 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有实数根，$k$ 为正整数.

（1）求 $k$ 的值；

（2）当此方程有两个非零的整数根时，将关于 $x$ 的二次函数 $y=2x^2+4x+k-1$ 的图象向下平移 8 个单位，求平移后的图象的解析式；

（3）在（2）的条件下，将平移后的二次函数的图象在 $x$ 轴下方的部分沿 $x$ 轴翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新的图象．请你结合这个新的图象回答：当直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ ( $b<k$ )与此图象有两个公共点时，$b$ 的取值范围.




**【解析】**（1）由题意得， $\triangle=16-8(k-1)\geqslant 0$.

∴ $k\leqslant 3$.

∵ $k$ 为正整数，

∴ $k=1$，2，3.

（2）当 $k=1$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有一根为零；

当 $k=2$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 无整数根；

当 $k=3$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有两个非零的整数根.

综上所述， $k=1$ 和 $k=2$ 不合题意，舍去； $k=3$ 符合题意.

当 $k=3$ 时，二次函数为 $y=2x^2+4x+2$，把它的图象向下平移 8 个单位得到的图象的解析式为 $y=2x^2+4x-6$.

（3）设二次函数 $y=2x^2+4x-6$ 的图象与 $x$ 轴交于 $A$、 $B$ 两点，则 $A(-3,0)$， $B(1,0)$．依题意翻折后的图象如图所示.

当直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 经过 $A$ 点时，可得 $b=\frac{3}{2}$；

当直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 经过 $B$ 点时，可得 $b=-\frac{1}{2}$.

由图象可知，符合题意的 $b(b<3)$ 的取值范围为 $-\frac{1}{2}<b<\frac{3}{2}$.

# 模块二　二次函数的最值问题

**1．定轴定区间**

**【例7】** 分别求出在下列条件下，函数 $y=-2x^2+3x+1$ 的最值：

（1）$x$ 取任意实数；（2）当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时；（3）当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时；（4）当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时.

**【解析】**（1）$y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$，∴当 $x=\frac{3}{4}$ 时，函数的最大值为 $\frac{17}{8}$，无最小值；

（2）∵ $x=\frac{3}{4}$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 右侧，∴当 $x=0$ 时，函数取得最大值 $1$；当 $x=-2$ 时，函数取得最小值 $-13$；

（3）∵ $x=\frac{3}{4}$ 在 $1\leqslant x\leqslant 3$ 左侧，∴当 $x=1$ 时，函数取得最大值 2；当 $x=3$ 时，函数取得最小值 $-8$；

（4）∵ $-1\leqslant\frac{3}{4}\leqslant 2$，且 $\left|-1-\frac{3}{4}\right|>\left|\frac{3}{4}-2\right|$，∴当 $x=\frac{3}{4}$ 时，函数取得最大值 $\frac{17}{8}$；当 $x=-1$ 时，函数取得最小值 $-4$．

【例8】 试求 $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$ 在 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 的最值.

【解析】令 $t=x^2+5x$，则有

$y=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+5=(t+4)(t+6)+5=t^2+10t+29$

∵当 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 时，$t$ 的取值范围是 $-\frac{25}{4}\leqslant t\leqslant 24$，

∴原题转化为当 $-\frac{25}{4}\leqslant t\leqslant 24$ 时，求 $y=t^2+10t+29$ 的最大值和最小值.

∵ $y=(t+5)^2+4$，故当 $t=-5$ 时，$y_{\min}=4$．而当 $-5=x^2+5x$ 解得：$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$，

又∵ $-3\leqslant x\leqslant 3$，∴当 $x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ 时，$y_{\min}=4$．

当 $t=-\frac{25}{4}$ 时，$y=5\frac{9}{16}$；当 $t=24$ 时，$y=845$，而 $845>5\frac{9}{16}$，

∴当 $t=24$ 时，即 $x=3$ 时，$y_{\max}=845$．

【例9】 求 $a^2+6ab+10b^2+4a+10b+15$ 的最小值.

【解析】令 $f(a)=a^2+6ab+10b^2+4a+10b+15$

$=a^2+(6b+4)a+10b^2+10b+15=\left[a+(3b+2)\right]^2+b^2-2b+11$

$=\left[a+(3b+2)\right]^2+(b-1)^2+10$

∴当 $b=1$，$a=-3b-2=-5$ 时，取到最小值为 10.

**2．定轴动区间**

【例10】已知函数 $y=x^2-2x+2$ 在 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 范围内的最小值为 $s$，写出 $s$ 关于 $t$ 的函数解析式，并求出 $s$ 的取值范围.

【解析】二次函数 $y=x^2-2x+2$ 的对称轴是 $x=1$，

①当 $t>1$ 时，对称轴在 $x=t$ 左边，∴ $s=t^2-2t+2$；

②当 $t\leqslant 1\leqslant t+1$，即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，最小值 $s$ 在顶点处取得，∴ $s=1$；

③当 $t+1<1$，即 $t<0$ 时，对称轴在 $x=t+1$ 右边，∴ $s=t^2+1$．

综上所述：$s=\begin{cases}t^2+1\,(t<0)\\1\,(0\leqslant t\leqslant 1)\\t^2-2t+2\,(t>1)\end{cases}$

∴ $s$ 的取值范围为 $s\geqslant 1$．

【例11】若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值为 $2a$，最大值为 $2b$．求 $a$、$b$ 的值．

【解析】函数的对称轴为 $x=0$，下面分三种情况加以讨论：

（1）若 $0\leqslant a<b$ 时，即函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，有

$\begin{cases}f(a)=2b\\ f(b)=2a\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2b\\ -\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2a\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$．

（2）若 $a<0<b$ 时，则由函数图象知，$f(x)$ 在 $[a,0]$ 上单调递增，在 $[0,b]$ 上单调递减，即区间过了对称轴，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有最大值 $2b$，即 $2b=\frac{13}{2}$，得 $b=\frac{13}{4}$．而函数的最小值在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取得，又由于 $a<0$，并且 $f(b)=-\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}\right)^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}>0$，

故函数的最小值在 $x=a$ 处取得，即 $f(a)=2a$，则有 $2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$，

解得 $a=-2-\sqrt{17}$ 或 $a=-2+\sqrt{17}$（舍去）．

从而 $\begin{cases}a=-2-\sqrt{17}\\ b=\frac{13}{4}\end{cases}$．

（3）当 $a<b\leqslant 0$ 时，即 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，有 $\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2a\\ -\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2b\end{cases}$．

由于 $a$、$b$ 是方程 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}=2x$ 的两个根，又因为两根之积为负数，即两根异号，这与 $a<b\leqslant 0$ 矛盾，故不存在．

综上所述，得 $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2-\sqrt{17}\\ b=\frac{13}{4}\end{cases}$

**3．动轴定区间**

【例12】已知函数 $f(x)=-9x^2-6ax-a^2+2a\left(-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right)$ 有最大值 $-3$，求实数 $a$ 的值．

【解析】因为 $f(x)=-9\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+2a$，$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，

它的对称轴是直线 $x=-\frac{a}{3}$，于是必须根据值 $x=-\frac{a}{3}$ 是否在 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$ 的范围内分三种情况讨论．

（1）$a>1$时，$f(x)\left(-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right)$随着$x$的增加而减少，这时，$f(x)$的最大值是$f\left(-\frac{1}{3}\right)$，即$-a^2+4a-1$．由$-a^2+4a-1=-3$．

得$a=2\pm\sqrt{6}$．因$a>1$，故$a=2+\sqrt{6}$．

（2）$-1\leqslant a\leqslant 1$时，$f(x)\left(-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right)$的最大值为$f\left(-\frac{a}{3}\right)$，即$2a$．由$2a=-3$得$a=-\frac{3}{2}$，这与$-1\leqslant a\leqslant 1$矛盾．

（3）若$-\frac{a}{3}>\frac{1}{3}$，即$a<-1$时，$f(x)\left(-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right)$随着$x$增加而增加，这时$f(x)$的最大值是$f\left(\frac{1}{3}\right)$，即$-a^2-1$．由$-a^2-1=-3$，得$a=\pm\sqrt{2}$．

因为$a<-1$，故$a=-\sqrt{2}$．

综上所述，满足题意的$a$为$2+\sqrt{6}$或$-\sqrt{2}$．

**【例13】** 设$y=x^2+ax+3-a$，

（1）当$x$取任意实数时，$y$恒为非负数，求$a$的取值范围；

（2）当$-2\leqslant x\leqslant 2$时，$y$的值恒为非负数，求实数$a$的取值范围．

**【解析】**（1）$y=x^2+ax+3-a\geqslant 0$恒成立，只需$\triangle=a^2-4(3-a)\leqslant 0$，即$a^2+4a-12\leqslant 0$，$\therefore -6\leqslant a\leqslant 2$．

（2）$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+3-a-\frac{a^2}{4}$．要使$y\geq 0$在$-2\leq x\leq 2$时恒成立，就是要使当$-2\leqslant x\leqslant 2$时，$y$的最小值为非负．

①当$-\frac{a}{2}<-2$，即$a>4$时，二次函数在$x=-2$时取得最小值$7-3a$．

由$7-3a\geqslant 0$，得$a\leqslant\frac{7}{3}$，这与$a>4$矛盾，此时$a$不存在．

②当$-2\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 2$，即$-4\leqslant a\leqslant 4$时，二次函数在$x=-\frac{a}{2}$时取得最小值$3-a-\frac{a^2}{4}$．

由$3-a-\frac{a^2}{4}\geqslant 0\Leftrightarrow a^2+4a-12\leqslant 0\Leftrightarrow -6\leqslant a\leqslant 2$，

结合$-4\leqslant a\leqslant 4$可知，此时$-4\leqslant a\leqslant 2$．

③当$-\frac{a}{2}>2$，即$a<-4$时，二次函数在$x=2$时取得最小值$7+a$．

由$7+a\geqslant 0$，得$a\geqslant -7$，

结合$a<-4$可知，此时$-7\leqslant a<-4$．

综上所述，$a$的取值范围是$-7\leqslant a\leqslant 2$．

【例14】已知函数 $f(x)=ax^2+(2a-1)x-3\ (a\neq 0)$ 在区间 $\left[-\dfrac{3}{2},2\right]$ 上的最大值为 1，求实数 $a$ 的值.

【解析】因为是求闭区间上的最值,则最大值可能产生在抛物线的端点或顶点上.函数 $f(x)$ 的最大值只能在 $x_1=-\dfrac{3}{2}$ 或 $x_2=2$ 或 $x_0=\dfrac{1-2a}{2a}$ 处取得.

①令 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=1$，解得 $a=-\dfrac{10}{3}$．此时 $x_0=\dfrac{1-2a}{2a}=\dfrac{23}{20}\in\left[-\dfrac{3}{2},2\right]$，

故 $f(x)$ 的最大值不可能在 $x_1=-\dfrac{3}{2}$ 处取得.

②令 $f(2)=1$，解得 $a=\dfrac{3}{4}$．此时 $x_0=\dfrac{1-2a}{2a}=-\dfrac{1}{3}<\dfrac{-\frac{3}{2}+2}{2}$，故当 $a=\dfrac{3}{4}$ 时取得最大值 $1$.

③令 $f\left(\dfrac{1-2a}{2a}\right)=1$，解得 $a=\dfrac{-3\pm 2\sqrt{2}}{2}$，要使 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得最大值,

必须且只需 $\alpha<0$ 且 $x_0\in\left[-\dfrac{3}{2},2\right]$，经检验，只有 $a=-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

综上所述，所求的 $a$ 值为 $a=\dfrac{3}{4}$ 或 $a=-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

【点评】二次函数的区间最值问题 $f(x)=a(x-h)^2+k(a>0),x\in[p,q]$，既是重点又是难点，一般有三种情况：

（1）对称轴、区间都是给定的；（2）对称轴动，区间固定；（3）对称轴定，区间变动.

对这类问题的求解，一般结合配方法，根据函数的单调性、图象及分类讨论完成.对于（2)、（3）两类，通常要分对称轴在区间上（内）、对称轴在区间外两大类情况进行讨论．若 $x=h\in[p,q]$，则 $x=h$ 时，有最小值 $k$，最大值是 $f(p)$ 与 $f(q)$ 中较大者；若 $h\notin[p,q]$，则 $f(P)$ 与 $f(q)$ 中较小者为最小值，较大者为最大值，即最值在区间的端点取得.

对于 $f(x)\geqslant 0$ 在区间 $[p,q]$ 上恒成立问题，通常转化为 $f(x)$ 在 $[p,q]$ 上的最值问题，结合解不等式（组）去解决.

**4．动轴动区间**

【例15】设变量 $x$ 满足 $x^2+bx\leqslant -x(b<-1)$，并且 $x^2+bx$ 的最小值是 $-\dfrac{1}{2}$，求 $b$ 的值.

【解析】先求出条件中 $x$ 的范围．由 $x^2+bx\leqslant -x$ 得 $x[x+(b+1)]\leqslant 0$，而 $b<-1$，所以得到 $0\leqslant x\leqslant -(b+1)$．令 $f(x)=x^2+bx$，则 $f(x)=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{4}$．下面来求 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant -(b+1)$ 范围内的最小值.

①若 $-(b+1)<-\frac{b}{2}$，即 $-2<b<-1$，则 $f(x)$ 在 $x=-(b+1)$ 时取得最小值，

$f_{\min}=f(-b-1)=\left(\frac{b}{2}+1\right)^2-\frac{b^2}{4}=b+1$.

因而 $b+1=-\frac{1}{2}$，即 $b=-\frac{3}{2}$.

②若 $-\frac{b}{2}\leqslant-(b+1)$，即 $b\leqslant-2$，则 $f(x)$ 在 $x=-\frac{b}{2}$ 时取得最小值，为 $-\frac{b^2}{4}$，因而 $-\frac{b^2}{4}=-\frac{1}{2}$，即 $b=\pm\sqrt{2}$.

但是 $b=\pm\sqrt{2}$ 不满足 $b\leqslant-2$，所以 $b=\pm\sqrt{2}$ 应当舍去. 所以所求的 $b$ 只能为 $-\frac{3}{2}$.

**【点评】**本题的关键是求函数 $f(x)$ 的最小值, 而 $f(x)$ 的最小值是要在某区间上进行讨论的.

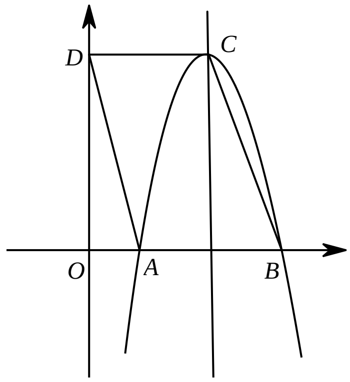
# 笔记整理

# 课后作业

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=4$，点 $D$ 的坐标是 $(0,8)$，以点 $C$ 为顶点的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $x$ 轴上的点 $A$，$B$.

（1）求点 $A$， $B$， $C$ 的坐标.

（2）若抛物线向上平移后恰好经过点 $D$，求平移后抛物线的解析式.




【解析】（1）在 ▱$ABCD$ 中， $CD\parallel AB$ 且 $CD=AB=4$，

∴点 $C$ 的坐标为 $(4,8)$

设抛物线的对称轴与 $x$ 轴相交于点 $H$,

则 $AH=BH=2$，

∴点 $A$，$B$ 的坐标为 $A(2,0)$， $B(6,0)$.

（2）由抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $C(4,8)$，

可设抛物线的解析式为 $y=a(x-4)^2+8$，

把 $A(2,0)$ 代入上式，解得 $a=-2$.

设平移后抛物线的解析式为 $y=-2(x-4)^2+8+k$

把 $(0,8)$ 代入上式得 $k=32$

∴平移后抛物线的解析式为 $y=-2(x-4)^2+40$.

2. 函数 $y=x^2$ 与 $y=-x^2$ 的图象关于__________对称，也可以认为 $y=x^2$ 是函数 $y=-x^2$ 的图象绕__________旋转得到.

【解析】考察函数的对称性. $y=x^2$ 与 $y=-x^2$ 关于 $x$ 轴对称，也可以看成是 $y=-x^2$ 绕原点旋转 $180°$ 得到 $y=x^2$.

3. 即 $y=-2x^2+16x+8$. 已知直线 $y=b$（ $b$ 为实数）与函数 $y=\left|x^2-4x+3\right|$ 的图象至少有三个公共点，则实数 $b$ 的取值范围是________.

【解析】 $0<b\le 1$.

4. （1）函数 $y=x^2-2009|x|+2011$ 的图象与 $x$ 轴交点的横坐标之和等于_______。

（2）若方程$x^2+2a|x|+4a^2-3=0$有且只有一个实数根，则实数$a=$________.

【解析】（1）0

（2）设函数 $f(x)=x^2+2a|x|+4a^2-3$，则显然 $f(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称.

∵ $f(x)=0$ 有且只有一个实数根，∴这个实数根只有可能为 0

因此 $f(0)=0$，$4a^2-3=0$，解得 $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

经检验当 $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，原方程有三个不同的实数根，舍去.

而当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，原方程只有一个实数根，符合题意.

5. （1）求函数 $y=2x^2-x+1$的最小值；

（2）若 $1\leqslant x\leqslant 2$，求 $y=2x^2-x+1$的最大值、最小值；

（3）若 $0\leqslant x\leqslant 1$，求 $y=2x^2-x+1$的最大值、最小值；

（4）若$-2\leqslant x\leqslant 0$，求 $y=2x^2-x+1$的最大值、最小值.

【解析】（1）当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$时，$y$ 的最小值是 $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{7}{8}$；

（2）由图像可知：当 $1\leqslant x\leqslant 2$时，函数 $y=2x^2-x+1$单调递增，

当 $x=1$时，$y$ 最小，且 $y=2\times 1-1+1=2$，

当 $x=2$时，$y$ 最大，且 $y=2\times 2^2-2+1=7$.

（3）由图像可知：当 $0\leqslant x\leqslant 1$时，函数 $y=2x^2-x+1$是先减后增，∴当 $x=\frac{1}{4}$，

$y$ 最小，且$y=\frac{7}{8}$.

∵当 $x=0$时，$y=2\times 0-0+1=1$当 $x=1$时，$y=2\times 1-1+1=2>1$，

∴当 $x=1$时，$y$ 最大，且 $y=2$.

（4）由函数图像开口向上，且 $-2\leqslant x\leqslant 0<\frac{1}{4}$，故当 $x=-2$时，$y$ 取最大值为 11，

当 $x=0$时，$y$ 取最小值为 1.

6. 当 $a$ 取遍 0 到 5 的所有实数时，求满足 $3b=a(3a-8)$ 的整数 $b$ 的个数.

【解析】由题设等式，得 $b=a^2-\frac{8}{3}a=\left(a-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}$.

它的图象是以$\left(\frac{4}{3},-\frac{16}{9}\right)$为顶点，开口向上的抛物线，当 $0\leqslant a\leqslant 5$时，$b$ 在 $a=\frac{4}{3}$

处取最小值 $-\frac{16}{9}$，$b$ 在 $a=5$处取最大值$25-\frac{40}{3}=\frac{35}{3}$.

所以 $-\frac{16}{9}\leqslant b\leqslant\frac{35}{3}$，所以 $b=-1$，0，1，2，…，10，11.

满足题设条件的整数 $b$ 共有 13 个.

7. 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，求函数 $y = x^2 + ax + b$ 的最值.

【解析】先化函数为 $y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$，要使 $-\frac{a}{2}$ 在闭区间 $[0,1]$ 内，就必须 $0 \leqslant -\frac{a}{2} \leqslant 1$，即 $-2 \leqslant a \leqslant 0$．因此当 $a > 0$ 和 $a < -2$ 时，$-\frac{a}{2}$ 就不在闭区间 $[0,1]$ 内．现分别探讨其极值如下：

（1）如果 $a > 0$，则当 $x = 0$ 时，$y = b$；当 $x = 1$ 时，$y = 1 + a + b$．由于 $a > 0$,所以 $1 + a + b > b$，所以 $y_{\max} = 1 + a + b$，$y_{\min} = b$．

（2）如果 $-2 \leqslant a \leqslant 0$，则当 $x = -\frac{a}{2}$ 时，$y_{\min} = b - \frac{a^2}{4}$．

当 $x = 0$ 时，$y = b$，当 $x = 1$ 时，$y = 1 + a + b$，假如 $a \geqslant -1$，则 $1 + a + b \geqslant 0$，所以 $y_{\max} = 1 + a + b$．

假如 $a < -1$，则 $1 + a + b < b$，所以 $y_{\max} = b$．

（3）$a < -2$，则当 $x = 0$ 时，$y = b$；当 $x = 1$ 时，$y = 1 + a + b$.

由于 $a < -2$，所以 $1 + a < 0$，故 $1 + a + b < b$.

所以 $y_{\max} = b$，$y_{\min} = 1 + a + b$．

由此可得，当 $a > 0$ 时，$y_{\max} = 1 + a + b$，$y_{\min} = b$；

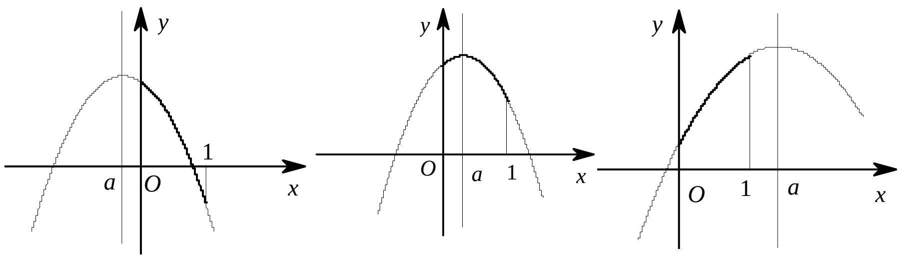
当 $-1 \leqslant a \leqslant 0$ 时，$y_{\max} = 1 + a + b$，$y_{\min} = b - \frac{a^2}{4}$；

当 $-2 \leqslant a < -1$ 时，$y_{\max} = b$，$y_{\min} = b - \frac{a^2}{4}$；

当 $a < -2$ 时，$y_{\max} = b$，$y_{\min} = 1 + a + b$．

8. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2ax + 1 - a$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上有最大值 2，求 $a$ 的值.

【解析】按对称轴进行讨论：




当对称轴 $x = a < 0$ 时，如左图所示.

当 $x = 0$ 时，$y$ 有最大值，$y_{\max} = f(0) = 1 - a$，

$\therefore 1 - a = 2$，即 $a = -1$，且满足 $a < 0$　　$\therefore a = -1$.

当对称轴 $0 \leqslant x = a \leqslant 1$ 时，如中图所示，

当 $x = a$ 时，$y$ 有最大值，$y_{\max} = f(a) = -a^2 + 2a^2 + 1 - a = a^2 - a + 1$．

$\therefore a^2 - a + 1 = 2$．解得 $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$（$\because 0 \leqslant a \leqslant 1$，舍去).

当对称轴 $x = a > 1$ 时，如右图所示.

当 $x = 1$ 时，$y$ 有最大值，$y_{\max} = f(1) = 2a - a = 2$，且满足 $a > 1$，$\therefore a = 2$.

综上可知：$a = -1$ 或 $a = 2$．

# 第 13 讲　二次函数（三）

## 知识集锦

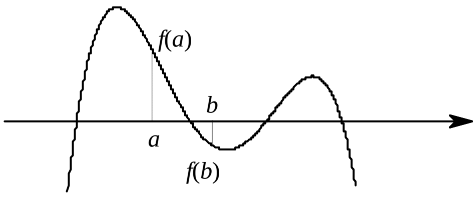
### 1．根的分布

所谓一元二次方程，实质就是其相应二次函数的零点（图象与 $x$ 轴的交点）问题，因此，一元二次方程的实根分布问题，即一元二次方程的实根在什么区间内的问题，借助于二次函数及其图象利用数形结合的方法来研究是非常有益的.

### 2．区间根定理

对于一个图象连续不断的函数，如果有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一个 $x\in(a,b)$，使得 $f(x)=0$.

此定理即为区间根定理，又称作勘根定理，它在判断根的范围时会发挥巨大的威力.




【例1】　方程 $x^2-11x+(30+a)=0$ 有两实根，且两根都大于 5，证明 $0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$.

【解析】设 $f(x)=x^2-11x+(30+a)$，因为方程 $f(x)=0$ 的两根都大于 5，所以有

$$\begin{cases}\Delta=121-4(30+a)\geqslant 0\\ f(5)=25-55+(30+a)>0\end{cases} \text{即} \begin{cases}1-4a\geqslant 0\\ a>0\end{cases},$$

解得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$.

【例2】　已知方程 $x^2+2px+1=0$ 的两个实根一个小于 1，一个大于 1，求 $p$ 的取值范围.

【解析】设 $f(x)=x^2+2px+1$，因为方程 $f(x)=0$ 的两个实数根一个小于 1，一个大于 1，所以有 $f(1)=1+2p+1<0$，即 $p<-1$.

【例3】　实数 $a$ 在什么范围内取值时，关于 $x$ 的方程 $x^2-(2-a)x+5-a=0$ 的一个根大于 0 而小于 2，另一个根大于 4 而小于 6?

【解析】设 $f(x)=x^2-(2-a)x+5-a$，则

$$\begin{cases} f(0)=5-a>0, \\ f(2)=a+5<0, \\ f(4)=3a+13<0, \\ f(6)=5a+29>0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a<5, \\ a<-5, \\ a<-\dfrac{13}{3}, \\ a>-\dfrac{29}{5}. \end{cases} \text{解得} -\frac{29}{5}<a<-5.$$

$\therefore$满足条件的 $a$ 的取值范围是 $-\dfrac{29}{5}<a<-5$.

【例4】 若关于 $x$ 的二次方程 $7x^2-(p+13)x+p^2-p-2=0$ 的两根 $\alpha$ 、 $\beta$ 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$，求实数 $p$ 的取值范围.

【解析】设 $f(x)=7x^2-(p+13)x+p^2-p-2$，根据题意得

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)<0 \\ f(2)>0 \end{cases}，\text{即} \begin{cases} p^2-p-2>0 \\ p^2-2p-8<0 \\ p^2-3p>0 \end{cases}.$$

解得 $-2<p<-1$ 或 $3<p<4$.

【例5】 若关于 $x$ 的二次方程 $4x^2-2mx+n=0$ 的解都位于 $0<x<1$ 的范围中，求正整数 $m$，$n$ 的值.

【解析】设 $f(x)=4x^2-2mx+n$，因为方程 $f(x)=0$ 的两个解都位于 $0<x<1$ 中，所以 $m$，$n$ 满足条件

$$\begin{cases} 4m^2-16n\geqslant 0 & ① \\ 0<\dfrac{m}{4}<1 & ② \\ f(0)=n>0 & ③ \\ f(1)=4-2m+n>0 & ④ \end{cases}$$

由②得 $0<m<4$，符合条件的 $m$ 值为 $1,2,3$.

由③得 $n>0$.

把 $m$ 各值代入④，得 $n\geqslant -2$， $n>0$， $n>2$.

把 $m$ 各值代入①，得 $n\geqslant\dfrac{1}{4}$， $n\leqslant 1$， $n\leqslant\dfrac{9}{4}$.

符合条件的 $m$， $n$ 的值是 $m=2$， $n=1$.

【例6】 设关于 $x$ 的方程 $ax^2+(a+2)x+9a=0$ 有两个不相等的实数根 $x_1, x_2$，且 $x_1<1<x_2$，那么 $a$ 的取值范围是多少？

【解析】 $-\dfrac{2}{11}<a<0$

构造二次函数 $y=x^2+\left(1+\dfrac{2}{a}\right)x+9$ 是本题顺利解题的关键。

【例7】 已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同实根，求证：方程 $ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$ 至少有一个根，在前一个方程的两根之间．（此处 $k\neq 0$）

【解析】设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 $x_1$，$x_2$ $(x_1\neq x_2)$，则有

$a{x_1}^2+bx_1+c=0$，$a{x_2}^2+bx_2+c=0$，且 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，$b^2-4ac>0$．

令 $f(x)=ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)$，

则 $f(x_1)=a{x_1}^2+bx_1+c+k\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)=k\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)$，

$f(x_2)=a{x_2}^2+bx_2+c+k\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)=k\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)$，

$$f(x_1)f(x_2)=k^2\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)$$

$$=k^2\left[x_1x_2+\frac{b}{2a}(x_1+x_2)\frac{b^2}{4a^2}\right]=k^2\left[\frac{c}{a}+\frac{b}{2a}\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$=\frac{k^2(4ac-b^2)}{4a^2}<0.$$

所以抛物线 $y=f(x)$ 上的两点 $(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$ 在 $x$ 轴的两侧，则方程 $ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$ 至少有一根在前一方程两根之间.

【例8】 若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连接两点 $M(0,1)$、$N(2,3)$ 的线段（包括 $M$、$N$ 两点）有两个相异的交点．求 $a$ 的取值范围．

【解析】设过两点 $M$、$N$ 的直线为 $y=kx+b$，则

$\begin{cases}1=0\times k+b\\3=2\times k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$，所以 $y=x+1$.

要使抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与线段 $MN$ 有两个相异的交点，等价于方程 $x^2+ax+2=x+1$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上有两个不同的根．令 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$，

由函数图象可知，$f(x)$ 的图象与 $x$ 轴的两个不同交点位于0与2之间，并且在 $x=0$ 和 $x=2$ 处函数值均大于或等于 0，对称轴也在 $x=0$ 与 $x=2$ 之间，即有

$$\begin{cases}\triangle=(a-1)^2-4>0\\f(0)=1\geqslant 0\\f(2)=4+2(a-1)+1\geqslant 0\\0<-\frac{a-1}{2}<2\end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{2}\leqslant a<-1$．因此当 $-\frac{3}{2}\leqslant a<-1$ 时，有两个相异的交点.

【例9】 已知点 $A(1,0)$， $B(2,0)$，若二次函数 $y=x^2+(a-3)x+3$ 的图象与线段 $AB$ 只有一个交点，则 $a$ 的取值范围是______.

【解析】 $-1\leqslant a<-\frac{1}{2}$ 或 $a=3-2\sqrt{3}$

分两种情况：

（1）因为二次函数 $y=x^2+(a-3)x+3$ 的图象与线段 $AB$ 只有一个交点，且 $A(1,0)$、$B(2,0)$，则 $[1^2+(a-3)\times1+3]\times[2^2+(a-3)\times2+3]<0$.

解得 $-1<a<-\frac{1}{2}$.

由 $1^2+(a-3)\times1+3=0$，得 $a=-1$，此时 $x_1=1$， $x_2=3$，符合题意；

由 $2^2+(a-3)\times2+3=0$，得 $a=-\frac{1}{2}$，此时 $x_1=2$， $x_2=\frac{3}{2}$，不符合题意.

（2）令 $x^2+(a-3)x+3=0$，由判别式 $\triangle=0$ 得 $a=3\pm2\sqrt{3}$.

当 $a=3+2\sqrt{3}$ 时， $x_1=x_2=-\sqrt{3}$，不符合题意；

当 $a=3-2\sqrt{3}$ 时， $x_1=x_2=\sqrt{3}$，符合题意.

综上所述， $a$ 的取值范围是 $-1\leqslant a<-\frac{1}{2}$ 或者 $a=3-2\sqrt{3}$.

# 笔记整理

# 课后作业

1. 设二次方程 $x^2+(a^2-1)x+a-2=0$ 有一根比 1 大，另一根比 $-1$ 小，试确定实数 $a$ 的范围.

**【解析】**设 $f(x)=x^2+(a^2-1)x+a-2$，因为方程有一根比 1 大，另一根比 $-1$ 小，所以有

$$\begin{cases} f(1)=a^2+a-2<0 \\ f(-1)=a-a^2<0 \end{cases},$$

即 $\begin{cases} a^2+a-2<0 \\ a^2-a>0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} -2<a<1 \\ a<0或a>1 \end{cases}$

所以 $-2<a<0$，故当 $-2<a<0$ 时，原方程有一根比 1 大，另一根比 $-1$ 小.

2. 若二次方程 $ax^2-2x+1=0(a>0)$ 在区间 $(1,3)$ 内仅有较大实根，另一根不等于 1，求 $a$ 的取值范围.

**【解析】**原方程可化为 $f(x)=x^2-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a}=0$，因为方程 $f(x)=0$ 较大实根在 $(1,3)$ 内，且另一根小于 1，所以有 $\begin{cases} f(1)=1-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a}<0 \\ f(3)=9-\dfrac{6}{a}+\dfrac{1}{a}>0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1-\dfrac{1}{a}<0 \\ 9-\dfrac{5}{a}>0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a<1 \\ a>\dfrac{5}{9} \end{cases}$，所以 $\dfrac{5}{9}<a<1$，

故当 $\dfrac{5}{9}<a<1$ 时，方程在 $(1,3)$ 内仅有较大实数根，且另一根不等于 1.

3. 已知方程 $x^2-(k-1)x+k=0$ 有两个大于 2 的实根，求 $k$ 的取值范围.

**【解析】**因为 $x^2-(k-1)x+k=0$ 有两个大于 2 的实数根，

即若设 $y=x^2-(k-1)x+k$，则该二次函数与 $x$ 轴的两个交点都位于 $x=2$ 的右边，开口向上，

所以有 $\begin{cases} (k-1)^2-4k\geqslant 0 \\ \dfrac{k-1}{2}>2 \\ 4-2(k-1)+k>0 \end{cases}$

解得 $3+2\sqrt{2}\leqslant k<6$.

4. 已知 $m$、$n$ 均为正整数，若关于 $x$ 的方程 $4x^2-2mx+n=0$ 的两个实数根都大于 1 且小于 2，求 $m$、$n$ 的值.

**【解析】**令 $f(x)=4x^2-2mx+n$，要使方程的两实数根都大于 1 且小于 2，由函数的图象可知，要满足：

$$\begin{cases}\triangle\geqslant 0\\ 1<\dfrac{m}{4}<2\\ f(1)=4-2m+n>0\\ f(2)=16-4m+n>0\end{cases}，即\begin{cases}m^2\geqslant 4n\\ 4<m<8\\ 4+n>2m\\ 16+n>4m\end{cases}.$$

已知 $m$ 、 $n$ 都为正整数，

则由 $4<m<8$ 知 $m=5$ 、 6 、 7 .

当 $m=5$ 时，由 $m^2\geqslant 4n$ 得 $n\leqslant\dfrac{25}{4}$，

故 $n\leqslant 6$，又由③得 $n>6$，矛盾；

当 $m=6$ 时，由 $m^2\geqslant 4n$ 得 $n\leqslant 9$，

又由 $m$， $n$ 的制约式得 $n>8$，故 $n=9$；

当 $m=7$ 时，由 $m^2\geqslant 4n$ 得 $n\leqslant\dfrac{49}{4}$，

即 $n\leqslant 12$，又由 $m$， $n$ 的制约式得 $n>12$，矛盾.

综合可得 $m=6,n=9$ .

5. $x_1$ 与 $x_2$ 分别是实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $-ax^2+bx+c=0$ 的一个根，且 $x_1\neq x_2$， $x_1\neq 0$， $x_2\neq 0$．求证：方程 $\dfrac{a}{2}x^2+bx+c=0$ 有且仅有一根介于 $x_1$ 与 $x_2$ 之间.

【解析】令 $f(x)=\dfrac{a}{2}x^2+bx+c$． $x_1$、$x_2$ 分别是方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $-ax^2+bx+c=0$ 的一个根，

$ax_1^2+bx_1+c=0$， $-ax_2^2+bx_2+c=0$，

故 $bx_1+c=-ax_1^2$， $bx_2+c=ax_2^2$，

$f(x_1)=\dfrac{a}{2}x_1^2+bx_1+c=\dfrac{a}{2}x_1^2-ax_1^2=-\dfrac{a}{2}x_1^2$，

$f(x_2)=\dfrac{a}{2}x_2^2+bx_2+c=\dfrac{a}{2}x_2^2+ax_2^2=\dfrac{3}{2}ax_2^2$.

$\because$ $a\neq 0$， $x_1\neq 0$， $x_2\neq 0$， $f(x_1)f(x_2)<0$.

故方程 $\dfrac{a}{2}x^2+bx+c=0$ 有且仅有一根介于 $x_1$ 和 $x_2$ 之间.

6. 若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连接两点 $M(0,1)$ 、 $N(2,3)$ 的线段（包括 $M$ 、 $N$ 两点）只有一个交点．求 $a$ 的取值范围.

【解析】与上题类似，设 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$，则

$\because$ $f(0)=1>0$，因此

①若 $f(2)=2a+3<0$，则符合条件，此时 $a<-\dfrac{3}{2}$；

②若 $f(2)=2a+3=0$，则 $a=-\dfrac{3}{2}$， $f(x)=x^2-\dfrac{5}{2}x+1$， $f(x)=0$ 在 $[0,2]$ 内有两个相异实根，不符合要求；

③若 $f(2)=2a+3>0$，则 $a>-\frac{3}{2}$，此时 $f(x)=0$ 在 $[0,2]$ 内有两个重根，

于是$\triangle=(a-1)^2-4=0$，解得 $a=3$（对称轴不在 $[0,2]$ 内舍去）或 $a=-1$.

综上 $a$ 的取值范围是 $a=-1$ 或 $a<-\frac{3}{2}$.

7. 方程 $x^2-4x+3a^2-2=0$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上有实根，求实数 $a$ 的取值范围.

**【解析】**令 $f(x)=x^2-4x+3a^2-2$.

（1）原方程在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 有一个实根，根据 $f(x)$ 的图象可知

$\begin{cases} f(1)>0 \\ f(-1)\leqslant 0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} f(1)\leqslant 0 \\ f(-1)>0 \end{cases}$，即等价于 $f(1)\cdot f(-1)\leqslant 0$，

$(3a^2-5)(3a^2+3)\leqslant 0$，

解 $-\frac{\sqrt{15}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{15}}{3}$.

（2）在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上有两个实根，因为函数的对称轴为 $x=2$，在 $-1$ 与 $1$ 的外面，所以根据函数图象，在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 之间不可能有两个实根.

综合（1）、（2），当 $-\frac{\sqrt{15}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{15}}{3}$ 时，方程在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 之间有实根.

# 第 14 讲　二次函数综合

## 模块一　二次函数与代数综合

【例1】　已知两个二次函数 $y_1$ 和 $y_2$，当 $x=a(a>0)$ 时，$y_1$ 取得最大值 5，且 $y_2=25$，又 $y_2$ 的最小值为 $-2$， $y_1+y_2=x^2+16x+13$．求 $a$ 的值及二次函数 $y_1$、 $y_2$ 的解析式.

【解析】设 $y_1=m(x-a)^2+5$，则 $y_2=x^2+16x+13-m(m(x-a)^2-5$.

又因为当 $x=a$ 时， $y_2=25$，即 $a^2+16a+8=25$，

解得 $a_1=1$ 或 $a_2=-17$（舍去），

故 $y_2=x^2+16x+13-m(x-1)^2-5=(1-m)x^2+(16+2m)\text{x}+(8-m)$.

因为 $y_2$ 的最小值为 $-2$，所以有 $\dfrac{4(1-m)(8-m)-4(8+m)^2}{4(1-\text{m})}=-2$，

解得 $m=-2$．所以 $y_1=-2x^2+4x+3$， $y_2=3x^2+12x+10$.

【例2】　在平面直接坐标系中，已知直线 $y=ax+b$ 上横坐标为 0，1，2 的点分别为 $D$、$E$、$F$．求 $a$、$b$ 使 $AD^2+BE^2+CF^2$ 达到最小值.

【解析】 $D(0,b)$， $E(1,a+b)$， $F(2,2a+b)$

$$AD^2+BE^2+CF^2=(b-1)^2+(a+b-3)^2+(2a+b-6)^2$$

$$=b^2-2b+1+a^2+b^2+9-6a-6b+2ab+4a^2+b^2+3b+4ab-12b-24a$$

$$=5a^2+3b^2+6ab-30a-20b+4b$$

$$=5a^2+(6b-30)a+3b^2-20b+4b$$

$$=5\left(a+\frac{3b-15}{5}\right)^2+\frac{6}{5}\left(6-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}$$

当 $a=\dfrac{5}{2}$， $b=\dfrac{5}{6}$ 时，有最小值 $\dfrac{1}{6}$.

【例3】 求 $y=\dfrac{2x^4+5x^3-6x^2+5x+2}{x^2}$ 的最值.

【解析】 $y=2x^2+5x-6+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}=2\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right]+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6$

$$=2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10$$

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $t\le -2$ 或 $t\ge 2$.

$$y=2t^2+5t-10=2\left(t^2+\frac{5}{2}t+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}\right)-10=2\left(t+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{105}{8}$$

$y_{\min}=f(-2)=a\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{105}{8}=\dfrac{9}{8}-\dfrac{105}{8}=-\dfrac{96}{8}=-12$（当且仅当 $x=-1$ 时成立）

【例4】 求 $y=\dfrac{2x^4+5x^3-6x^2+5x+2}{x^2}$ 在 $x\in\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最值.

【解析】 $y=2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-10$.

当 $x\in\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$ 时

$x\in\left[-\dfrac{1}{2},2\right)$ 时， $x+\dfrac{1}{x}\le -\dfrac{5}{2}$

$x\in[0,1]$ 时， $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$

$x\in(1,2]$ 时， $2<x+\dfrac{1}{x}\le\dfrac{5}{2}$.

综上 $x\in\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$ 时， $x+\dfrac{1}{x}\le -\dfrac{5}{2}$ 或 $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$ $\quad f(t)=2t^2+5t-10=2\left(t+\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{105}{8}$

当 $t=-\dfrac{5}{2}$ 时， $f(t)$ 有最小值.

$$y_{\min}=2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{105}{8}=\frac{25}{8}-\frac{105}{8}=-10.$$

【例5】 已知方程 $ax^4-(a-3)x^2+3a=0$ 的一根小于 $-2$．另外三根均大于 $-1$．求 $a$ 的取值范围.

【解析】令 $t=x^2$，则 $f(t)=at^2-(a-3)t+3a$．且原方程 4 个根必两两互为相反数.

又 $ax^4-(a-3)x^2+3a=a(x^4-x^2+3)+3x^2=0$，

$x^4-x^2+3>0$， $x^2\geq 0$．

$\therefore a<0$.

即 $0<t<1$ 或 $t>4$． $\begin{cases} f(0)=3a<0\Rightarrow a<0 \\ f(1)=a-(a-3)+3\text{a}>0\Rightarrow a>-1 \\ f(4)=(6a-4(a-3)+3a>0\Rightarrow a>-\dfrac{4}{5} \end{cases}$

$\therefore -\dfrac{4}{5}<a<0$.

## 模块二　二次函数与几何综合

【例6】 已知抛物线 $C_1:y=ax^2-2amx+am^2+2m+1(a>0,m>0)$ 的顶点为 $A$，抛物线 $C_2$ 的顶点 $B$ 在 $y$ 轴上，且抛物线 $C_1$ 和 $C_2$ 关于 $P(1,3)$ 成中心对称.

（1）当 $a=1$时，求抛物线 $C_2$ 的解析式和 $m$ 的值；

（2）设抛物 $C_2$ 与 $x$ 轴正半轴的交点是 $C$，当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时，求 $a$ 的值.

【解析】（1）当 $a=1$ 时，因为 $y=x^2-2mx+m^2+2m+1=(x-m)^2+2m+1$，所以顶点 $A(m,2m+1)$.

设抛物线 $C_2$ 的顶点 $B(0,y_B)$，又因为抛物线 $C_1$ 和 $C_2$ 关于 $P(1,3)$ 成中心对称，则

有 $\begin{cases} \dfrac{m+0}{2}=1, \\ \dfrac{2m+1+y_B}{2}=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=2, \\ y_B=1. \end{cases}$

即抛物线 $C_2$ 的顶点 $B(0,1)$，又 $C_1$ 和 $C_2$ 的开口大小相同，方向相反，则 $C_2$ 的解析式为 $y=-x^2+1$.

所以 $C_2$ 的解析式为 $y=-x^2+1$，$m$ 值为 2.

（2）由第（1）小题知：抛物线 $C_1$ 的顶点为 $A(2,5)$，抛物线 $C_2$ 的顶点为 $B(0,1)$，

且抛物线 $C_2$ 的解析式为 $y=-ax^2+1$，设 $C(n,0)$，现要使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

则有

①若 $AB=AC$，得 $AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{(n-2)^2+55}$，易知无解；

②若 $AB=BC$，得 $AB=2\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{n^2+1}$，

解得 $n=\sqrt{19}$．　所以 $a=\dfrac{1}{19}$；

③若 $AC=BC$，得 $AC=\sqrt{(n-2)^2+25}$，$BC=\sqrt{n^2+1}$，

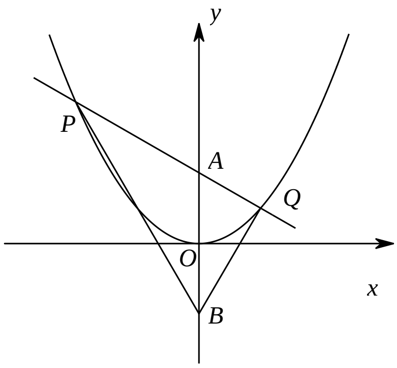
解得 $n=7$．　所以 $a=\dfrac{1}{49}$．

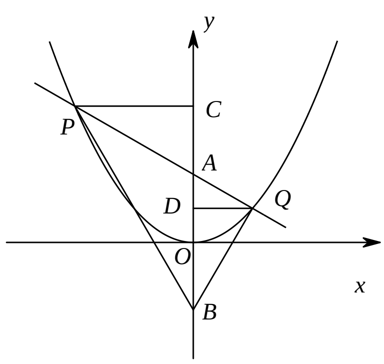
综上，满足 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的 $a$ 的值有 $a=\dfrac{1}{19}$ 或 $a=\dfrac{1}{49}$．

**【例7】** 如图，已知 $A$ 为 $y$ 轴正半轴上一点，点 $A$、$B$ 关于 $x$ 轴对称，过 $A$ 任作直线与抛物线 $y=\dfrac{2}{3}x^2$ 交于 $P$、$Q$ 两点．

（1）求证：$\angle ABP=\angle ABQ$；

（2）若点 $A(0,1)$，且 $\angle PBQ=60°$，试求所有满足条件的直线 $PQ$ 的解析式．




**【解析】**（1）分别过点 $P$、$Q$ 作 $y$ 轴的垂线，垂足分别为 $C$、$D$

设点 $A(0,t)$，则 $B(0,-t)$，设直线 $PQ$ 的解析式为 $y=kx+t$，并设 $P(x_P,y_P)$，

$Q(x_Q,y_Q)$，其中 $x_P<0<x_Q$

由 $\begin{cases} y=kx+t \\ y=\dfrac{2}{3}x^2 \end{cases}$，得 $\dfrac{2}{3}x^2-kx-t=0$，于是 $x_Px_Q=-\dfrac{3}{2}t$

$\therefore t=-\frac{2}{3}x_Px_Q$，则 $\frac{BC}{BD}=\frac{y_P+t}{y_Q+t}=-\frac{x_P}{x_Q}$

$\because \frac{PC}{QD}=-\frac{x_P}{x_Q}$，$\therefore \frac{BC}{BD}=\frac{PC}{QD}$，故 $\mathrm{Rt}\triangle BCP \backsim \mathrm{Rt}\triangle BDQ$

因此，$\angle ABP=\angle ABQ$

（2）设直线 $PQ$ 的解析式为 $y=kx+1$

由（1）知 $\angle ABP=\angle ABQ=30^\circ$，所以，$BQ=2DQ$，故 $2x_Q=\sqrt{{x_Q}^2+(y_Q+1)^2}$

将 $y_Q=\frac{2}{3}{x_Q}^2$ 代入上式，平方并整理得 $4{x_Q}^4-15{x_Q}^2+9=0$

解得，$x_Q=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$，又由（1）得 $x_Px_Q=-\frac{3}{2}t=-\frac{3}{2}$，$x_P+x_Q=\frac{3}{2}k$

若 $x_Q=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $x_P=-\sqrt{3}$，从而 $k=\frac{2}{3}(x_P+x_Q)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

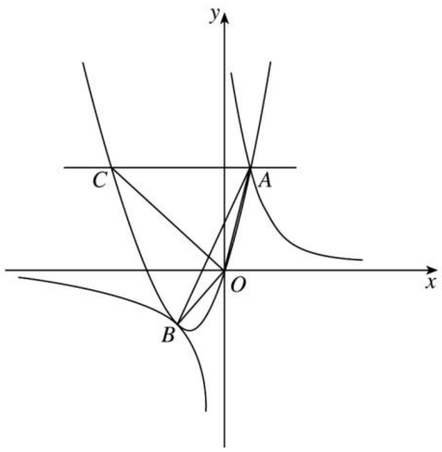
同理，若 $x_Q=\sqrt{3}$，则 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$

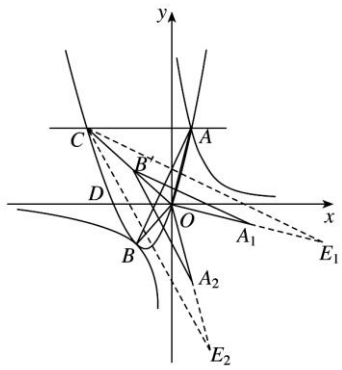
故直线 $PQ$ 的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 或 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

【例8】 如图，抛物线 $y=ax^2+bx(a>0)$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 相交于点 $A$，$B$，已知点 $A$ 的坐标为 $(1,4)$，点 $B$ 在第三象限内，且 $\triangle AOB$ 的面积为 3（ $O$ 为坐标原点）.

（1）求实数 $a$，$b$，$k$ 的值；

（2）过抛物线上点 $A$ 作直线 $AC\parallel x$ 轴，交抛物线于另一点 $C$，求所有满足 $\triangle EOC\backsim\triangle AOB$ 的点 $E$ 的坐标.




【解析】（1）因为点 $A(1,4)$ 在双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 上，

所以 $k=4$．故双曲线的函数表达式为 $y=\dfrac{4}{x}$．

设点 $B\left(t,\dfrac{4}{t}\right)$，$t<0$，$AB$ 所在直线的函数表达式为 $y=mx+n$，则有 $\begin{cases}4=m+n\\ \dfrac{4}{t}=mt+n\end{cases}$，

解得 $m=-\dfrac{4}{t}$， $n=\dfrac{4(t+1)}{t}$，

于是，直线 $AB$ 与 $y$ 轴的交点坐标为 $\left(0,\dfrac{4(t+1)}{t}\right)$，

故 $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4(t+1)}{t}(1-t)=3$，

整理得 $2t^2+3t-2=0$，解得 $t=-2$，或 $t=\dfrac{1}{2}$（舍去），

所以点 $B$ 的坐标为 $(-2,-2)$．

因为点 $A$，$B$ 都在抛物线 $y=ax^2+bx(a>0)$ 上，所以 $\begin{cases}a+b=4\\4a-2b=-2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$；

（2）如图，因为 $AC\parallel x$ 轴，所以 $C(-4,4)$，于是 $CO=4\sqrt{2}$．又 $BO=2\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{CO}{BO}=2$．

设抛物线 $y=ax^2+bx(a>0)$ 与 $x$ 轴负半轴相交于点 $D$，则点 $D$ 的坐标为 $(-3,0)$，

因为 $\angle COD=\angle BOD=45°$，所以 $\angle COB=90°$.

①将 $\triangle BOA$ 绕点 $O$ 顺时针旋转 $90°$，得到 $\triangle B'OA_1$．这时，点 $B'(-2,2)$ 是 $CO$ 的中点，点 $A_1$ 的坐标为 $(4,-1)$.

延长 $OA_1$ 到点 $E_1$，使得 $OE_1=2OA_1$，这时点 $E_1(8,-2)$ 是符合条件的点.

②作 $\triangle BOA$ 关于 $x$ 轴的对称图形 $\triangle B'OA_2$，得到点 $A_2(1,-4)$；延长 $OA_2$ 到点 $E_2$，使得 $OE_2=2OA_2$，这时点 $E_2(2,-8)$ 是符合条件的点.

所以，点 $E$ 的坐标是 $(8,-2)$，或 $(2,-8)$.

# 笔记整理

# 课后作业

1. 在直角坐标系中，抛物线$y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2\ \ (m>0)$与 $x$ 轴交于 $A$，$B$ 两点．若 $A$，$B$ 两点到原点的距离分别为 $OA$，$OB$，且满足$\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，则 $m$ 的值等于__________.

【解析】抛物线 $y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2(m>0)$ 与 $x$ 轴交于$\left(\frac{1}{2}m,0\right)$，$\left(-\frac{3}{2}m,0\right)$两点，

且 $OA>OB$，

所以$OA=\frac{3}{2}m$，$OB=\frac{1}{2}m$，

$\therefore \frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{m}-\frac{2}{3m}=\frac{2}{3}$，

$\therefore m=2$.

2. 已知二次函数 $y=x^2+(m+3)x+m+2$，当$-1<x<3$时，恒有 $y<0$；关于 x 的方程$x^2+(m+3)x+m+2=0$的两个实数根的倒数和小于$-\frac{9}{10}$．求 m 的取值范围.

【解析】因为当$-1<x<3$时，恒有 $y<0$，所以$\triangle=(m+3)^2-4(m+2)>0$，

即 $(m+1)^2>0$，所以 $m\neq-1$，

当 $x=-1$时，$y\leqslant 0$；

当 $x=3$时，$y\leqslant 0$，

即$(-1)^2+(m+3)(-1)+m+2\leqslant 0$，

且 $3^2+3(m+3)+m+2\leqslant 0$，

解得 $m\leqslant -5$，

设方程$x^2+(m+3)x+(m+2)=0$的两个实数根分别为$x_1$，$x_2$，

由一元二次方程根与系数的关系得$x_1+x_2=-(m+3), x_1x_2=m+2$，

因为$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<-\frac{9}{10}$，

所以$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{m+3}{m+2}<-\frac{9}{10}$，

解得 $m<-12$，或 $m>-2$，

因此 $m<-12$.

3. 已知抛物线 $y=x^2$ 与动直线 $y=(2t-1)x-c$ 有公共点 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，且 $x_1^2+x_2^2=t^2+2t-3$.

（1）求实数 $t$ 的取值范围；

（2）当 $t$ 为何值时，$c$ 取到最小值，并求出 $c$ 的最小值.

【解析】（1）联立 $y=x^2$ 与 $y=(2t-1)x-c$，

消去 $y$ 得二次方程 $x^2-(2t-1)x+c=0$ ①

有实数根 $x_1$，$x_2$，则 $x_1+x_2=2t-1$，$x_1x_2=c$.

所以

$$c=x_1x_2=\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)]=\frac{1}{2}[(2t-1)^2-(t^2+2t-3)]$$

$$=\frac{1}{2}(3t^2-6t+4) ②$$

把②式代入方程①得 $x^2-(2t-1)x+\frac{1}{2}(3t^2-6t+4)=0$ ③

$t$ 的取值应满足 $t^2+2t-3=x_1^2+x_2^2\geqslant 0$ ④

且使方程③有实数根，即 $\Delta=(2t-1)^2-2(3t^2-6t+4)=-2t^2+8t-7\geqslant 0$ ⑤

解不等式④得 $t\leqslant -3$ 或 $t\geqslant 1$，解不等式⑤得 $2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t\leqslant 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以，$t$ 的取值范围为 $2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t\leqslant 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

⑵ ②式知 $c=\frac{1}{2}(3t^2-6t+4)=\frac{3}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}$.

由于 $c=\frac{3}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}$ 在 $2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t\leqslant 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时是递增的，

所以，当 $t=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$c_{\min}=\frac{3}{2}(2-\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2+\frac{1}{2}=\frac{11-6\sqrt{2}}{4}$.

4. 当 $n=1,2,\cdots,2012$ 时，求所有二次函数 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 的图象与 $x$ 轴所截得的线段长度之和.

【解析】二次函数的解析式用两点式表示为 $y=n\cdot(n+1)\left(x-\frac{1}{n+1}\right)\left(x-\frac{1}{n}\right)$，

则它与 $x$ 轴两交点为 $\left(\frac{1}{n+1},0\right),\left(\frac{1}{n},0\right)$，

所截线段长度为 $d_n=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}(n=1,2,\cdots,2012)$，

所以 $d_1+d_2+\cdots+d_{2012}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)$

$=1-\frac{1}{2013}=\frac{2012}{2013}$.

5. 已知实数 $a$、$b$、$c$ 满足 $(a+c)(a+b+c)<0$．求证：$(b-c)^2>4a(a+b+c)$．

【解析】考虑二次函数 $y=ax^2-(b-c)x+(a+b+c)$，当 $x=0$ 时，$y_1=a+b+c$；当 $x=1$ 时，$y_2=2(a+c)$．由 $y_1y_2<0$，推知此函数在 $x=0$ 和 $x=1$ 时函数值异号，即其图象与 $x$ 轴有两个交点．因此，必须有 $\triangle=(b-c)^2-4a(a+b+c)>0$，即 $(b-c)^2>4a(a+b+c)$．

6. 当二次函数 $f(x)=a(x-m)^2+n$，$(a\neq 0)$ 与 $x$ 轴的两交点和函数图象的顶点所围成的三角形为顶角是 $120°$ 的等腰三角形时，求 $a$、$n$ 应满足的关系式.

【解析】设二次函数 $f(x)=a(x-m)^2+n$ 与 $x$ 轴的两交点分别为 $A$、$B$，顶点为 $C$，过 $C$ 作 $x$ 轴的垂线交于点 $D$，要使所围成的 $\triangle ABC$ 为有一个角为 $120°$ 的等腰三角形，则 $\angle A=30°$，$AC=2CD$，$AB=2\sqrt{3}CD$，$AD=\sqrt{3}CD$，且 $an<0$．

又因为 $C$ 点纵坐标为 $n$，所以 $f(x)$ 与 $x$ 轴交于点 $(m\pm\sqrt{3}n-m)^2+n=0$，

则 $3an^2+n=0$．

当 $n=0$ 时，不符合题意，所以 $3an=-1$．

故当 $3an=-1$ 时，二次函数 $f(x)=a(x-m)^2+n$ 与 $x$ 轴的两交点和顶点所围成的三角形为有一个角为 $120°$ 的等腰三角形.

7. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交于 $A$、$B$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$，若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，则 $ac$ 的值为多少？

【解析】设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，由 $\triangle ABC$ 是直角三角形，可知 $x_1$、$x_2$ 必定异号，则 $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$．由射影定理知 $|OC|^2=|AO|\cdot|BO|$，即 $c^2=|x_1|\cdot|x_2|=\left|\frac{c}{a}\right|$．故 $|ac|=1$，所以 $ac=-1$．

8. 求抛物线族 $y=2x^2-4mx+2m^2+m+1$（$m$ 为参数）与 $\left(\frac{1}{8},1\right)$ 为圆心、1 为半径的圆内部相交部分的面积.

【解析】整理抛物线族的解析式，得 $y=2(x-m)^2+m+1$，顶点 $(m,m+1)$ 在直线 $y=x+1$ 上，可知这些抛物线掠过区域是一条直线上方的半平面，这条直线与这些抛物线都只有一个交点，设此直线为 $y=x+b$，由 $\begin{cases} y=2x^2-4mx+2m^2+m+1, \\ y=x+b, \end{cases}$ 得 $2x^2-(4m+1)x+2m^2+m+1-b=0$，由 $\triangle=0$，得 $b=\frac{7}{8}$，即直线为 $y=x+\frac{7}{8}$，而圆心 $\left(\frac{1}{8},1\right)$ 恰好在直线上，所以相交部分为半圆，面积 $S=\frac{\pi}{2}$.