讲义说明

由于时间仓促和编者水平有限，编写中难免出现错误或不当之处，希望家长及同学们能直言不讳地给我们提出宝贵的意见，以便今后修订升级．若有发现，非常期待家长和同学们将修改意见发送至顺为教育教研部邮箱(*jiaoyan@shunweijiaoyu.com*)！我们会定期评选出突出贡献者，并给予丰厚的奖励

目录

第一讲、解三角形综合

模块一、解直角三角形

知识集锦

解直角三角形

1．直角三角形中的特殊线：

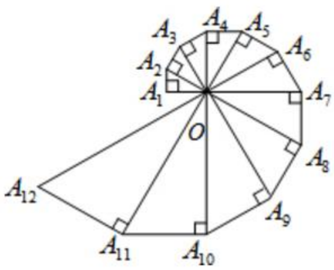
“直角三角形斜边中线 $d=\dfrac{c}{2}$”	“直角三角形斜边高 $h=\dfrac{ab}{c}$”

2．特殊直角三角形的三边关系：

“等腰直角三角形”	“含30°和60°的直角三角形”
边的比：$1:1:\sqrt{2}$	边的比：$1:\sqrt{3}:2$

【例1】

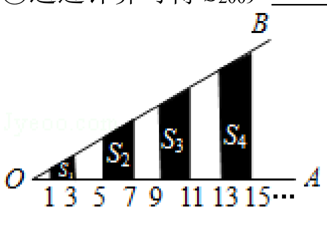
（1）如图，已知 $A_1A_2=1$，$\angle OA_1A_2=90°$，$\angle A_1OA_2=30°$，以斜边 OA_2 为直角边作直角三角形，使得 $\angle A_2OA_3=30°$，依次以前一个直角三角形的斜边为直角边一直作含 30°角的直角三角形，则 $Rt\triangle A_{2014}OA_{2015}$ 的面积为________。



（2）如图，$\angle AOB=30°$，过 OA 上到点 O 的距离为 1，3，5，7，…的点作 OA 的垂线，分别与 OB 相交，得到图所示的阴影梯形，它们的面积依次记为 S_1，S_2，S_3，…． 则

①S_1=__________；

②通过计算可得 S_{2009}=__________。



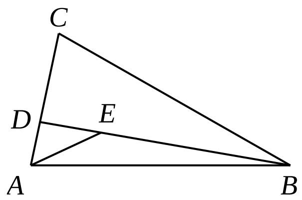
模块二、解含特殊角的三角形

知识集锦

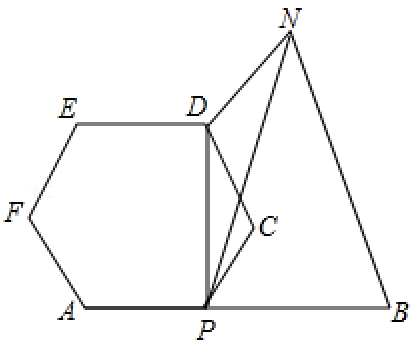
方法：作垂线，将特殊角放在直角三角形中，从而利用特殊角的直角三角形的三边之比求解；
注意：①作高时不能破坏已知的特殊角（30°、45°、60°、120°、135°、150°）；
②作高时注意判断三角形是锐角、钝角还是直角三角形，尤其对于无图题，须讨论高线在三角形内部和外部的情况．注意高线是否在三角形内部．

【例2】

（1）在△ABC 中，$AB=BC$，$\angle ABC=30°$，D 为 AC 边上一点，连接 BD，在 BD 上取点 E，连接 AE，若$\angle AED=30°$，$DE=2$，$BE=6$，求△BDC 的面积。



（2）如图，已知 $AB=10$，点 P 是线段 AB 上的动点，以 AP 为边作正六边形 $APCDEF$，以 PB 为底作等腰△BPN，连接 PD、DN，则△PDN 的面积的最大值是____________.



模块三、解三角形综合

【例3】

已知△ABC中，AD是∠BAC的平分线，且$AD=AB$，过点C作AD的垂线，交AD的延长线于点H。

（1）如图1，若∠BAC=60°。

①直接写出∠B和∠ACB的度数；

②若AB=2，求AC和AH的长；

（2）如图2，用等式表示线段AH与AB+AC之间的数量关系，并证明。

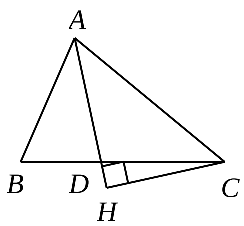


图1

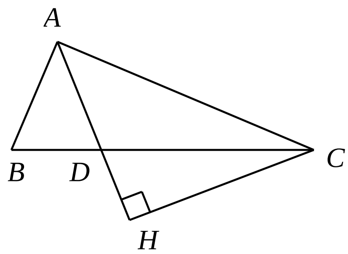


图2

【例4】

如图1，在等边△ABC和等边△ADP中，AB=2，点P在△ABC的高CE上（点P与点C不重合），点D在点P的左侧，连接BD，ED。

（1）求证：$BD=CP$；

（2）当点P与点E重合时，延长CE交点BD于点F，请你在图2中作出图形，并求出BF的长；

（3）直接写出线段DE长度的最小值。

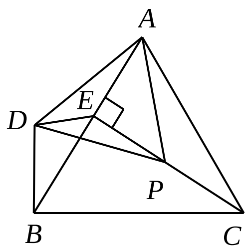


图1

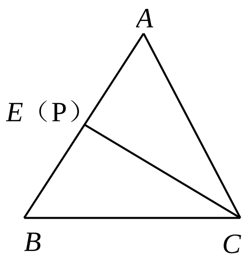


图2

【例5】

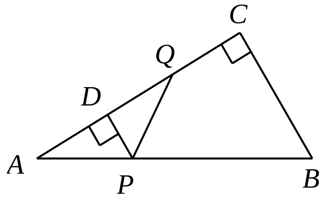
如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AB=4$，动点 P 从点 A 出发，沿 AB 以每秒 2 个单位长度的速度向终点 B 运动．过点 P 作 $PD\perp AC$ 于点 D（点 P 不与点 A、B 重合），作 $\angle DPQ=60°$，边 PQ 交射线 DC 于点 Q．设点 P 的运动时间为 t 秒。

（1）用含 t 的代数式表示线段 DC 的长;

（2）当点 Q 与点 C 重合时，求 t 的值;

（3）设 $\triangle PDQ$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分图形的面积为 S，求 S 与 t 之间的函数关系式;

（4）当线段 PQ 的垂直平分线经过 $\triangle ABC$ 一边中点时，直接写出 t 的值。



巅峰挑战

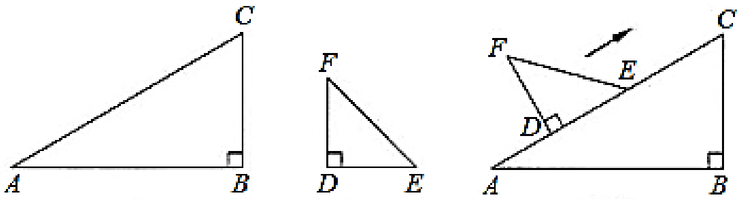
用硬纸片做了两个直角三角形，见图①、②。图①中，$\angle B=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，BC=6cm；图②中，$\angle D=90^\circ$，$\angle E=45^\circ$，DE=4cm。图③为所做实验：将△DEF 的直角边 DE 与△ABC 的斜边 AC 重合在一起，并将△DEF 沿 AC 方向移动。在移动过程中，D、E 两点始终在 AC 边上（移动开始时点 D 与点 A 重合）。

（1）在△DEF 沿 AC 方向移动的过程中，F、C 两点间的距离逐渐______。(填“不变”、“变大”或“变小”)

（2）问题①：当△DEF 移动至什么位置，即 AD 的长为多少时，F、C 的连线与 AB 平行？

问题②：当△DEF 移动至什么位置，即 AD 的长为多少时，以线段 AD、FC、BC 的长度为三边长的三角形可以组成以 AD 或 FC 长为斜边的直角三角形？如果可以，求出 AD 长度；如果不行，说明原因。

问题③：在△DEF 的移动过程中，是否存在某个位置，使得$\angle FCD=15^\circ$？如果存在，求出 AD 的长度；如果不存在，请说明理由。



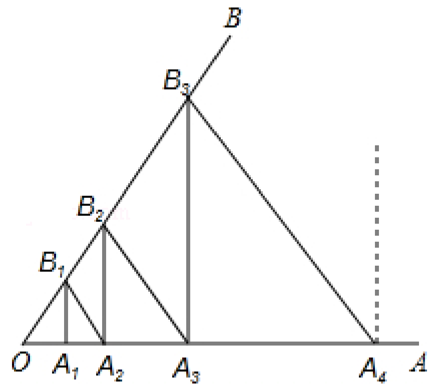
（图①）　（图②）　（图③）

笔记整理

第一讲课后练习

1.

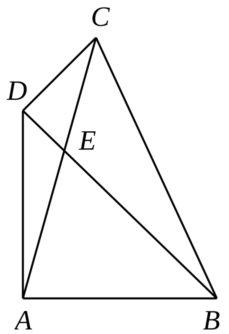
如图，已知$\angle AOB=60°$，在OA上取$OA_1=1$，过点A_1作$A_1B_1\perp OA$交OB于点B_1，过点B_1作$B_1A_2\perp OB$交OA于点A_2，过点A_2作$A_2B_2\perp OA$交OB于点B_2，过点B_2作$B_2A_3\perp OB$交OA于点A_3，…，按此作法继续下去，则OA_{10}的值是______。



【答案】4^9

2.

如图所示，在四边形$ABCD$中，对角线AC、BD相交于点E，$\angle DAB=\angle CDB=90^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$，$\angle DCA=30^\circ$，$AB=\sqrt{6}$。求$AE$的长和$\triangle ADE$的面积。



【解析】过点A作$AF\perp BD$于点F，$\because\angle CDB=90°$，$\angle 1=30°$，

$\therefore\angle 2=\angle 3=60°$，在$\triangle AFB$中，$\angle AFB=90°$，

$\because\angle 4=45°$，$AB=\sqrt{6}$，$\therefore AF=BF=\sqrt{3}$，在$Rt\triangle AEF$中，$\angle AFE=90°$，

$\therefore EF=1$，$AE=2$，在$\triangle ABD$中，$\angle DAB=90°$，$AB=\sqrt{6}$，

$\therefore DB=2\sqrt{3}$，$\therefore DE=DB-BF-EF=\sqrt{3}-1$；

$\therefore S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}DE\times AF=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{3}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

3.

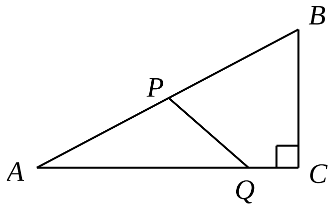
如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AB=8$，点 P 从点 A 出发，沿折线 $AB-BC$ 向终点 C 运动，在 AB 上以每秒 8 个单位长度的速度运动，在 BC 上以每秒 2 个单位长度的速度运动，点 Q 从点 C 出发，沿 CA 方向以每秒 $\sqrt{3}$ 个单位长度的速度运动，两点同时出发，当点 P 停止时，点 Q 也随之停止。设点 P 运动的时间为 t 秒。

（1）求线段 AQ 的长；（用含 t 的代数式表示）

（2）当点 P 在 AB 边上运动时，求 PQ 与$\triangle ABC$ 的一边垂直时 t 的值；

（3）设$\triangle APQ$ 的面积为 S，求 S 与 t 的函数关系式；

（4）当$\triangle APQ$ 是以 PQ 为腰的等腰三角形时，直接写出 t 的值。



【解析】（1）如图 1，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$AB=8$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=4$，

$\therefore AC=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$，

由题意得：$CQ=\sqrt{3}t$，

$\therefore AQ=4\sqrt{3}-\sqrt{3}t$；

（2）当点 P 在 AB 边上运动时，PQ 与$\triangle ABC$ 的一边垂直，有四种情况：

①当 Q 在 C 处，P 在 A 处时，$PQ\perp BC$，此时 $t=0$；

②当 $PQ\perp AB$ 时，如图 2，

$\because AQ=4\sqrt{3}-\sqrt{3}t$，$AP=8t$，$\angle A=30°$，

$\therefore \frac{AP}{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \frac{8t}{4\sqrt{3}-\sqrt{3}t}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$t=\frac{12}{19}$；

③当 $PQ\perp AC$ 时，如图 3，

$\because AQ=4\sqrt{3}-\sqrt{3}t$，$AP=8t$，$\angle A=30°$，

$\therefore \frac{AQ}{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}t}{8t}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t=\frac{4}{5}$；

④当 $t=3$ 时，P 与 C 重合，Q 在 AC 上，此时 $PQ\perp BC$；

综上所述，当点 P 在 AB 边上运动时，PQ 与△ABC 的一边垂直时 t 的值是 $t=0$ 或 $\frac{12}{19}$ 或 $\frac{4}{5}$ 或 3；

（3）分两种情况：

①当 P 在 AB 边上时，即 $0\leqslant t\leqslant 1$，如图 4，作 $PG\perp AC$ 于 G，

∵ $\angle A=30°$，$AP=8t$，$\angle AGP=90°$，

∴$PG=4t$，

∴$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}AQ\bullet PG=\frac{1}{2}(4\sqrt{3}-\sqrt{3}t)\bullet 4t=-2\sqrt{3}t^2+8\sqrt{3}t$；

②当 P 在边 BC 上时，即 $1<t\leqslant 3$，如图 5，

由题意得：$PB=2(t-1)$，

∴$PC=4-2(t-1)=-2t+6$，

∴$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}AQ\bullet PC=\frac{1}{2}(4\sqrt{3}-\sqrt{3}t)(-2t+6)=\sqrt{3}t^2-7\sqrt{3}t+12\sqrt{3}$；

综上所述，S 与 t 的函数关系式为：$S=\begin{cases}-2\sqrt{3}t^2+8\sqrt{3}t(0\le t\le 1)\\ \sqrt{3}t^2-7\sqrt{3}t+12\sqrt{3}(1<t\le 3)\end{cases}$；

（4）当△APQ 是以 PQ 为腰的等腰三角形时，有两种情况：

①当 P 在边 AB 上时，如图 6，$AP=PQ$，作 $PG\perp AC$ 于 G，则 $AG=GQ$，

∵ $\angle A=30°$，$AP=8t$，$\angle AGP=90°$，

∴$PG=4t$，

∴$AG=4\sqrt{3}t$，

由 $AQ=2AG$ 得：$4\sqrt{3}-\sqrt{3}t=8\sqrt{3}t$，$t=\frac{4}{9}$，

②当 P 在边 AC 上时，如图 7，$AQ=PQ$，

$Rt\triangle PCQ$ 中，由勾股定理得：$CQ^2+CP^2=PQ^2$，

∴ $(\sqrt{3}t)^2+(-2t+6)^2=(4\sqrt{3}-\sqrt{3}t)^2$，

$t=\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$（舍），

综上所述，t 的值为 $\frac{4}{9}$ 或 $\sqrt{3}$.

第二讲、几何综合

【例1】

（1）如图 1-1，在△ABC 中，$\angle BAC$=90°，$AB=AC=6\sqrt{2}$，点 D、E 均在边 BC 上，且$\angle DAE$=45°，$CE=3$，则 DE=________。

（2）如图 1-2，点 C 为线段 AB 上一点，且 AC=2CB，以 AC、CB 为边在 AB 的同侧作等边△ADC 和等边△EBC，连接 DB、AE 交于点 F，连接 FC，若 FC=3，设 DF=a、EF=b，则 a、b 满足____________。

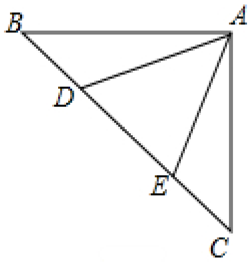


图 1-1

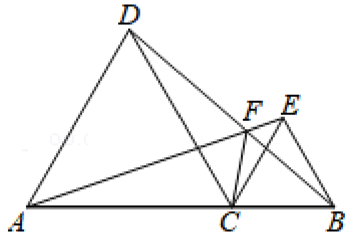


图 1-2

【例2】

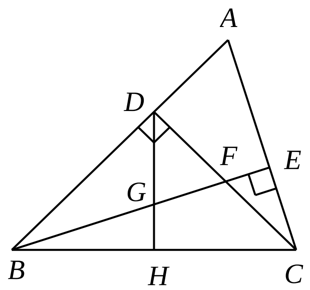
已知：如图，在△ABC 中，$\angle ABC$=45°，$CD\perp AB$ 于 D，BE 平分$\angle ABC$，且 $BE\perp AC$ 于 E，与 CD 相交于点 F，H 是 BC 边的中点，连接 DH 与 BE 相交于点 G .

（1）求证：$\angle ABE$=$\angle ACD$;

（2）求证：$CE=\frac{1}{2}BF$；

（3）计算 $\frac{BG}{EC}$ 的值;

（4）若 $BC=2\sqrt{2}$ ，请求出 AC 的长度。



【例3】

如图，已知△BAD 和△BCE 均为等腰直角三角形，$\angle BAD=\angle BCE=90°$，点 M 为 DE 的中点，过点 E 与 AD 平行的直线交射线 AM 于点 N

（1）当 A、B、C 三点在同一直线上时（如图 1），求证：M 为 AN 的中点；

（2）将图 1 中 ΔBCE 绕点 B 旋转，当 A、B、E 三点在同一直线上时（如图 2）求证：△ACN 为等腰直角三角形；若 AE=8，AD=2，求四边形 $ACEN$ 的面积；

（3）将图 1 中△BCE 绕点 B 旋转到图 3 位置时，△ACN 是否仍然为等腰直角三角形？若成立，请证明，若不成立，说明理由；

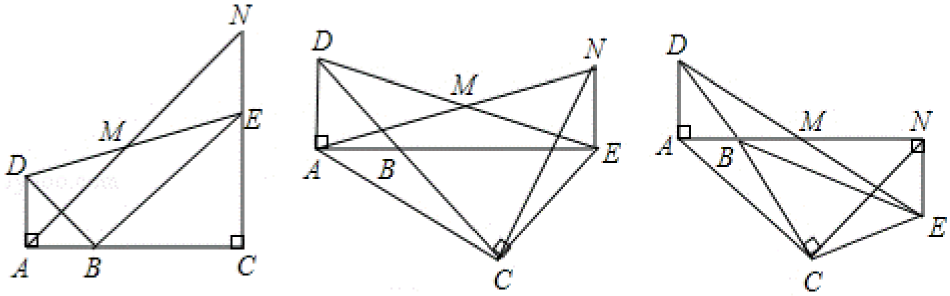
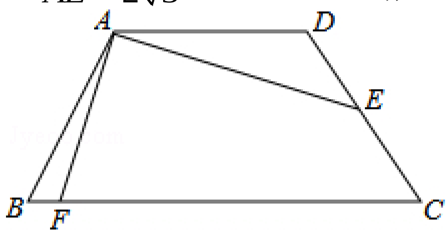


图1 图2 图3

【例4】

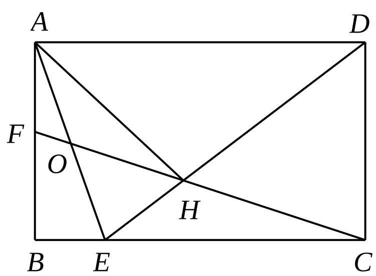
（1）如图，已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，AD∥BC，AB=CD，$AD=\sqrt{2}$，E 为 CD 中点，连接 AE，且 $AE=2\sqrt{3}$，∠DAE=30°，作 AE⊥AF 交 BC 于 F，则 BF=__________。



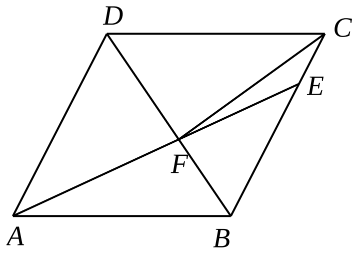
（2）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=\sqrt{2}AB$，∠ADC 的平分线交边 BC 于点 E，AH⊥DE 于点 H，连接 CH 并延长交边 AB 于点 F，连接 AE 交 CF 于点 O，给出下列命题：

①∠AEB=∠AEH；②$DH=2\sqrt{2}EH$；③$OH=\frac{1}{2}AE$；④$BC-BF=\sqrt{2}EH$；

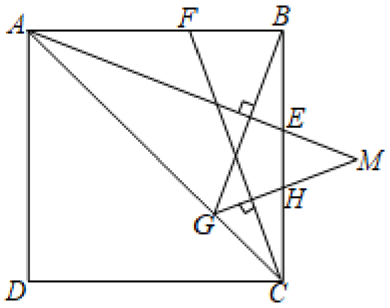
其中正确命题的序号______________。



（3）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$\angle DAB=60°$，AE 分别交 BC、BD 于点 E、F，$CE=2$，连接 CF，以下结论：①$\triangle ABF \cong \triangle CBF$；②点 E 到 AB 的距离是 $2\sqrt{3}$；③ $DF=\frac{18}{5}$；④$\triangle ABF$ 的面积为 $\frac{12}{5}\sqrt{3}$。其中一定成立的是____________。



【例5】
如图，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别为 BC、AB 上两点，且 $BE=BF$，过点 B 作 AE 的垂线交 AC 于点 G，过点 G 作 CF 的垂线交 BC 于点 H 延长线段 AE、GH 交于点 M。求证：$AM=BG+GM$。



【例6】
在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的角平分线交直线 BC 于点 E，交直线 DC 于点 F。
（1）在图 4-1 中证明 $CE=CF$；
（2）若 $\angle ABC=90°$，G 是 EF 的中点（如图 4-2），求 $\angle BDG$ 的度数；
（3）若 $\angle ABC=120°$，$FG//CE$，$FG=CE$，分别连接 BD、DG（如图 4-3），直接写出 $\angle BDG$ 的度数。

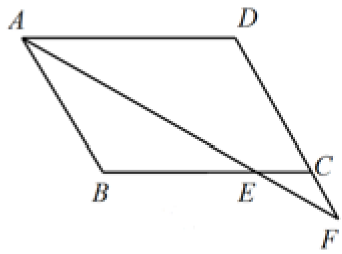


图 4-1

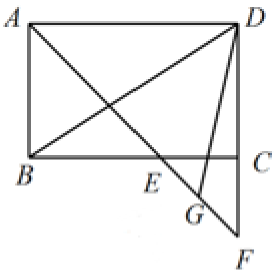


图 4-2

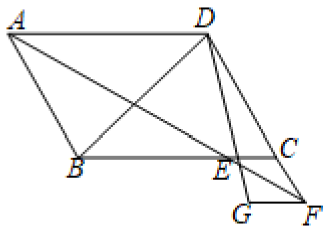


图 4-3

巅峰挑战

如图 3-1，将菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ 拼接在一起，使得点 A，B，E 在同一条直线上，点 G 在 BC 边上，P 是线段 DF 的中点，连接 PG，PC。若 $\angle ABC = 120°$。

（1）求出线段 PG 与 PC 的位置关系及 $\angle PCG$ 的大小；

（2）将图 3-1 中的菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转，使点 E 恰好落在 CB 的延长线上，原问题中的其他条件不变（如图 3-2）。你在（1）中得到的两个结论是否仍成立？写出你的猜想并加以证明。

（3）将图 3-1 中的菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转任意角度，原问题中的其他条件不变（如图 3-3）。你在（1）中得到的两个结论是否仍成立？写出你的猜想并加以证明。

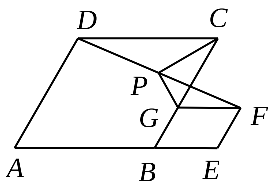


图3-1

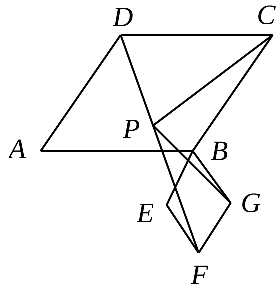


图3-2

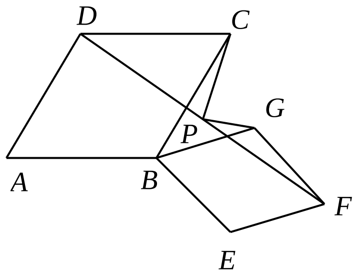


图3-3

笔记整理

第二讲课后练习

1.

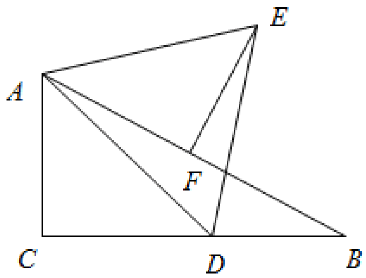
在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$AB=10$，点 D 是射线 CB 上的一个动点，$\triangle ADE$ 是等边三角形，点 F 是 AB 的中点，连接 EF。

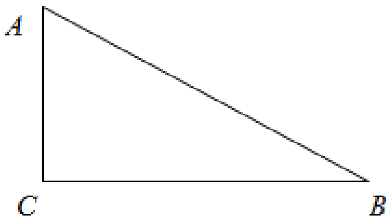
（1）如图，点 D 在线段 CB 上时，

①求证：$\triangle AEF\cong\triangle ADC$；

②连接 BE，设线段 $CD=x$，$BE=y$，求 y^2-x^2 的值；

（2）当 $\angle DAB=15°$时，求$\triangle ADE$ 的面积。





【答案】(1) ②$y^2-x^2=25$

(2) $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ 或 $50\sqrt{3}+75$

2.

如图，矩形 $ABCD$ 中，O 为 AC 中点，过点 O 的直线分别与 AB，CD 交于点 E，F，连接 BF 交 AC 于点 M，连接 DE，BO。若 $\angle COB=60°$，$FO=FC$，则下列结论：

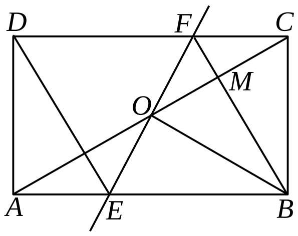
① $FB\perp OC$，$OM=CM$；

② $\triangle EOB\cong\triangle CMB$；

③四边形 $EBFD$ 是菱形；

④ $MB:OE=3:2$。

其中正确结论为_____________。



【答案】①③④；连接 OD 即可．

3.

已知：矩形 $ABCD$ 中 $AD>AB$，O 是对角线的交点，过 O 任作一直线分别交 BC、AD 于点 M、N（如图 3-1）。

（1）求证：$BM=DN$；

（2）如图 3-2，四边形 $AMNE$ 是由四边形 $CMND$ 沿 MN 翻折得到的，连接 CN，求证：四边形 $AMCN$ 是菱形；

（3）在（2）的条件下，若 $\triangle CDN$ 的面积与 $\triangle CMN$ 的面积比为 $1:3$，求 $\dfrac{MN}{DN}$ 的值。

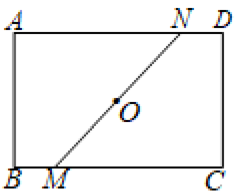


图 3-1

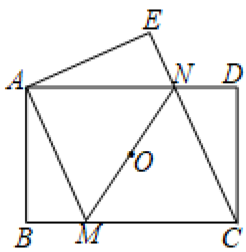


图 3-2

【解析】(1) 连接 BD，则 BD 过点 O，

$\because AD//BC$，

$\therefore \angle OBM=\angle ODN$，

又 $OB=OD$，$\angle BOM=\angle DON$，

$\therefore \triangle OBM\cong\triangle ODN$，

$\therefore BM=DN$；

（2）$\because$ 矩形 $ABCD$，

$\therefore AD//BC$，$AD=BC$，

又 $BM=DN$，

$\therefore AN=CM$，

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形，

由翻折得，$AM=CM$，

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是菱形；

（3）$\because S_{\triangle CDN}=\dfrac{1}{2}DN\cdot CD$，$S_{\triangle CMN}=\dfrac{1}{2}CM\cdot CD$，

又 $S_{\triangle CDN}:S_{\triangle CMN}=1:3$，

$\therefore DN:CM=1:3$，

设 $DN=k$，则 $CN=CM=3k$，

过 N 作 $NG\perp MC$ 于点 G，

则 $CG=DN=k$，$MG=CM-CG=2k$，

$NG=\sqrt{CN^2-CG^2}=\sqrt{9k^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

$\therefore MN=\sqrt{MG^2+NG^2}=\sqrt{4k^2+8k^2}=2\sqrt{3}k$

$\therefore \dfrac{MN}{DN}=\dfrac{2\sqrt{3}k}{k}=2\sqrt{3}$.

4.

在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$=60°，E 是对角线 AC 上一点，F 是线段 BC 延长线上一点，且 CF=AE，连接 BE、EF。

（1）若 E 是线段 AC 的中点，如图 4-1，证明：BE=EF；

（2）若 E 是线段 AC 或 AC 延长线上的任意一点，其它条件不变，如图 4-2、图 4-3，线段 BE、EF 有怎样的数量关系，直接写出你的猜想；并选择一种情况给予证明。

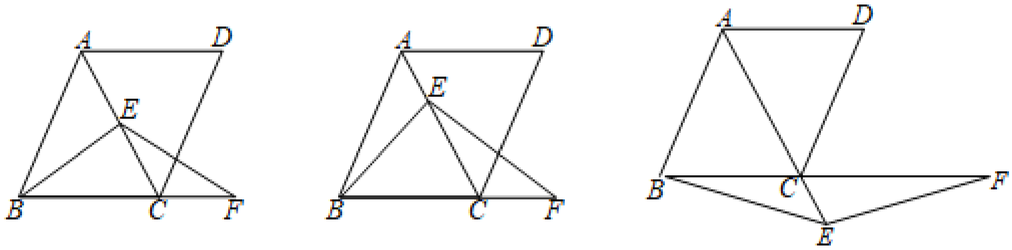


图 4-1　　图 4-2　　图 4-3

【解析】（1）∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $AB=BC$，又∵ $\angle ABC=60°$，

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∵E 是线段 AC 的中点，

∴ $\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$，$AE=CE$，

∵ $AE=CF$，∴ $CE=CF$，

∴ $\angle F=\angle CEF$，

∵ $\angle F+\angle CEF=\angle ACB=60°$，

∴ $\angle F=30°$，∴ $\angle CBE=\angle F$，

∴ $BE=EF$；

（2）图 2：$BE=EF$．

图 3：$BE=EF$．

图 2 证明如下：过点 E 作 $EG//BC$，交 AB 于点 G，

∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $AB=BC$，

又∵ $\angle ABC=60°$，

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $AB=AC$，$\angle ACB=60°$，

又∵$EG//BC$，

∴ $\angle AGE=\angle ABC=60°$，

又∵ $\angle BAC=60°$，

∴ $\triangle AGE$ 是等边三角形，

∴ $AG=AE$，∴ $BG=CE$，

又∵ $CF=AE$，∴ $GE=CF$，

又∵ $\angle BGE=\angle ECF=120°$，

∴ $\triangle BGE\cong\triangle ECF(\text{SAS})$，

∴ $BE=EF$；

图 3 证明如下：过点 E 作 $EG//BC$ 交 AB 延长线于点 G，

∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AB=BC$，

又∵ $\angle ABC=60°$，

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $AB=AC$，$\angle ACB=60^\circ$，

又∵$EG//BC$，

∴ $\angle AGE=\angle ABC=60^\circ$，

又∵ $\angle BAC=60^\circ$，

∴ $\triangle AGE$ 是等边三角形，

∴ $AG=AE$，∴ $BG=CE$，

又∵ $CF=AE$，∴ $GE=CF$，

又∵ $\angle BGE=\angle ECF=60^\circ$，

∴ $\triangle BGE\cong\triangle ECF(\mathrm{SAS})$，∴ $BE=EF$．

第三讲、一次函数中的面积问题

知识集锦

1．铅垂线法
常用于：三角形三边均不与坐标轴平行的三角形面积计算
做法：
第一步：分别过△ABC的三个顶点作出与水平线（平行 x 轴）垂直的三条直线。
第二步：如图，选择一个顶点做三角形的铅垂高（左图在内部作铅垂高，右图在外部作铅锤高）。
第三步：以另外两个顶点来确定水平宽。
第四步：$S_{\triangle}=\dfrac{\text{水平宽}\times\text{铅垂高}}{2}=\dfrac{1}{2}ah$
（在坐标系中，我们可以通过坐标的数值来直接确定水平宽与铅锤高）

2．割补法
对于不规则图形的面积计算，我们常用割补法将其分割成若干个规则的图形计算，或者将其补成一个大的规则图形，然后减掉多余的部分。
例：三角形三边均不与坐标轴平行的三角形面积计算
做法：
第一步：过三角形三个顶点分别作水平线（平行 x 轴）或者铅垂线
第二步：将其补为一个矩形，并且把多余的部分分割为直角三角形或矩形
第三步：分别确定每一块图形的面积然后根据面积关系求出需要得到的三角形面积

（这种方法看似复杂，但对于三点均确定的三角形来说非常简便，所有需要计算的长度都可以直接通过坐标来确定。）

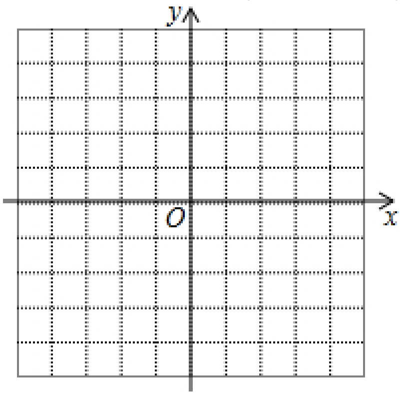
在实际应用中，对于动点产生的面积问题，如果形状（点的相对位置关系）发生改变，一般用铅垂线法；如果点的坐标确定，一般用割补法较为简单。

模块一、静态面积计算

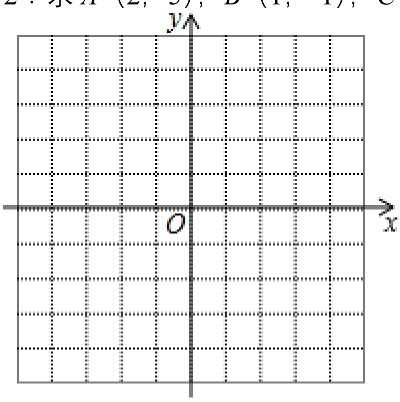
模块一、静态面积计算

【例1】

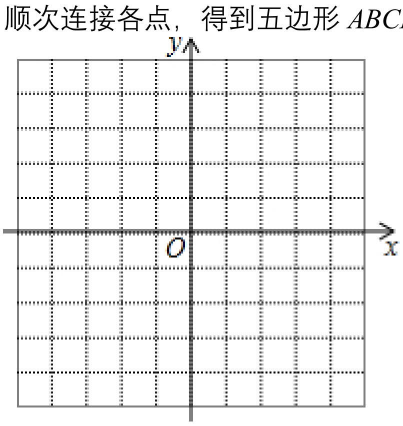
1．求两个一次函数 $y=2x+1$， $y=4x-5$ 的图像与 y 轴围成的图形的面积。



2．求 A（2，5），B（1，-1），C（-2，3）三点围成的三角形的面积。

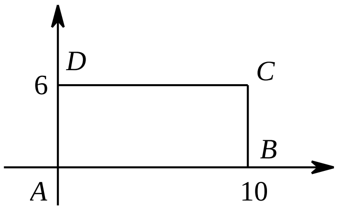


3．在如图所示的平面直角坐标系中：A（-2，0），B（0，4），C（4，3），D（5，0），E（1，-2）顺次连接各点，得到五边形 $ABCDE$，求这个五边形的面积。



【例2】

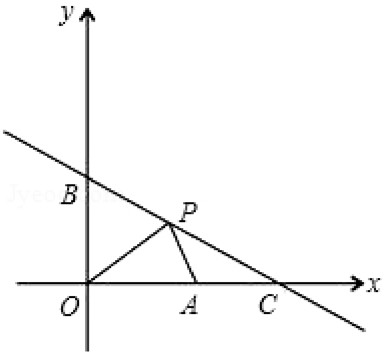
已知平面上四点 A（0，0），B（10，0），C（10，6），D（0，6），直线 $y=mx-3m+2$ 将四边形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分，则 m 的值为________。



模块二、动态面积计算

【例3】

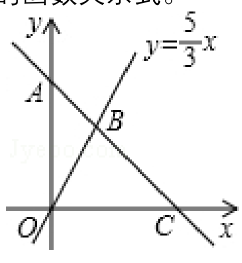
1．如图，在平面直角坐标系中，A 点的坐标为（4，0），点 P 是直线 $y=-\frac{1}{2}x+4$ 在上的一点，O 是原点，设 P 点的坐标为（x，y），△OPA 的面积为 S，试求 S 关于 x 的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围。



2．一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 A（0，9），并且与直线 $y=\frac{5}{3}x$ 相交于点 B，与 x 轴相交于点 C。

（1）若点 B 的横坐标为 3，求 B 点的坐标和 k，b 的值；

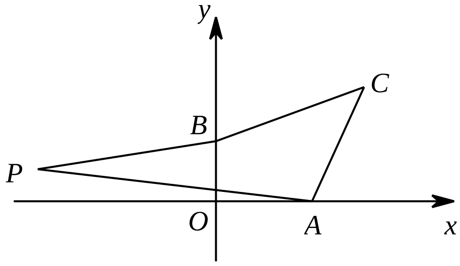
（2）在（1）的条件下，在直线 $y=kx+b$ 上是存在动点 Q，写出△OBQ 的面积 S 与动点 Q 的横坐标 a 之间的函数关系式。



3．如图，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰直角△ABC，∠BAC=90°，

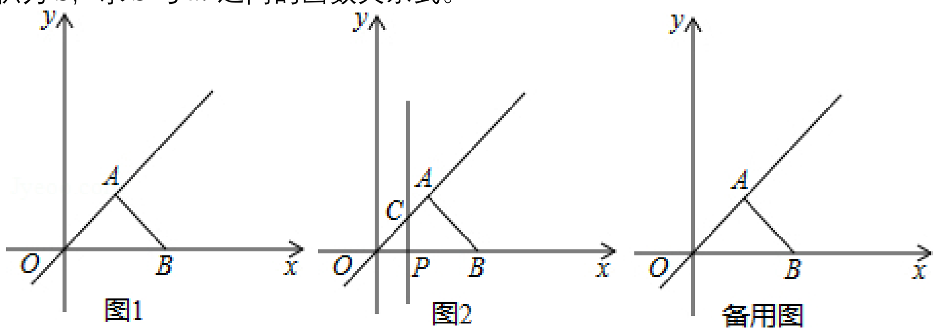
（1）求点 A、B、C 的坐标；

（2）如果在第二象限内有一点 $P\left(a,\frac{1}{2}\right)$，求出△$ABP$ 的面积 S 与 a 的函数关系式，并且写出△ABP 的面积与△ABC 的面积相等时，a 的值；



【例4】

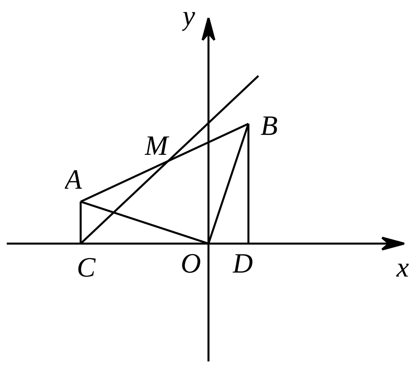
1．如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，等腰直角△AOB 的斜边 OB 在 x 轴上，顶点 A 的坐标为（2，2）。(1) 求直线 OA 的解析式；(2) 如图 2，动点 P 从原点 O 沿 x 轴正方向运动，到 B 点时停止运动．过点 P 作 $PC\perp x$ 轴于点 P，交直线 OA 于点 C，设点 P 的坐标为（m，0），直线 PC 在△OAB 内部扫过的面积为 S，求 S 与 m 之间的函数关系式。



2．在平面直角坐标系中，$\triangle AOC$ 中，$\angle ACO=90^{\circ}$，把 AO 绕 O 点顺时针旋转 90° 得 OB，连接 AB，作 $BD\perp$ 直线 CO 于 D，点 A 的坐标为（-3，1）

（1）求 B 点坐标与直线 AB 的解析式

（2）若 AB 中点为 M，连接 CM，动点 P、Q 分别从 C 出发，点 P 沿着射线 CM 以每秒两个单位长度的速度运动，点 Q 沿线段 CD 以每秒一个单位长度的速度向终点 D 运动，当 Q 点运动到 D 点时，P、Q 同时停止，设△PQD 的面积为 $S\left(S\neq 0\right)$，运动时间为 t 秒，求 S 与 t 的函数关系式，并直接写出自变量 t 的取值范围。

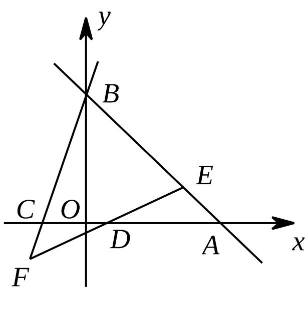


【例5】

1．如图，y=-x+6 与坐标轴交于 A、B 两点，点 C 在 x 轴负半轴上，$S_{\triangle OBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AOB}$。

（1）求直线 BC 的解析式；

（2）直线 EF：$y=kx-k$ 交 AB 于 E 点，与 x 轴交于 D 点，交 BC 的延长线于点 F，且 $S_{\triangle BED}=S_{\triangle FBD}$，求 k 的值。



2．已知直线 $y=-x+2$ 与 x，y 轴分别交于 A、B 两点，另一直线 $y=kx+b$（k≠0）经过 C（1，0），且把△AOB 分成两部分。若△AOB 被分成的两部分面积之比为 1:5，求直线 $y=kx+b$ 的解析式。

笔记整理

第三讲课后练习

1．(1) 求一次函数$y=2x-2$的图象l_1与$y=\frac{1}{2}x-1$的图象l_2的交点P的坐标;

(2) 求直线l_1与y轴交点A的坐标；求直线l_2与x轴的交点B的坐标;

(3) 求由三点P、A、B围成的三角形的面积。

【解析】(1) 由$\begin{cases} y=2x-2 \\ y=\frac{1}{2}x-1 \end{cases}$解得：$\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$所以点$P$的坐标为（$\frac{2}{3}$，$-\frac{2}{3}$），

(2) 当$x=0$时，由$y=2\times0-2=-2$，所以点A坐标是（0，-2）.

当$y=0$时，由$0=-\frac{1}{2}x-1$，得$x=2$，所以点B坐标是（2，0）.

(3) 如图：连AB，$\therefore S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$.

2．已知平面上四点A（0，0），B（10，0），C（10，6），D（0，6），直线$y=mx-3$将四边形$ABCD$分成面积相等的两部分，则m的值是_______。

【解析】∵平面上四点A（0，0），B（10，0），C（10，6），D（0，6），∴$AB=DC=10$，$AD=BC=6$，

∴四边形$ABCD$的面积为60，∵直线EF的解析式为$y=mx-3$，∴令$y=0$，得$mx-3=0$，

解得：$x=\frac{3}{m}$

，∴线段$AE=\frac{3}{m}$，令$y=6$，得$mx-3=6$，解得$x=\frac{9}{m}$，

∴线段DF的长为$\frac{9}{m}$，∵直线EF平分四边形$ABCD$，∴四边形$AEFD$的面积为30，

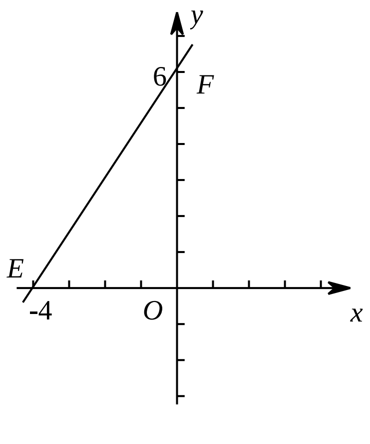
即：$\frac{1}{2}$（$AE+DF$）$AD=30$，∴$\frac{1}{2}$（$\frac{3}{m}+\frac{9}{m}$）$\times6=30$，解得$m=1.2$.

3．如图，直线l：$y=kx+6$分别于x轴，y轴交于E、F点，点E的坐标为（-4，0）．若点A的坐标为（-3，0），点P（x，y）是平面内的一个动点．

(1) 求k的值;

(2) 若点P在直线l上（与点E不重合），试写出$\triangle OPA$的面积S与x的函数关系式;

(3) 是否存在横坐标为-4的点P，使得$S_{\triangle EFP}=10$？若存在，求出点P的坐标；若不存在，说明理由。



【解析】(1) 将点E（-4，0）代入，可得$0=-4k+6$，解得：$k=\frac{3}{2}$；

（2）①当点 P 在 x 轴上方时，即 $x>-4$ 时，点 P 的纵坐标$=\frac{3}{2}x+6$，

$S=\frac{1}{2}OA\times P_{纵坐标}=\frac{1}{2}\times3\times(\frac{3}{2}x+6)=\frac{9}{4}x+9$；

②当点 P 在 x 轴下方时，即 $x<-4$ 时，点 P 的纵坐标$=-\frac{3}{2}x-6$，

$S=\frac{1}{2}OA\times P_{纵坐标}=\frac{1}{2}\times3\times(-\frac{3}{2}x-6)=-\frac{9}{4}x-9$；

（3）假设存在点 $P(-4，y)$，由题意得：$S_{\triangle EFP}=10$，则 $\frac{1}{2}\times4\times|y|=10$

解得：$y=\pm5$，故存在点 P，坐标为 $(-4，5)$ 或 $(-4，-5)$.

4. 已知点 $C(0，-2)$，直线 l：$y=kx-2k$ 无论 k 取何值，直线总过定点 B。

（1）求定点 B 的坐标；

（2）如图 1，若点 D 为直线 BC 上 $(-1，-3)$ 除外一动点，过点 D 作 x 轴的垂线交 $y=-3$ 于点 E，点 F 在直线 BC 上，距离 D 点为 $\sqrt{2}$ 个单位，D 点横坐标为 t，$\triangle DEF$ 的面积为 S，求 S 与 t 函数关系式。

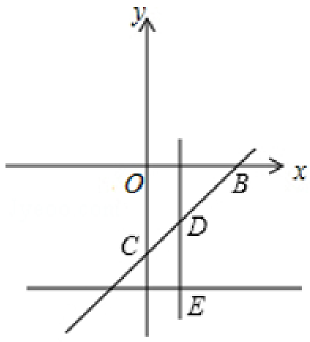


图1

【解析】（1）∵$y=k(x-2)$，∴$x=2$ 时，$y=0$，∴定点 $B(2，0)$.

（2）把 $(-1，-3)$ 代入 $y=kx-2k$，得到 $k=1$，∴直线 BC 的解析式为 $y=x-2$，

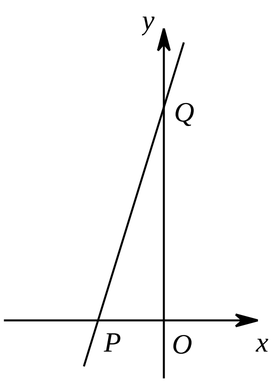
∵$OB=OC=2$，∴$\angle OBC=45°$，∵$DE\perp x$ 轴，∴$\angle CDE=45°$，

∵$D(t，t-2)$，∴$DE=|t-2+3|=|t+1|$，

当 $t<-1$ 时，$S=\frac{1}{2}\times DF\times DE\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(-t-1)=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$，

当 $t>-1$ 时，$S=\frac{1}{2}\cdot DF\cdot DE\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

5.已知直线 $a:y=(x+1)k+1$ 与 x 轴交于点 P、与 y 轴交于点 Q



（1）直线 a 经过定点 A，则点 A 的坐标为：_______（直接写出结果）

（2）直线 b：$y=(k-1)x+k$ 与 y 轴交于点 M，与直线 a 交于点 B，求证：无论 k 取何值，$\triangle BQM$ 的面积为定值。

【解析】（1）$y=(x+1)k+1$ 中，当 $x=-1$ 时，$y=1$，∴直线 a 经过定点 $A(-1,1)$，

（2）由 $\begin{cases} y=(x+1)k+1 \\ y=(k-1)x+k \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$，即 $B(-1,1)$，

将 $x=0$ 代入 $y=(k-1)x+k$，可得 $y=k$，即 $M(0,k)$.

将 $x=0$ 代入 $y=(x+1)k+1$，可得 $y=k+1$，即 $Q(0,k+1)$，

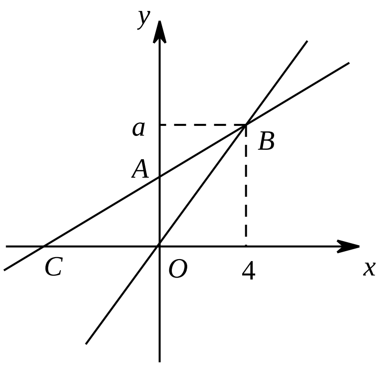
∵$S_{\triangle BQM}=\frac{1}{2}QM\bullet|x_B|=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，∴无论 k 取何值，$\triangle BQM$ 的面积为定值；

6.已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象交 y 轴于点 $A(0,1)$，交 x 轴于点 C，且与正比例函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象相交于点 $B(4,a)$。

（1）求 a、k、b 的值；

（2）求$\triangle AOC$ 的面积；

（3）在函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的直线上是否存在一点 P，使得 $S_{\triangle PAO}=2S_{\triangle AOC}$？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



【解析】（1）把 $(4,a)$ 代入 $y=\frac{1}{2}x$ 得 $a=2$，把 $(0,1)$、$(4,2)$ 代入 $y=kx+b$ 得 $\begin{cases} b=1 \\ 4k+b=2 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k=\frac{1}{4} \\ b=1 \end{cases}$；

（2）由（1）可知一次函数 $y=\frac{1}{4}x+1$，∴$C(-4,0)$，∴$OC=4$，

∴$\triangle AOC$ 的面积$=\frac{1}{2}OC\bullet OA=\frac{1}{2}\times4\times1=2$；

（3）存在；设 $P(m,\frac{1}{2}m)$，∴$S_{\triangle PAO}=\frac{1}{2}OA\bullet|m|=\frac{1}{2}\times1\bullet|m|=\frac{1}{2}|m|$，

∵$S_{\triangle PAO}=2S_{\triangle AOC}$，∴$\frac{1}{2}|m|=2\times2=4$，解得：$|m|=8$，∴$P(8,4)$ 或 $(-8,-4)$.

第四讲、一次函数的动点问题

模块一、一次函数与将军饮马问题

知识集锦

1．点关于一般直线的对称点的求法

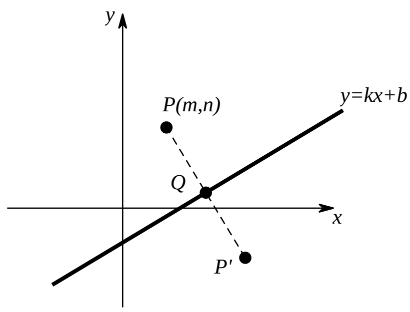
求点. . 关于直线 $y=kx+b$ 的对称点 P'

第一步：由已知直线 $y=kx+b$ 的斜率 k 求出直线 PP' 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$

第二步：由点 $P(m,\ n)$ 与直线 PP' 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$ 求出直线 PP' 的解析式

第三步：求出直线 PP' 与直线 $y=kx+b$ 的交点 Q 的坐标

第四步：由 P 与 Q 的坐标利用中点坐标公式求出 P' 坐标（Q 为 PP' 中点）



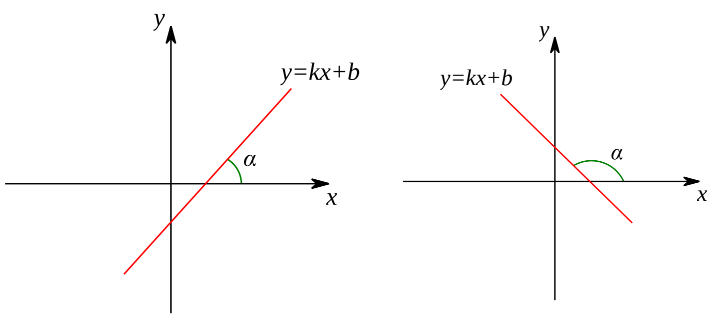
2．一次函数特殊斜率与特殊角度的关系

如图，一次函数 $y=kx+b$ 与 x 正半轴夹角为 α，斜率 k 与夹角 α 有唯一的对应关系：

$$\alpha=30°\Leftrightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad \alpha=150°\Leftrightarrow k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

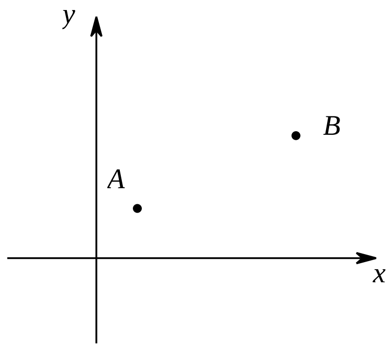
$$\alpha=45°\Leftrightarrow k=1\qquad \alpha=135°\Leftrightarrow k=-1$$

$$\alpha=60°\Leftrightarrow k=\sqrt{3}\qquad \alpha=120°\Leftrightarrow k=-\sqrt{3}$$



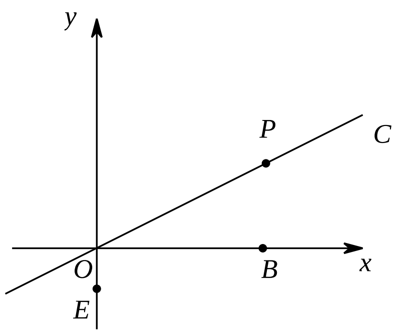
【例1】

已知点 A（1，2）、B（5，6），在 x 轴上找一点 P，使（1）$AP+BP$ 最小；（2）$|AP-BP|$ 最小；（3）$|AP-BP|$ 最大。



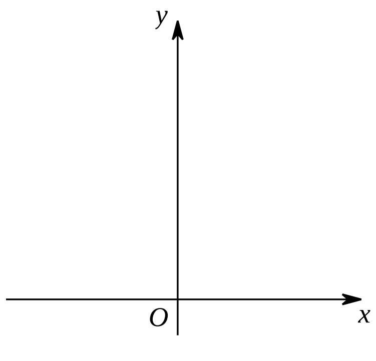
【例2】

如图所示，点 B 的坐标为（2，0），$\angle COB=30°$，若点 P 是 OC 上一动点，点 $E\left(0,-\sqrt{3}\right)$，求 $PE+PB$ 的最小值。



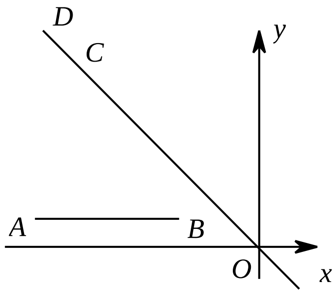
【例3】

在平面直角坐标系内．已知 $OABC$ 是矩形，点 A、C 分别位于 x 轴、y 轴的正半轴上，已知 B（2，4），D 在线段 AB 上，且 $3AD=BD$，在 y 轴上存在 E、F 两点，且 $EF=1$，连接 B、D、E、F，当组成的四边形周长最小时，求此时 E 点坐标。



【例4】

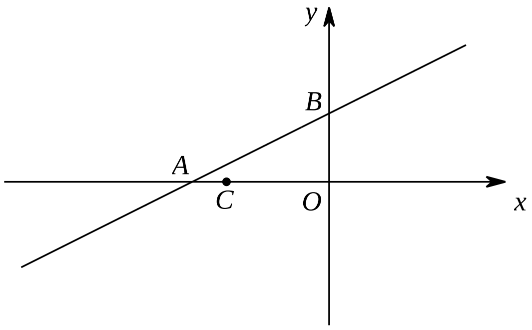
已知线段 AB，且 A（-8，1）、B（-3，1），另有一线段 CD 在直线 $y=-x$ 上，且 $CD=\sqrt{2}$，确定 D 点位置，使 A、B、C、D 构成的四边形周长最短，并求 D 点坐标及这个最小值。



模块二、一次函数与全等综合

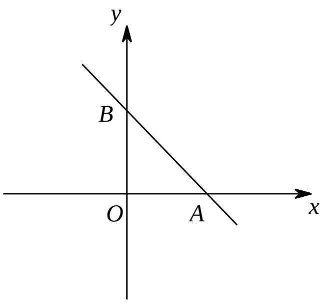
【例5】

如图，直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 与x轴、y轴分别交于A，B两点，点C的坐标为（-3，0），P（x，y）是直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 上的一个动点（点P不与点A重合）。过P作AB的垂线分别交x轴、y轴于E，F两点，是否存在这样的点P，使△EOF≌△BOA？若存在，求出点P的坐标；若不存在，请说明理由。



【例6】

如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=-x+8$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，点 P（x，y）是直线 AB 上一动点（点 P 不与点 A 重合），O 是坐标原点，过点 P 作 AB 的垂线分别交 x 轴、y 轴于点 E，F，是否存在这样的点 P，使△EOF≌△BOA？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



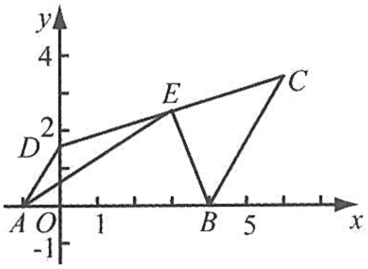
【例7】

如图所示，在平面直角坐标系中，点 A、B、D 的坐标分别为 $(-1,0)$、$(4,0)$、$(0,\sqrt{3})$，$AD//BC$，点 E 在 CD 上，且满足 AE、BE 分别平分 $\angle DAB$、$\angle CBA$。

（1）求直线 BC 的解析式；

（2）请你判断下列哪个结论成立，并证明你的结论；①$CE=DE$；②$AB=AD+BC$；

（3）已知 $\angle DAB=60^{\circ}$，直接写出线段 BC 的长。



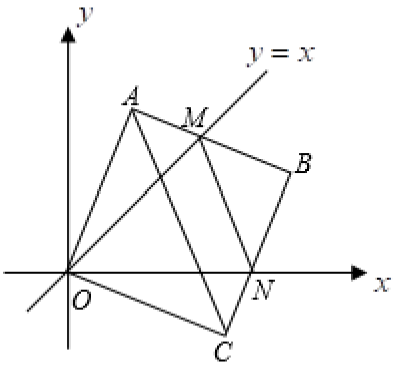
【例8】

平面直角坐标中，边长为 2 的正方形 $OABC$ 的两顶点 A、C 分别在 y 轴、x 轴的正半轴上，点 O 在原点.现将正方形 $OABC$ 绕 O 点顺时针旋转，当 A 点第一次落在直线 $y=x$ 上时停止旋转，旋转过程中，AB 边交直线 $y=x$ 于点 M，BC 边交 x 轴于点 N（如图）。

（1）求边 OA 在旋转过程中所扫过的面积；

（2）旋转过程中，当 MN 和 AC 平行时，求正方形 $OABC$ 旋转的度数；

（3）设△MBN 的周长为 p，在旋转正方形 $OABC$ 的过程中，p 值是否有变化？请证明你的结论。



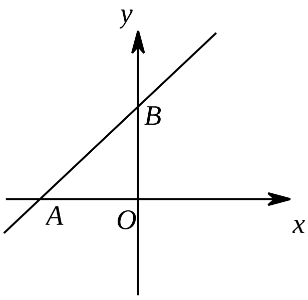
巅峰挑战

已知：直线 $y=mx+10m$ 与 x 轴负半轴、y 轴正半轴分别交于 A、B 两点。

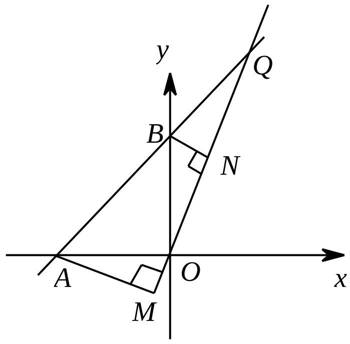
（1）如图①，当 $OA=OB$，试确定该直线的解析式；

（2）在（1）的条件下，如图②所示，设 Q 为 AB 延长线上一点，作直线 OQ，过 A、B 两点分别作 $AM\perp OQ$ 于 M，$BN\perp OQ$ 于 N。若 $AM=8$，$BN=6$，求 MN 的长；

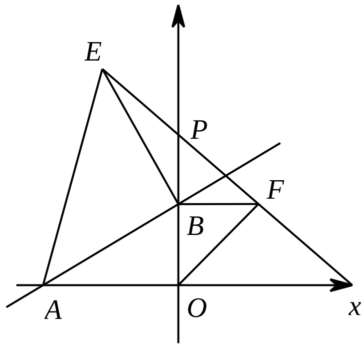
（3）如图③所示，当点 B 在 y 轴正半轴上运动时，m 的取值也会随之发生变化，分别以 OB、AB 为直角边，点 B 为直角顶点在第一、二象限内作等腰直角△OBF 和等腰直角△ABE，连接 EF 交 y 轴于 P 点，试猜想 PB 的长是否为定值，若是，请求出这个值；若不是，请说明理由。



图①



图②

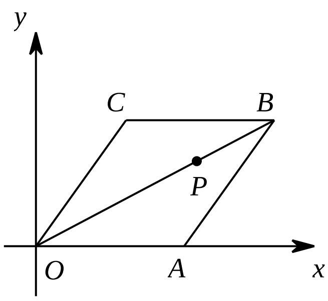


图③

笔记整理

第四讲课后练习

1．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，菱形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴上，顶点 B 的坐标为（8，4）点 P 的对角线 OB 上一个动点，点 D 的坐标为（0，－2），当 DP 与 AP 之和最小时，点 P 的坐标为_______。



【解析】连接 CD，如图，

∵点 A 的对称点是点 C，∴$CP=AP$，∴CD 即为 $DP+AP$ 最短，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，顶点 B（8，4），∴$OA^2=AB^2=(8-AB)^2+4^2$，

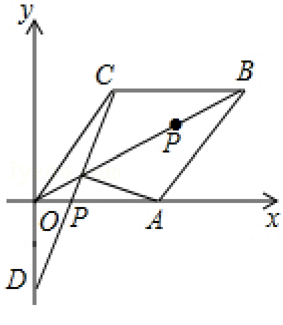
∴$AB=OA=BC=OC=5$，∴点 C 的坐标为（3，4），

∴可得直线 OB 的解析式为：$y=\frac{1}{2}x$，∵点 D 的坐标为（0，－2），

∴可得直线 CD 的解析式为：$y=2x-2$，∵点 P 是直线 OC 和直线 ED 的交点，

∴点 P 的坐标为方程组 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ y=2x-2 \end{cases}$ 的解，解方程组得：$\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$，

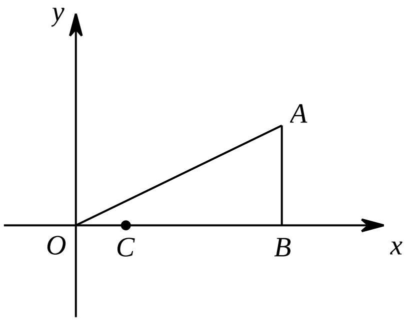
所以点 P 的坐标为（$\frac{4}{3}$，$\frac{2}{3}$）



2．如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABO$ 为直角三角形，$\angle ABO=90°$，$\angle AOB=30°$，$AB=\sqrt{3}$。

（1）则点 A 的坐标为_______。（直接写答案，不需证明）

（2）若 C 点坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 时，P 为 OA 上一动点，求 $PC+PB$ 的最小值。



【解析】（1）在平面直角坐标系中，$\triangle ABO$ 为直角三角形，$\angle ABO=90°$，$\angle AOB=30°$，$AB=\sqrt{3}$．

$\therefore A$（3，$\sqrt{3}$），

（2）如图，过点 C 作 C 关于 OA 的对称点 C'，连接 BC' 与 OA 相交，

则 BC' 与 OA 的交点即为所求的点 P，$PB+PC$ 的最小值$=BC'$，

过点 C' 作 $C'D\perp OB$ 于 D，

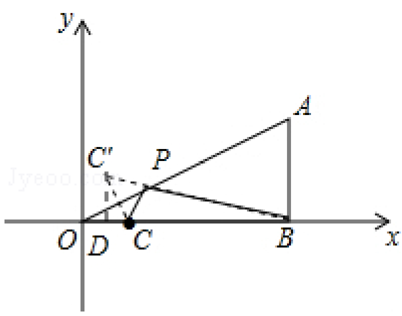
$\because$点 C 的坐标为（$\frac{1}{2}$，0），且$\angle AOB=30°$，$\therefore OC=\frac{1}{2}$，$CC'=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

$\angle OCC'=90°-30°=60°$，$\therefore CD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$C'D=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\because$顶点 A 的坐标为（3，$\sqrt{3}$），点 C 的坐标为（$\frac{1}{2}$，0），$\angle ABO=90°$，$\therefore BC=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，

$\therefore BD=\frac{5}{2}+\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$，在 $Rt\triangle AC'D$ 中，由勾股定理得，$BC'=\sqrt{(\frac{11}{4})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2}=\frac{\sqrt{31}}{2}$．

故 $PC+PB$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{31}}{2}$．

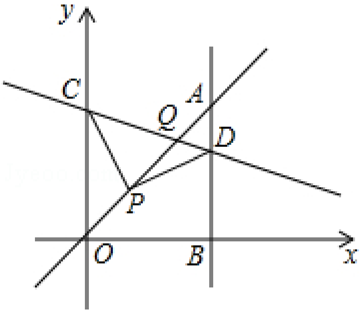


3.如图，平面直角坐标系中，已知直线 $y=x$ 上一点 P（2，m），C（0，n）为 y 轴上一点，以 P 为直角顶点作等腰 $Rt\triangle PCD$，过点 D 作直线 $AB\perp x$ 轴，垂足为 B，直线 AB 与直线 $y=x$ 交于点 A。

（1）求 m 的值，并求出直线 PC 的函数表达式（用含 n 的式子表示）；

（2）判断线段 OB 和 OC 的数量关系，并证明你的结论；

（3）当$\triangle OPC\cong\triangle ADP$ 时，求点 A 的坐标。

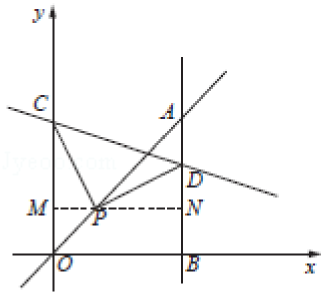


【解析】（1）将点 P（2，m）代入 $y=x$，得 $m=2$，设直线 PC 的函数解析式为：$y=kx+b$，则

$\begin{cases}2=2k+b\\ n=b\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=1-\dfrac{1}{2}n\\ b=n\end{cases}$，∴直线 PC 的解析式为 $y=(1-\dfrac{1}{2}n)x+n$；

（2）线段 OB 和 OC 的数量关系为：$OB=OC$.

理由如下：如图，过点 P 作 $MN\perp OC$ 交 OC 于 M，交 AB 于 N，



∵$\angle CMP=\angle DNP=\angle CPD=90°$，

∴$\angle MCP+\angle CPM=\angle MPC+\angle DPN=90°$，∴$\angle MCP=\angle DPN$，

∵$m=2$，∴P（2，2），∴$OM=BN=2$，$PM=2$，

∵等腰 $Rt\triangle CDP$ 中，$PC=PD$，∴$\triangle MCP\cong\triangle NPD$，

∴$DN=PM$，$PN=CM$，

又∵点 P 在直线 $y=x$ 上，∴$OM=PM$，∴$OM+CM=PM+PN$，∴$OC=MN$，

又∵$MN=OB$，∴$OB=OC$；

（3）∵C（0，n），$OB=OC$，∴B（n，0），A（n，n），∵$DN=PM=OM=2$，

∴$BD=4$，D（n，4），∴$AD=|n-4|$，

当$\triangle OPC\cong\triangle ADP$ 时，$|AD|=|OP|=2\sqrt{2}$，

∴$|n-4|=2\sqrt{2}$，

∴$n=4+2\sqrt{2}$ 或 $4-2\sqrt{2}$，

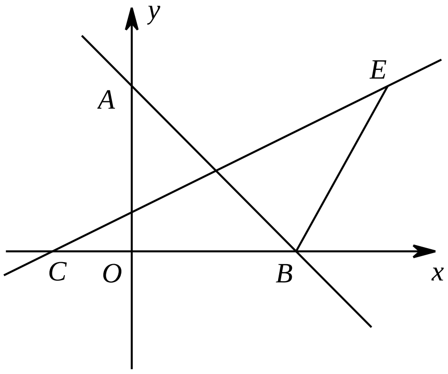
∴A（$4+2\sqrt{2}$，$4+2\sqrt{2}$）或（$4-2\sqrt{2}$，$4-2\sqrt{2}$）.

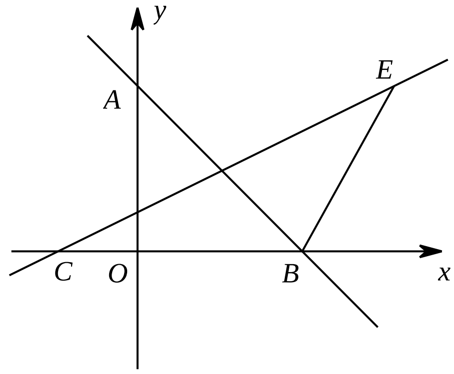
3.如图，一次函数 $y=-x+4$ 的图象与 y 轴交于点 A，与 x 轴交于点 B，过 AB 中点 D 的直线 CD 交 x 轴于点 C，且经过第一象限的点 E（6，4）。

（1）求 A，B 两点的坐标及直线 CD 的函数表达式;

（2）连接 BE，求△DBE 的面积;

（3）连接 DO，在坐标平面内找一点 F，使得以点 C，O，F 为顶点的三角形与△COD 全等，请直接写出点 F 的坐标。





备用图

【解答】（1）一次函数 $y=-x+4$，令 $x=0$，则 $y=4$；令 $y=0$，则 $x=4$，

∴A（0，4），B（4，0），∵D 是 AB 的中点，∴D（2，2），

设直线 CD 的函数表达式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}4=6k+b\\2=2k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{2}\\b=1\end{cases}$，

∴直线 CD 的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x+1$；

（2）$y=\frac{1}{2}x+1$，令 $y=0$，则 $x=-2$，∴C（-2，0），∴BC=2=4=6，

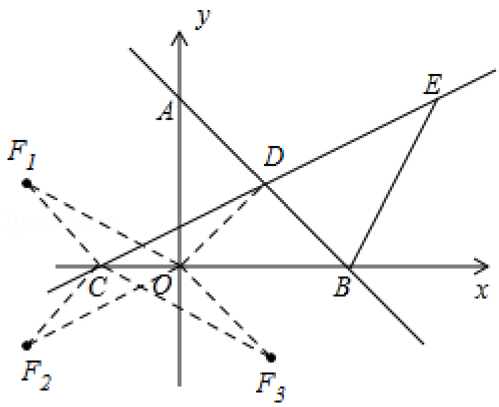
∴△DBE 的面积=△BCE 的面积－△BCD 的面积=$\frac{1}{2}\times6\times$（4－2）=6；

（3）如图所示，当点 F 在第一象限时，点 F 与点 D 重合，即点 F 的坐标为（2，2）；

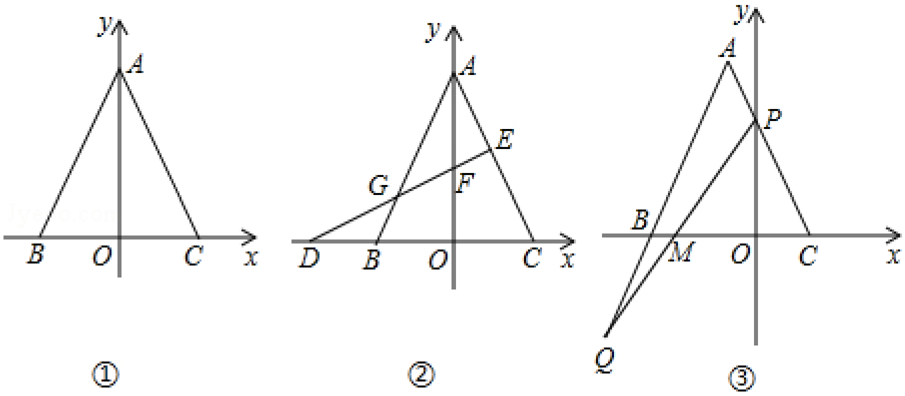
当点 F 在第二象限时，点 F 的坐标为（－4，2）；

当点 F 在第三象限时，点 F 的坐标为（－4，－2）；

当点 F 在第四象限时，点 F 的坐标为（2，－2）.



4. 如图①所示，直线 l_1：$y=3x+3$ 与 x 轴交于 B 点，与直线 l_2 交于 y 轴上一点 A，且 l_2 与 x 轴的交点为 C（1，0）。



（1）求证：$\angle ABC=\angle ACB$；

（2）如图②所示，过 x 轴上一点 D（－3，0）作 $DE\perp AC$ 于 E，DE 交 y 轴于 F 点，交 AB 于 G 点，求 G 点的坐标；

（3）如图③所示，将△ABC 沿 x 轴向左平移，AC 边与 y 轴交于一点 P（P 不同于 A、C 两点），过 P 点作一直线与 AB 的延长线交于 Q 点，与 x 轴交于 M 点，且 $CP=BQ$，在△ABC 平移的过程中，线段 OM 的长度是否发生变化？若不变，请求出它的长度；若变化，确定其变化范围。

【解答】（1）对于 $y=3x+3$，令 $y=0$，得 $3x+3=0$，$x=-1$，∴B（－1，0）.

∵C（1，0），∴$OB=OC$，∴AO 垂直平分 BC，∴$AB=AC$，∴$\angle ABC=\angle ACB$；

（2）∵$AO\perp BC$，$DE\perp AC$，∴$\angle 1+\angle C=\angle 2+\angle C=90°$，∴$\angle 1=\angle 2$.

∵$AB=AC$，∴AO 平分 $\angle BAC$，∴$\angle 2=\angle 3$，∴$\angle 1=\angle 3$.

对于 $y=3x+3$，当 $x=0$ 时，$y=3$，∴A（0，3），又∵D（－3，0），

∴$DO=AO$．∵$\angle AOB=\angle DOF=90°$，∴△$DOF$≌△$AOB$（$ASA$），∴$OF=OB$，∴$F$（0，1）.

设直线 DE 的解析式为 $y=kx+b$，∴$\begin{cases}-3k+b=0\\ b=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=\dfrac{1}{3}\\ b=1\end{cases}$，∴$y=\dfrac{1}{3}x+1$，

联立$\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}x+1\\ y=3x+3\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-\dfrac{3}{4}\\ y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$，所以，点 G（$-\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{3}{4}$）；

（3）OM 的长度不会发生变化，过 P 点作 $PN \parallel AB$ 交 BC 于 N 点，

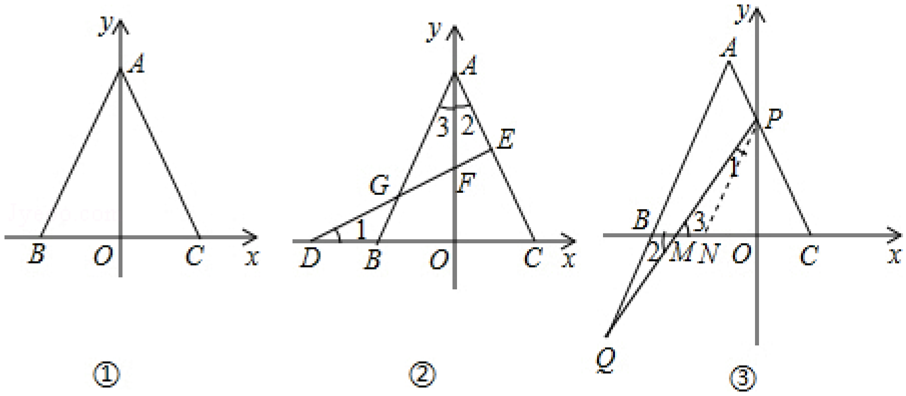
则 $\angle 1=\angle Q$，$\angle ABC=\angle PNC$，$\because \angle ABC=\angle ACB$，$\therefore \angle PNC=\angle PCB$，

$\therefore PN=PC$，$\because CP=BQ$，$\therefore PN=BQ$，$\because \angle 2=\angle 3$，$\therefore \triangle QBM \cong \triangle PNM$（$AAS$），

$\therefore MN=BM$．$\because PC=PN$，$PO \perp CN$，$\therefore ON=OC$，

$\because BM+MN+ON+OC=BC$，

$\therefore OM=MN+ON=\dfrac{1}{2}BC=1$．



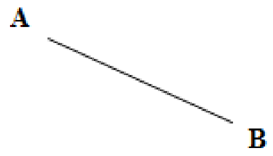
第五讲、一次函数的存在性问题（一）

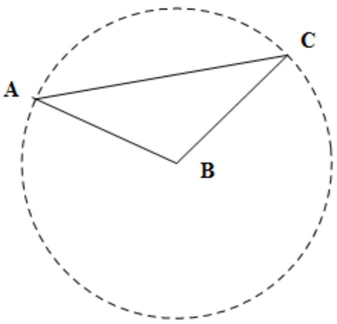
模块一、等腰三角形存在性问题

知识集锦

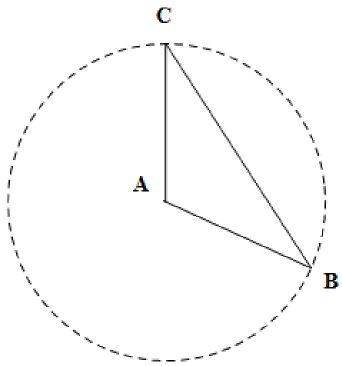
等腰三角形存在性问题（两圆一线）：

若以线段 AB 为一边的等腰直角三角形 ABC，请在下列图中画出来 C 点的轨迹：

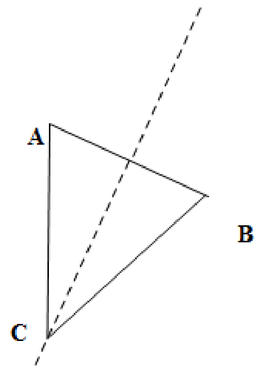




AB=BC时

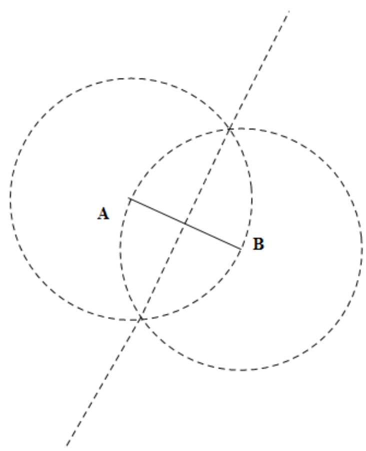


AB=AC时



AC=BC时

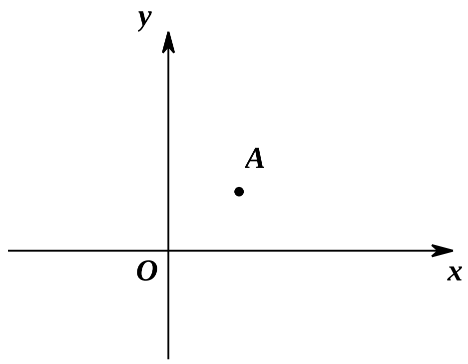
总结：分类讨论等腰三角形存在性问题时，以顶点作为分类方法，动点轨迹是两个圆和一条垂直平分线（两圆一线）



求解方法：（1）代数法（2）几何法

【例1】

1．点 A 的坐标是（2，2），若点 P 在 x 轴上，且△APO 是等腰三角形，则点 P 的坐标为________。



2．已知直线 $y=kx+b$，与 x，y 轴分别交于 B（4，0），C（0，12）两点

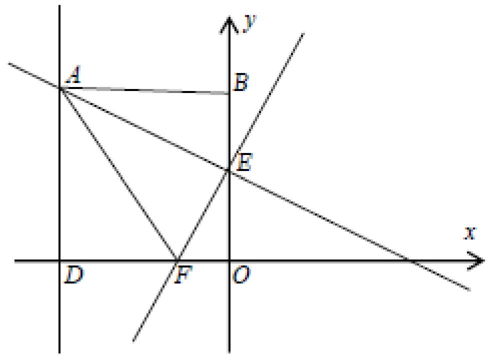
1）求 k，b 的值

2）若 P（x，y）是线段 BC 上的动点，O 为坐标原点，是否存在这样的点 P，使∆POB 为等腰三角形？这样的 P 有几个？写出当 OB 为底边时 P 点坐标。

3．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABOD$ 的边 OD、BO 在坐标轴上，正方形边长为 4，直线 $y=2x+2$ 与 y 轴交于点 E，与 x 轴交于点 F

（1）求直线 AE 的函数关系式和点 F 的坐标;

（2）在直线 AD 上是否存在点 P 使得△AFP 为等腰三角形，若存在，直接写出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由。



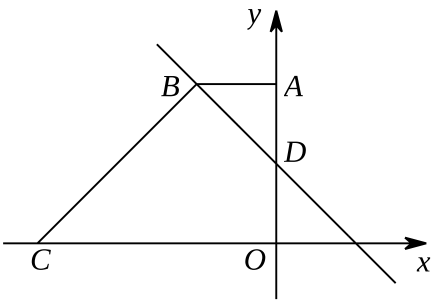
【例2】

1．如图，在平面直角坐标系中，直角梯形$OABC$的边OC，OA分别与x轴、y轴重合，$AB\parallel OC$，$\angle AOC=90^{\circ}$，$\angle BCO$=45°，$BC=6\sqrt{2}$，点C的坐标为（-9，0）。

（1）求点B的坐标；

（2）如图，直线BD交y轴于点D，且OD=3，求直线BD的解析式；

（3）若点P是（2）中直线BD上的一个动点，是否存在点P，使以O，D，P为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求出点P的坐标；若不存在，请说明理由。

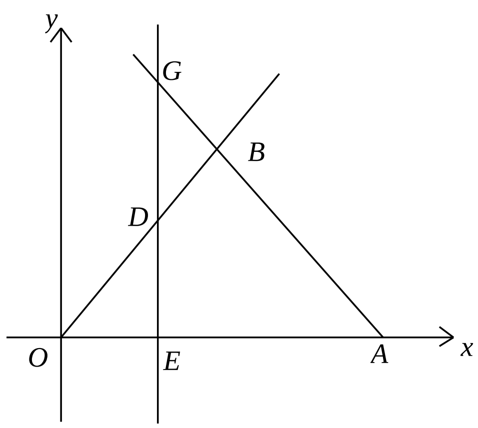


2．如图①，$\triangle AOB$ 的边 OA 在 x 轴上，点 A 坐标为(14,0)，点 B 在第一象限，$\angle BAO$=45°，$AB=8\sqrt{2}$，D 为射线 OB 上一点，过 D 作直线 l//y 轴交 OA 于 E，交射线 AB 于 G。

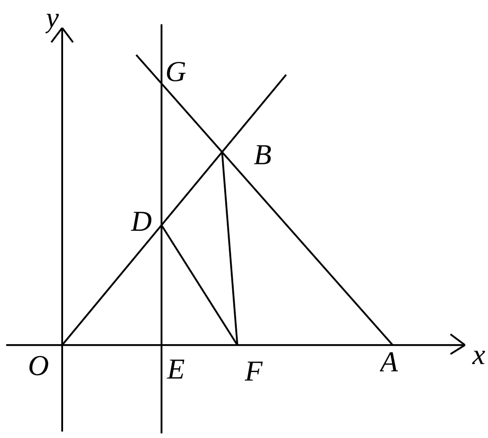
（1）求 B 点的坐标；

（2）当 D 为线段 OB 中点时，在直线 l 上找点 P，若$\triangle PBD$ 为等腰三角形，请直接写出 P 点坐标；

（3）如图②，F 为 AO 中点，当 $S_{\Delta BDF}=2S_{\Delta BDG}$ 时，求点 D 的坐标。



图①

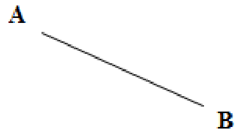


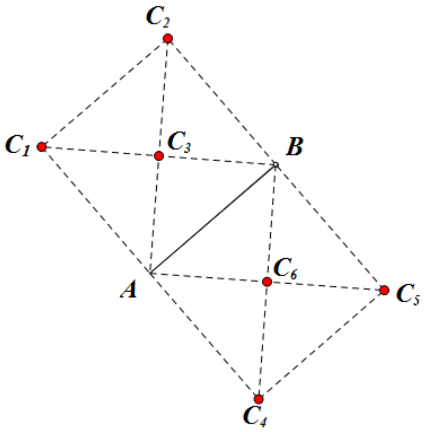
图②

模块二、等腰直角三角形的存在性问题

知识集锦

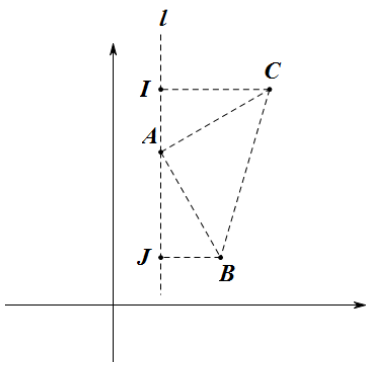
若以线段 AB 为一边的等腰直角三角形 ABC，请在下列图中画出来 C 点的具体**位置**：





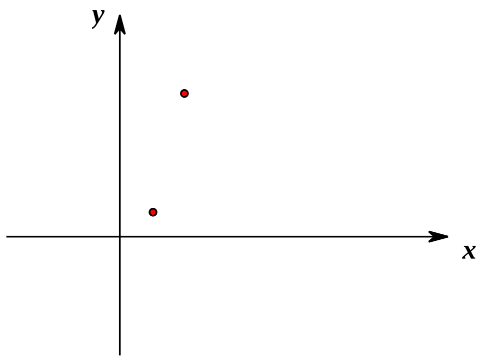
总结：分类讨论等腰直角三角形存在性问题时，以直角顶点作为分类方法，就可以确定另一动点的具体位置。

求解方法：利用 K 字型全等求解 C 点坐标

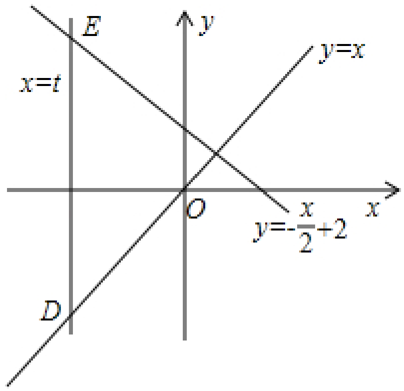


【例3】

1．已知 A（1，1），B（2，5）。求坐标系平面上所有的点 Q，使得 Q、A、B 构成等腰直角三角形。



2．如图，已知平行于 y 轴的动直线 a 的解析式为 $x=t$，直线 b 的解析式为 $y=x$，直线 c 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$，且动直线 a 分别交直线 b、c 于点 D、E（E 在 D 的上方），P 是 y 轴上一个动点，且满足△PDE 是等腰直角三角形，则点 P 的坐标是_______。



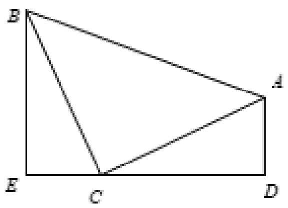
【例4】

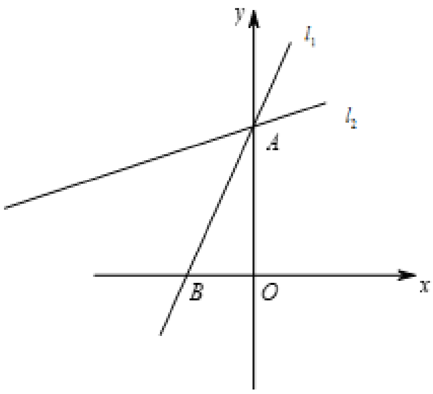
模型建立：如图 1，等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CB=CA$，直线 ED 经过点 C，过点 A 作 $AD\perp ED$ 于点 D，过点 B 作 $BE\perp ED$ 于点 E。

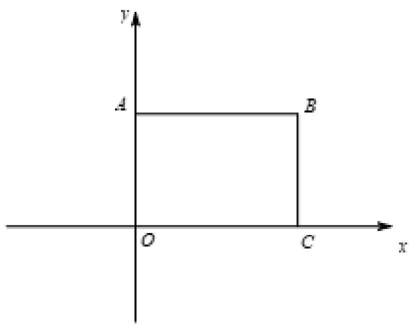
（1）求证：△BEC≌△CDA

（2）模型应用：已知直线 $l_1: y=\dfrac{4}{3}x+4$ 与 y 轴交于点 A，将直线 l_1 绕点 A 顺时针旋转 45°至 l_2，如图 2，求 l_2 的函数解析式

（3）模型应用：如图 3，矩形 $ABCO$，O 为坐标原点，B 的坐标为（8，6），A、C 分别在坐标轴上，P 是线段 BC 上的动点，已知点 D 在第一象限，且是直线 $y=2x-6$ 上的一点，若△APD 是不以 A 为直角顶点的等腰 Rt△，请直接写出点 D 的坐标。





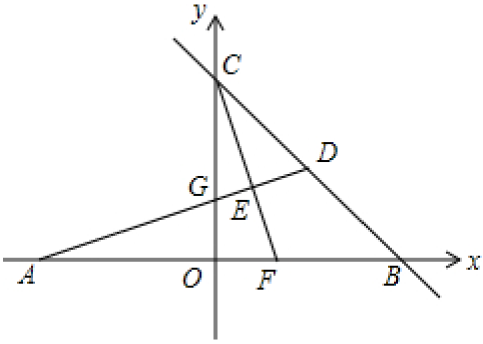


巅峰挑战

如图，在平面直角坐标系中，A，B，C 为坐标轴上的三点，且 $OA=OB=OC=4$，过点 A 的直线 AD 交 BC 于点 D，交 y 轴于点 G，$\triangle ABD$ 的面积为 8。过点 C 作 $CE\perp AD$，交 AB 于 F，垂足为 E。

（1）求 D 点的坐标；

（2）已知 $OF=OG$，在第一象限内是否存在点 P，使得$\triangle CFP$ 为等腰直角三角形？若存在，请求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由。



【解答】（1）如图 1，作 $DH\perp x$ 轴于 H，∵$OA=OB=OC=4$，∴$AB=8$，B（4，0），C（0，4），

设 BC 的解析式为 $y=kx+b$，把 B，C 两点代入得$\begin{cases}0=4k+b\\4=b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-1\\b=4\end{cases}$，

∴BC 的解析式为 $y=-x+4$，∵$\triangle ABD$ 的面积为 8，$AB=8$，∴$DH=2$，所以 D 点的纵坐标为 2，把 $y=2$ 代入 $y=-x+4$ 得：$x=2$，∴D（2，2）；

（2）存在，∵A（-4，0），D（2，2），∴直线 AD 的解析式为 $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$，

∴$OG=\frac{4}{3}$，∴$OF=OG=\frac{4}{3}$，

①如图 2，当$\angle CFP=90°$，$FP=FC$ 时，

过 P 作 $PH\perp x$ 轴于 H，∴$\angle PHF=\angle COF=90°$，

∴$\angle OCF+\angle OFC=\angle OFC+\angle PFH=90°$，∴$\angle OCF=\angle PFH$，

在$\triangle COF$ 与$\triangle PFH$ 中，$\begin{cases}\angle OCF=\angle PFH\\\angle COF=\angle PHF\\CF=PF\end{cases}$，∴$\triangle COF\cong\triangle PFH$，∴$PH=OF=\frac{4}{3}$，$FH=OC=4$，

∴$OH=\frac{16}{3}$，∴P_1（$\frac{16}{3}$，$\frac{4}{3}$）；

②如图 3，当$\angle PCF=90°$，$CP=FC$ 时，同理证得$\triangle PHC\cong\triangle CFO$，

∴$PH=OC=4$，$CH=OF=\frac{4}{3}$，∴$OH=\frac{16}{3}$，∴P_2（4，$\frac{16}{3}$）；

③如图 4，当$\angle CPF=90°$，$PC=PF$ 时，

过 P 作 $PM\perp x$ 轴于 M，$PN\perp y$ 轴于 N，∴四边形 $PNOM$ 是矩形，

∴$\angle NPM=90°$，∴$\angle CPN+\angle NPF=\angle NPF+\angle FPM=90°$，∴$\angle CPN=\angle FPM$，

在$\triangle CPN$ 与$\triangle FPM$ 中，$\begin{cases}\angle CPN=\angle FPM\\\angle PNC=\angle PMF=90°\\PC=PF\end{cases}$，∴$\triangle PNC\cong\triangle PMF$，

∴$PN=PM$，$CN=FM$，∴矩形 $PNOM$ 是正方形，

∴$ON=OM$，∴$4-CN=\frac{4}{3}+CN$，∴$CN=CM=\frac{4}{3}$，∴$PN=PM=\frac{8}{3}$，∴P_3（$\frac{8}{3}$，$\frac{8}{3}$），

综上所述：P 的坐标为（$\frac{16}{3}$，$\frac{4}{3}$），（4，$\frac{16}{3}$），（$\frac{8}{3}$，$\frac{8}{3}$）.

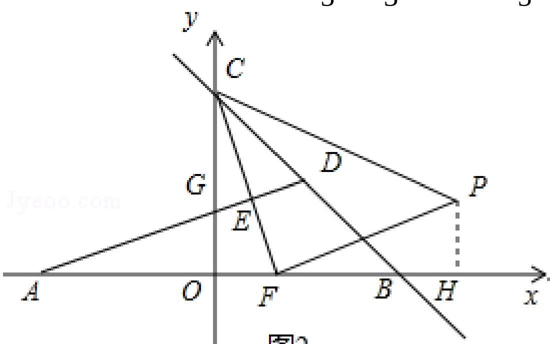


图2

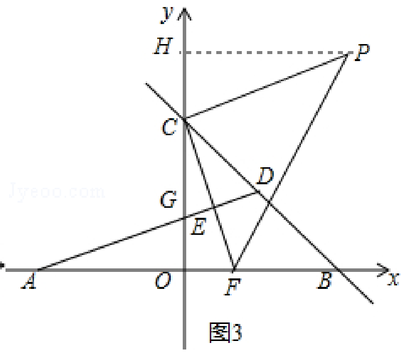


图3

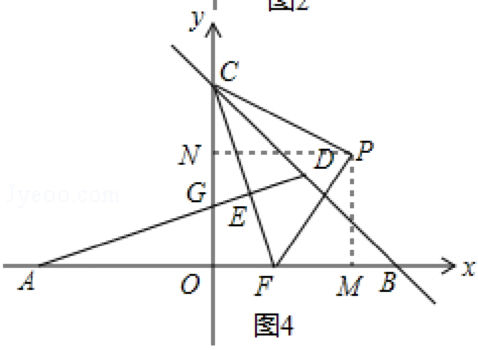


图4

笔记整理

第五讲课后练习

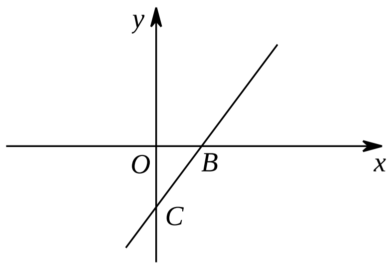
1.

如图，直线$y=kx-4$与 x 轴、y 轴分别交于B，C两点，且$\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{4}{3}$。

（1）求 B 点的坐标和 k 的值;

（2）若点 A（x，y）是第一象限内的直线 $y=kx-4$ 上的一个动点,则当点 A 运动到什么位置时，△AOB 的面积是 6?

（3）在（2）成立的情况下，x 轴上是否存在点 P，使△POA 是等腰三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



【解答】（1）∵直线 $y=kx-4$ 与 x 轴、y 轴分别交于 B、C 两点，∴点 C（0，－4），

∴OC=4，∵$\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{4}{3}$，∴$OB$=3，∴点 B（3，0），∴$3k-4=0$，解得：$k=\dfrac{4}{3}$；

（2）设 A 的纵坐标为 h，∵$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}OB\cdot h=6$，且 OB=3，∴h=4，

∵直线 BC 的解析式为：$y=\dfrac{4}{3}x-4$，∴当 y=4 时，$4=\dfrac{4}{3}x-4$，解得：x=6，

∴点 A（6，4），∴当点 A 运动到（6，4）时，△AOB 的面积是 6；

（3）存在.

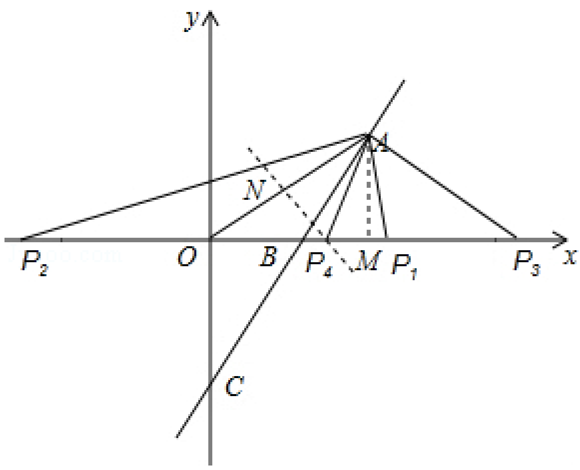
∵A（6，4），∴$OA=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$，

①若 $OP=OA=2\sqrt{13}$，则点 P_1（$2\sqrt{13}$，0），P_2（$-2\sqrt{13}$，0）；

②若 $OA=AP$，过点 A 作 $AM\perp x$ 轴于点 M，则 $PM=OM$=6，∴P_3（12，0）；

③若 $OP=AP$，过点 P 作 $PN\perp OA$ 于点 N，P_4（$\dfrac{13}{3}$，0）；

综上所述：点 P_1（$2\sqrt{13}$，0），P_2（$-2\sqrt{13}$，0），P_3（12，0），P_4（$\dfrac{13}{3}$，0）.



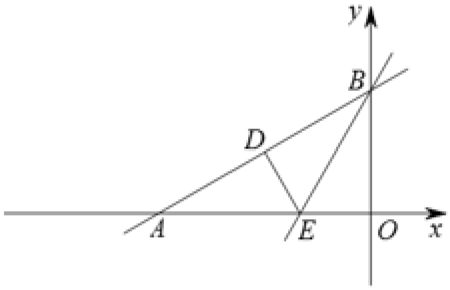
2.

如图，将 $Rt\Delta AOB$ 放入平面直角坐标系，点 O 与坐标原点重合，点 A 在 x 轴上，点 B 在 y 轴上，$OB=2\sqrt{3}$，$\angle BAO$=30°，将△AOB 沿直线 BE 折叠，使得边 OB 落在 AB 上，点 O 与点 D 重合

1）求直线 BE 的解析式；

2）求点 D 的坐标；

3）x 轴上是否存在点 P，使得 ΔPAB 是等腰三角形？若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，说明理由。



【解析】(1) ∵ $\angle BAO$=30° ∴ $\angle ABO$=60°，∵沿 BE 折叠 O．D 重合∴ $\angle EBO$=30°，$OE=\frac{1}{2}BE$，

设 $OE=x$，则（$2x$）$^2=x^2+(2\sqrt{3})^2$，∴x=2，即 BE=4，E（－2，0），

设 $Y=kx+b$ 代入得；$\begin{cases}0=-2k+b\\2\sqrt{3}=b\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\sqrt{3}\\b=2\sqrt{3}\end{cases}$，∴直线 BE 的解析式是：$y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$，

（2）过 D 作 $DG\perp OA$ 于 G，∵沿 BE 折叠 O、D 重合，

∴DE=2，∵ $\angle DAE$=30° ∴ $\angle DEA$=60°，$\angle ADE=\angle BOE$=90°，∴ $\angle EDG$=30°，

∴GE=1，$DG=\sqrt{3}$，∴OG=1+2=3，∴D 的坐标是：$D\left(-3,\sqrt{3}\right)$；

（3）P_1（－2，0）；P_2（6，0）；$P_3\left(4\sqrt{3}-6,0\right)$；$P_4\left(-6-4\sqrt{3},0\right)$；

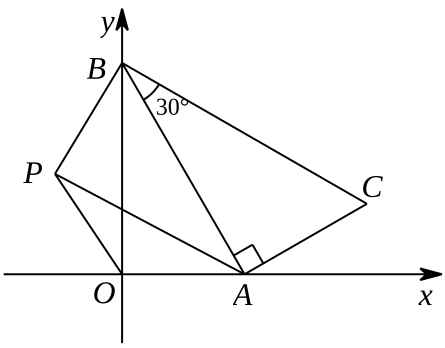
3.

如图，一次函数 y= $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 的函数图象与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，以线段 AB 为直角边在第一象限内作 $Rt\Delta ABC$，且使∠ABC=30°。

（1）求△ABC 的面积；

（2）如果在第二象限内有一点 $P\left(m,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，试用含 m 的代数式表示△APB 的面积，并求当△APB 与△ABC 面积相等时 m 的值；

（3）在坐标轴上是否存在一点 Q，使△QAB 是等腰三角形？若存在，请直接写出点 Q 所有可能的坐标；若不存在，请说明理由。



【解答】(1) ∵一次函数的解析式为 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 函数图象与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，

∴A（1，0），B（0，$\sqrt{3}$），∴AB=2，设 $AC=x$，则 $BC=2x$，由勾股定理得，$4x^2-x^2$=4，

解得 $x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

（2）过 P 作 $PD\perp x$ 轴，垂足为 D，

$S_{\triangle APB}=S_{梯形ODPB}+S_{\triangle AOB}-S_{\triangle APD}=\frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)m}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1-m)=-\frac{\sqrt{3}}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$-\frac{\sqrt{3}}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，解得 $m=-\frac{5}{6}$；

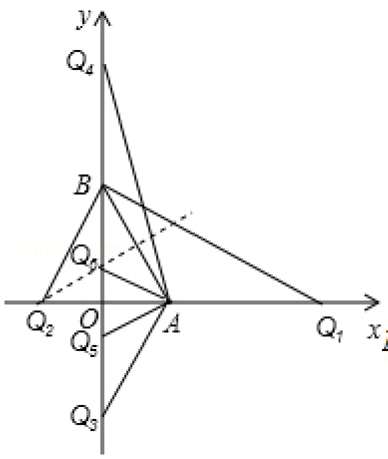
（3）∵$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2$，

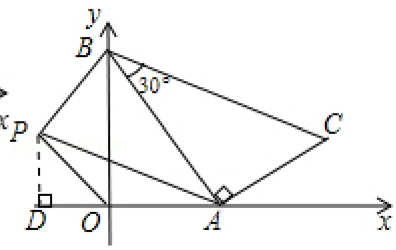
∴当 $AQ=AB$ 时，点 Q_1（3，0），Q_2（－1，0），Q_3（0，$-\sqrt{3}$）；

当 $AB=BQ$ 时，点 Q_4（0，$\sqrt{3}+2$），Q_5（0，$\sqrt{3}-2$），Q_2（－1，0）；

当 $AQ=BQ$ 时，点 Q_6（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$），Q_2（－1，0），

综上可得：（0，$\sqrt{3}-2$），（0，$\sqrt{3}+2$），（－1，0）（3，0），（0，$-\sqrt{3}$），（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$）



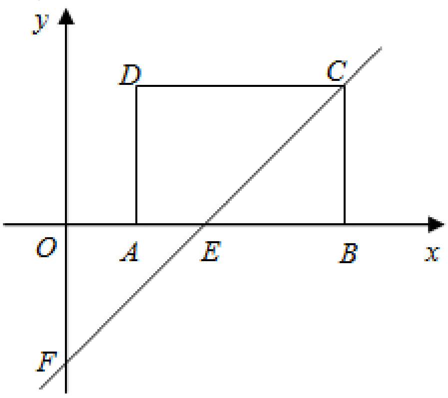


4.

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $ABCD$ 的 AB 边在 x 轴上，$AB=3$，$AD=2$，经过点 C 的直线 $y=x-2$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 E、F。

（1）求：①点 D 的坐标；②经过点 D，且与直线 FC 平行的直线的函数表达式；

（2）直线 $y=x-2$ 上是否存在点 P，使得△PDC 为等腰直角三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



【解答】（1）①设点 C 的坐标为（m，2），∵点 C 在直线 $y=x-2$ 上，∴$2=m-2$，∴$m=4$，

即点 C 的坐标为（4，2），∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$AB=CD=3$，$AD=BC=2$，

∴点 D 的坐标为（1，2）；

②设经过点 D 且与 FC 平行的直线函数表达式为 $y=x+b$，将 D（1，2）代入 $y=x+b$，得 $b=1$，

∴经过点 D 且与 FC 平行的直线函数表达式为 $y=x+1$；

（2）存在．∵△EBC 为等腰直角三角形，∴∠CEB=∠ECB=45°，

又∵DC∥AB，∴∠DCE=∠CEB=45°，

∴△PDC 只能是以 P、D 为直角顶点的等腰直角三角形，

如图，①当∠D=90°时，延长 DA 与直线 $y=x-2$ 交于点 P_1，

∵点 D 的坐标为（1，2），∴点 P_1 的横坐标为 1，把 $x=1$ 代入 $y=x-2$ 得，$y=-1$，

∴点 P_1（1，－1）；

②当∠DPC=90°时，作 DC 的垂直平分线与直线 $y=x-2$ 的交点即为点 P_2，

所以，点 P_2 的横坐标为 $\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$，

把 $x=\frac{5}{2}$ 代入 $y=x-2$ 得，$y=\frac{1}{2}$，

所以，点 P_2（$\frac{5}{2}$，$\frac{1}{2}$），

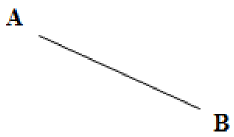
综上所述，符合条件的点 P 的坐标为（1，－1）或（$\frac{5}{2}$，$\frac{1}{2}$）；

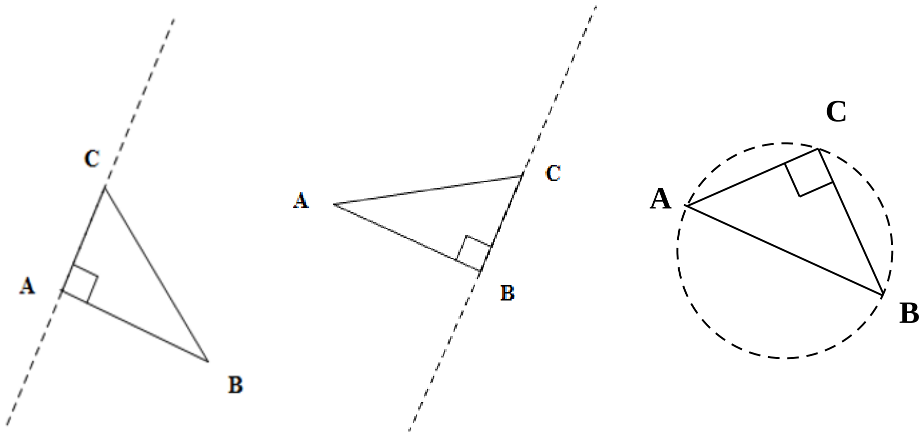
第六讲、一次函数的存在性问题（二）

知识集锦

直角三角形存在性问题（两线一圆）

若以线段 AB 为一边作直角三角形 ABC，请在下列图中画出 C 点的轨迹：

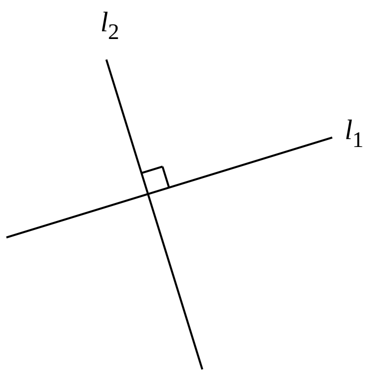




$\angle A=90°$ 时　　　　$\angle B=90°$ 时　　　　$\angle C=90°$ 时

总结：分类讨论直角三角形存在性问题时，以直角顶点作为分类方法，动点轨迹是两条直线和一个圆（**两线一圆**）

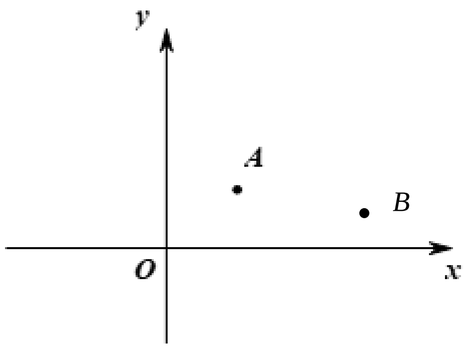
求解方法：在平面直角坐标系中相互垂直的两条直线 l_1：$y=k_1x+b_1$ 和 l_2：$y=k_2x+b_2$（$k_1\neq 0$ 且 $k_2\neq 0$）；则有 $k_1k_2=-1$

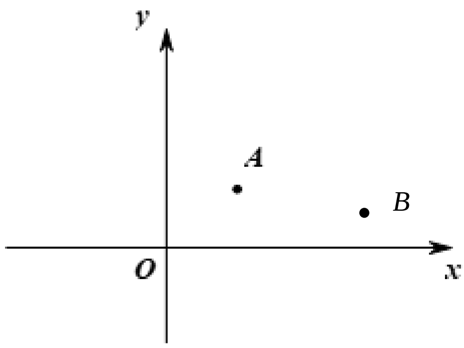


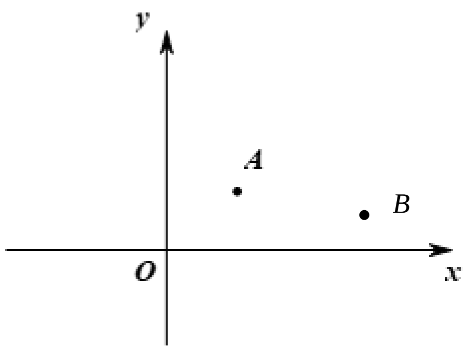
模块一、直角三角形存在性问题

【例1】

点 A 的坐标是（2，2），点 B 的坐标是（5，1），若点 P 在 x 轴上，且△ABP 是直角三角形，则点 P 的坐标为________。







【例2】

已知，如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上，OC 在 x 轴的正半轴上，$OA=2$，$OC=3$，过原点 O 作$\angle AOC$ 的平分线交 AB 于点 D，连接 DC，过点 D 作 $DE\perp DC$，交 OA 于点 E。

（1）求经过点 E、D 的直线解析式；

（2）将$\angle EDC$ 绕点 D 按顺时针方向旋转后，角的一边与 y 轴的正半轴交于点 F，另一边与线段 OC 交于点 G，使得 $EF=2GO$，请求出此时 OG 的长度；

（3）对于（2）中的点 G，在直线 ED 上是否存在点 P，使得点 P 与点 D、G 构成的$\triangle DPG$ 是直角三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

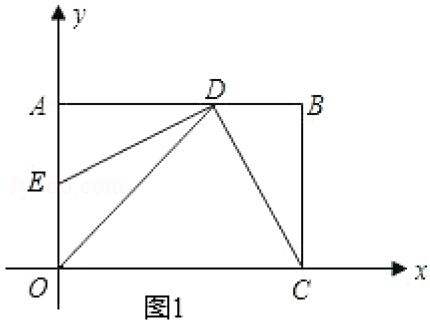
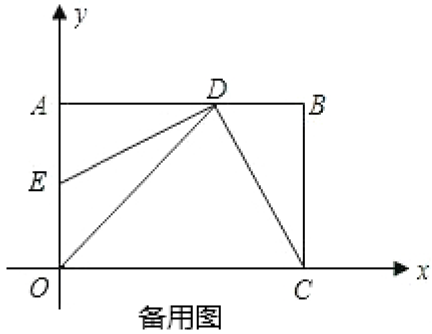


图1



备用图

【例3】

直线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 和 x 轴、y 轴的交点分别为 B、C，点 A 的坐标是$\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$，另一条直线经过点 A、C。

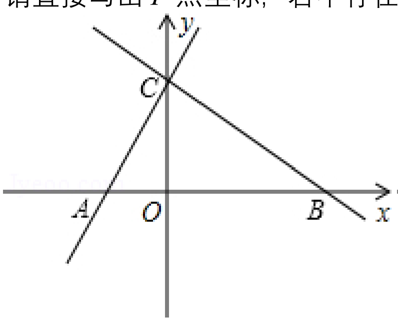
（1）求线段 AC 所对应的函数表达式；

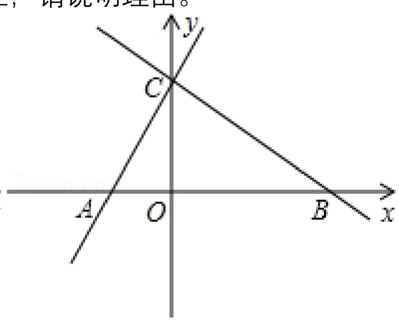
（2）动点 M 从 B 出发沿 BC 运动，速度为 1 秒一个单位长度．当点 M 运动到 C 点时停止运动，设 M 运动 t 秒时，$\triangle ABM$ 的面积为 S。

①求 S 与 t 的函数关系式；

②当 t 为何值时，$S=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，（注：$S_{\triangle ABC}$ 表示$\triangle ABC$ 的面积），求出对应的 t 值；

③当 $t=4$ 的时候，在坐标轴上是否存在点 P，使得$\triangle BMP$ 是以 BM 为直角边的直角三角形？若存在，请直接写出 P 点坐标，若不存在，请说明理由。





模块二、多动点等腰三角形存在性问题

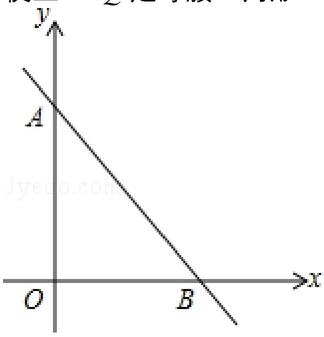
【例4】

如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 y 轴的正半轴交于点 A，与 x 轴交于点 B（2，0），三角形△ABO 的面积为 2．动点 P 从点 O 出发，以每秒 1 个单位长度的速度在射线 OB 上运动，动点 Q 从 B 出发，沿 x 轴的正半轴与点 P 同时以相同的速度运动，过 P 作 $PM\perp X$ 轴交直线 AB 于 M。

（1）求直线 AB 的解析式；

（2）当点 P 在线段 OB 上运动时，设△MPQ 的面积为 S，点 P 运动的时间为 t 秒，求 S 与 t 的函数关系式（直接写出自变量的取值范围）；

（3）过点 Q 作 $QN\perp X$ 轴交直线 AB 于 N，在运动过程中（P 不与 B 重合），是否存在某一时刻 t（秒），使△MNQ 是等腰三角形？若存在，求出时间 t 值。



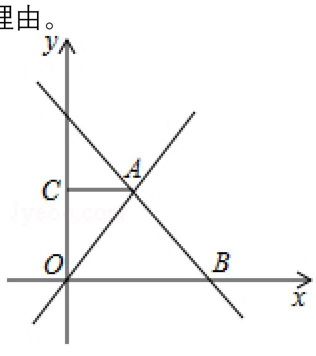
【例5】

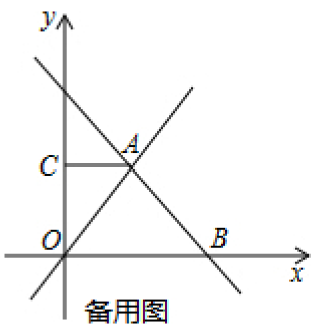
如图，已知一次函数 $y=-x+7$ 与正比例函数 $y=\frac{4}{3}x$ 的图象交于点 A，且与 x 轴交于点 B，过点 A 作 $AC\perp y$ 轴于点 C，动点 P 从点 O 出发，沿 $O\rightarrow C\rightarrow A$ 的路线以每秒 1 个单位的速度向点 A 运动；同时点 R 从点 B 出发，以相同的速度向点 O 运动，在运动过程中，过点 R 作直线 $l\perp x$ 轴，交线段 AB 或 AO 于点 Q．当点 P 到达点 A 时，点 P 和点 R 都停止运动．在运动过程中，设动点 P 的运动时间为 t 秒（$t>0$）。

（1）求点 A 与点 B 的坐标；

（2）若点 P 在线段 OC 上运动，当 t 为何值时，以 A、P、R 为顶点的三角形的面积为 8？

（3）若点 P 线段 CA 上运动，是否存在以 A、P、Q 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由。





备用图

巅峰挑战

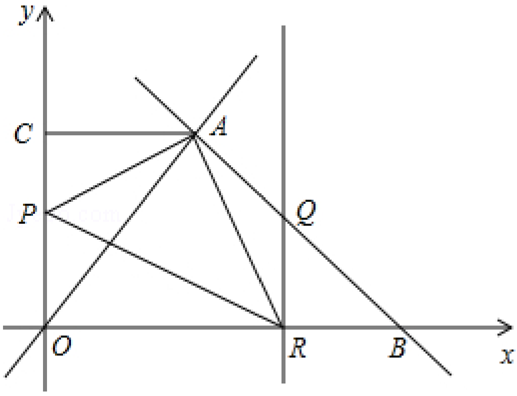
如图，已知直线 $y=-x+7$ 与直线 $y=\frac{4}{3}x$ 交于点 A，且与 x 轴交于点 B，过点 A 作 $AC\perp y$ 轴与点 C．点 P 从 O 点以每秒 1 个单位的速度沿折线 $O-C-A$ 运动到 A；点 R 从 B 点以相同的速度向 O 点运动，一个点到终点时，另一个点也随之停止运动。

（1）求点 A 和点 B 的坐标;

（2）过点 R 作直线 $l\,//\,y$ 轴，直线 l 交线段 BA 于点 Q，设动点 P 运动的时间为 t 秒。

①当 t 为何值时，以 A，P，O，R 为顶点的四边形的面积为 13?

②是否存在以 A、P、R 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，直接写出 t 的值；若不存在，请说明理由。



【解析】解：（1）∵直线 $y=-x+7$①与直线 $y=\frac{4}{3}x$②交于点 A，

∴联立①②解得，$x=3$，$y=4$，∴A（3，4），

令 $y=-x+7$ 中，$y=0$，得，$x=7$，∴B（7，0）;

（2）由运动知，$BR=t$，

∵过 R 的直线 $l\,//\,y$ 轴，且与线段 BA 相交，∴$0\leqslant t\leqslant 4$，∴$OR=7-t$，

∵$AC\perp y$ 轴，∴$OC=4$，∴点 P 必在线段 OC 上，

由运动知，$OP=t$，∴$CP=4-t$，

①$S_{四边形APOR}=S_{四边形ACOB}-S_{\triangle ACP}-S_{\triangle ABR}$

$$=\frac{1}{2}(AC+OB)\times OC-\frac{1}{2}AC\times CP-\frac{1}{2}BR\times OC$$

$$=\frac{1}{2}(3+7)\times 4-\frac{1}{2}\times 3\times(4-t)-\frac{1}{2}\times t\times 4$$

$$=20-6+\frac{3}{2}t-2t$$

$$=-\frac{1}{2}t+14$$

∵以 A，P，O，R 为顶点的四边形的面积为 13，

∴$-\frac{1}{2}t+14=13$，∴$t=2$；

②∴P（0，t），R（$7-t$，0），

∵A（3，4），

∴$PA^2=9+(t-4)^2$，$PR^2=(7-t)^2+t^2$，$RA^2=(7-t-3)^2+16=(t-4)^2+16$，

假设存在以 A、P、R 为顶点的三角形是等腰三角形，

∴①当 $PA=PR$ 时，即：$PA^2=PR^2$，

∴$9+(t-4)^2=(7-t)^2+t^2$，

∴$t^2-6t+24=0$，此方程无解，

②当 $PA=RA$ 时，即：$PA^2=RA^2$，

∴$9+(t-4)^2=(t-4)^2+16$，明显，此方程无解，

③当 $PR=RA$ 时，即：$PR^2=RA^2$，

∴$(7-t)^2+t^2=(t-4)^2+16$，

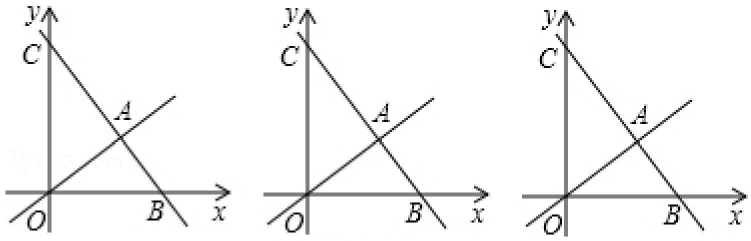
∴$t^2-6t+17=0$，此方程无解，

∴不存在以 A、P、R 为顶点的三角形是等腰三角形.

笔记整理

第六讲课后练习

1.
如图，在平面直角坐标系中，过点 B（6，0）的直线 AB 与直线 OA 相交于点 A（4，2），动点 M 在 y 轴上运动。
（1）求直线 AB 的函数关系式；
（2）当点 M 的坐标为_______时，$AM+BM$ 的长最小；
（3）在 y 轴的负半轴上是否存在点 M，使△ABM 是以 AB 为直角边的直角三角形？如果存在，求出点 M 的坐标；如果不存在，说明理由。



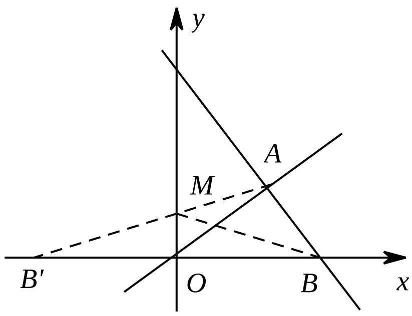
(备用图1)　(备用图2)

【解析】（1）设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

把 A（4，2），B（6，0）代入可得 $\begin{cases}6k+b=0\\4k+b=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-1\\b=6\end{cases}$，

∴直线 AB 的解析式为 $y=-x+6$.

（2）如图，作点 B 关于 y 轴的对称点 B'，连接 AB' 交 y 轴于 M，此时 $MB+MA$ 的值最小。



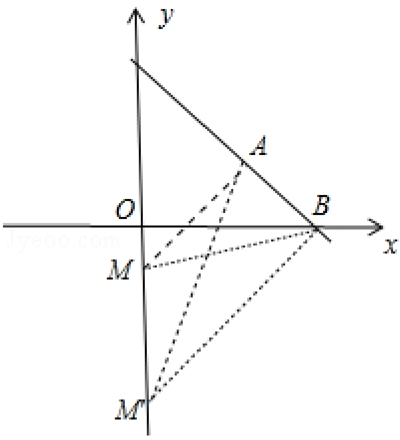
∵B'（－6，0），A（4，2），

设直线 AB' 的解析式为 $y=mx+n$，则有 $\begin{cases}4m+n=2\\-6m+n=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{5}\\n=\dfrac{6}{5}\end{cases}$，

∴直线 AB' 的解析式为 $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{6}{5}$，∴$M\left(0,\ \dfrac{6}{5}\right)$

$AM+BM$ 的最小值 $=AB'=\sqrt{10^2+2^2}=2\sqrt{26}$，故答案为 $\left(0,\ \dfrac{6}{5}\right)$.

（3）如图，



①过点 A 作 AB 的垂线 AM 交 y 轴与 M.

∵直线 AB 的解析式为 $y=-x+6$,

∴直线 AM 的解析式为 $y=x-2$，∴M（0，－2）.

②过点 B 作 $BM'\perp AB$ 交 y 轴与 M'，则直线 BM' 的解析式为 $y=x-6$,

∴M'（0，－6）,

综上所述，满足条件的点 M 的坐标为（0，－2）或（0，－6）.

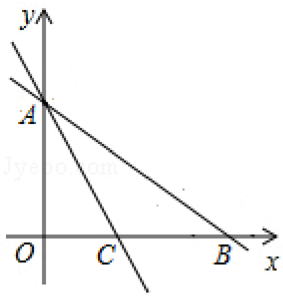
2.

如图：在平面直角坐标系中，直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于 B、A 两点，$OA=6$，$OB=8$，AC 平分∠BAO 交 x 轴于点 C。

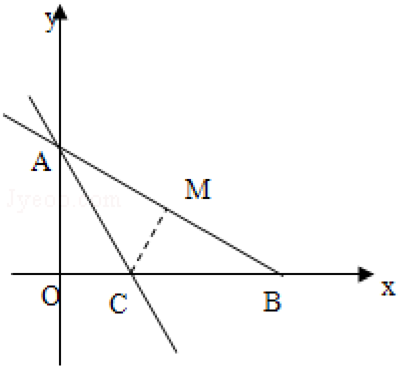
（1）求 A、B 两点的坐标;

（2）直线 AC 的解析式;

（3）直线 AC 上是否存在点 P，使 A、B、P 三点构成的三角形为直角三角形？若存在，请直接写出 P 点坐标；若不存在，请说明理由。



【解答】（1）过 C 点作 AB 的垂线交 AB 于点 M，如图,



∵AC 平分∠BAO，∴∠OAC=∠CAB,

在△OAC 和△MAC 中 $\begin{cases}\angle OAC=\angle CAB\\ \angle AOC=\angle AMC\\ AC=AC\end{cases}$

∴△OAC≌△MAC（AAS），∴$CM=CO$，$AM=AO$，

∵$BC^2=CM^2+MB^2$，∴$OC=3$，∴C（3，0），

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$（$k\neq0$，k、b 为常数），

代入 A（6，0）C（3，0）得$\begin{cases} b=6 \\ 3k+b=0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} k=-2 \\ b=6 \end{cases}$，

∴直线 AC 的解析式为 $y=-2x+6$；

（2）存在．

∵点 P 在直线 AC 上，∴可设 P（x，$-2x+6$），

∵A（0，6），B（8，0），

∴$PA^2=x^2+(-2x+6-6)^2=5x^2$，$PB^2=(x-8)^2+(-2x+6)^2=5x^2-40x+100$，且 $AB^2=100$，

∵∠BAC<90°，∴当△PAB 为直角三角形时，有∠APB=90°和∠PBA=90°，

①当∠APB=90°时，则有 $PA^2+PB^2=AB^2$，即 $5x^2+5x^2-40x+100=100$，解得 $x=0$（与 A 重合，舍去）或 $x=4$，此时 P 点坐标为（4，-2）；

②当∠PBA=90°时，则有 $PB^2+AB^2=PA^2$，即 $5x^2-40x+100+100=5x^2$，解得 $x=5$，此时 P 点坐标为（5，-4）；

∴P 点坐标为（4，-2）或（5，-4）．