# 讲义说明

由于时间仓促和编者水平有限，编写中难免出现错误或不当之处，希望家长及同学们能直言不讳地给我们提出宝贵的意见，以便今后修订升级．若有发现，非常期待家长和同学们将修改意见发送至顺为教育教研部邮箱(*jiaoyan@shunweijiaoyu.com*)！我们会定期评选出突出贡献者，并给予丰厚的奖励

# 第一讲、二次根式（一）

## 模块一、二次根式基本概念

### 知识集锦

**1．二次根式的概念**

形如$\sqrt{a}\left(a\geqslant 0\right)$的代数式叫做二次根式。

**2．$n$次根式的概念**

形如$\sqrt[n]{a}$的代数式叫做$n$次根式，其中若$n$为偶数，则必须满足$a\geqslant 0$。

**3. 最简二次根式**

满足以下两个条件的二次根式叫做最简二次根式：
①被开方数的因数是整数，因式是整式；
②被开方数中不含有能开方的因数或因式。

**4. 同类二次根式**

几个二次根式化成最简二次根式之后，如果被开方数相同，则这几个根式叫做同类二次根式。

【例1】

1．$x$取什么实数时，下列各式有意义

（1）$\sqrt{3-x^2}$　　（2）$\sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$

（3）$\sqrt{3x-5}+3\sqrt{5-x}$　　（4）$\dfrac{\sqrt{12-x}}{\sqrt{x-4}-2}$

2．设$b=\dfrac{\sqrt[3]{a-1}+\sqrt{3-a}}{\sqrt{2a-3}-1}$，求使$b$有意义的$a$的取值范围。

3.（嘉祥半期）式子$\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}-\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{ab}$中，字母$a$，$b$应满足的条件是________.

4．无论$x$取任何实数，代数式$\sqrt{x^2-6x+m}$都有意义，则$m$的取值范围是________.

1.

【答案】见解析

【解析】(1)

解：

$3-x^2\geq 0$

$x^2\leq 3$

$\therefore -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}$

（2）解：

$\left(2-x\right)\left(x-3\right)\geq 0$

$\therefore 2\leq x<3$

（3）解：

$$\begin{cases}3x-5\ge 0\\5-x\ge 0\end{cases}$$

$\frac{5}{3}\le x\le 5$

（4）解：

$$\begin{cases}12-x\ge 0\\x-4\ge 0\end{cases}$$

$4\le x\le 12$

2.

【答案】见解析

【解析】解：$b$ 有意义

$$\begin{cases}3-a\ge 0\\2a-3\ge 0\\\sqrt{2a-3}-1\ne 0\end{cases}$$

$\therefore \frac{3}{2}\le a\le 3$ 且 $a\ne 2$

3.

【答案】$a>0$，$b\ge 0$

4.

【答案】$m\ge 9$

【解析】$x^2-6x+m=\left(x-3\right)^2+m-9$

最小值$=m-9$

$\therefore m-9\ge 0\quad \therefore m\ge 9$

【例2】

1．下列各式中哪些是最简二次根式，哪些不是？为什么？

（1）$\sqrt{3}$　（2）$\sqrt{\frac{3ab}{2}}$　（3）$\sqrt{x^2+y^2}$　（4）$\sqrt{a-b}\ \left(a>b\right)$　（5）$\sqrt{5}$　（6）$\sqrt{8xy}$

2. 将下列二次根式化成最简二次根式：

①$\sqrt{18}=$________；　②$\sqrt{75}=$________；　③$\sqrt{48}=$________；　④$\sqrt{80}=$________；

⑤$\sqrt{240}=$________；　⑥$\sqrt{2000}=$________；　⑦$\sqrt{\frac{32}{9}}=$________；　⑧$\sqrt{\frac{27}{4}}=$________.

1.

【答案】(1) 是　(2) 不是　(3) 是　(4) 是　(5) 是　(6) 不是

2.

【答案】①$3\sqrt{2}$　②$5\sqrt{3}$　③$4\sqrt{3}$　④$4\sqrt{5}$　⑤$4\sqrt{15}$　⑥$20\sqrt{5}$　⑦$\frac{4\sqrt{2}}{3}$　⑧$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【例3】

1．下列根式中与$\sqrt{18}$是同类二次根式的是（　　）

*A*．$\sqrt{32}$　　　　*B*．$\sqrt{27}$　　　　*C*．$\sqrt{6}$　　　　*D*．$\sqrt{3}$

2．已知最简根式$a\sqrt{2a+b}$与$\sqrt[a-b]{7}$是同类二次根式，则$a=$_______，$b=$_______

3．（实外西区半期）实数①$\sqrt{12}$，②$\sqrt{18}$，③$\sqrt{48}$，④$\sqrt{75}$中，与$\sqrt{3}$是同类二次根式的有（　　）

*A*．1个　　*B*．2个　　*C*．3个　　*D*．4个

1.

【答案】*A*

2.

【答案】3;1

【解析】$\begin{cases}a-b=2\\2a+b=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$

3.

【答案】*C*

## 模块二、二次根式的计算

### 知识集锦

**1．加减运算**

先化简为最简二次根式，然后合并同类二次根式。

**2．乘除运算**

（1）$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant0$，$b\geqslant0$）

（2）$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$（$a\geqslant0$，$b>0$）

（3）推广：$\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_2}\cdot\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_n}=\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n}(a_1\geqslant0,\ a_2\geqslant0,\cdots,\ a_n\geqslant0)$

**3．混合运算**

遵循有理数的运算顺序与运算律。

例：①$\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2=a+b\pm2\sqrt{ab}$；②$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$

【例4】

1.（天府七中半期）计算：

（1）$\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{12}$　　　　（2）$\left|1-\sqrt{2}\right|+\sqrt{12}\times\sqrt{6}-\left(-\sqrt{2}\right)^2$

2.（成外半期）计算

（1）$\sqrt[3]{-27}-\sqrt{0}-\sqrt{\dfrac{1}{16}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{63}{64}}$　　　　（2）$\dfrac{2}{5}\sqrt{32}\div\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right)\times\dfrac{1}{6}\sqrt{24}$

3.（石室联中半期）计算：

（1）$\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\left|-\sqrt{3}\right|$

（2）$\dfrac{4}{\sqrt{2}}+\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)-\sqrt{18}$

4.（嘉祥半期）计算：$\left(-3\right)^{-1}-\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

5.（实外西区半期）计算

（1）$\sqrt{18}-\sqrt{72}+\sqrt{50}$

（2）$\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$

（3）$6\times\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\left(\pi-3\right)^{0}-\left|1-\sqrt{3}\right|+\sqrt{2}\times\sqrt{6}$

6.（1）$\sqrt{27a}-3\sqrt{\dfrac{a}{9}}+\dfrac{\sqrt{4a}}{2}-|\sqrt{3a}-\sqrt{27a}|$

（2）$2\sqrt{x}+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-\sqrt{\dfrac{xy}{3}}\div\sqrt{\dfrac{y}{12}}$

1.

【答案】见解析

【解析】(1）解：

$$\begin{aligned}原式&=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{2}\times12}\\&=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}\\&=7\sqrt{3}+\sqrt{6}\end{aligned}$$

（2）解：

$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{2}-1+6\sqrt{2}-2\\&=7\sqrt{2}-3\end{aligned}$$

2.

【答案】见解析

【解析】(1）解：

$$\begin{aligned}原式&=-3-0-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\&=-3\end{aligned}$$

（2）解：

$$\begin{aligned}原式&=\frac{2}{5}\sqrt{32}\times\frac{3}{-2\sqrt{6}}\times\frac{1}{6}\sqrt{24}\\&=-\frac{\sqrt{32}}{5}\\&=-\frac{4\sqrt{2}}{5}\end{aligned}$$

3.

【答案】见解析

【解析】(1）解：

$$\begin{aligned}原式&=2\sqrt{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\\&=\frac{11\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

（2）解：

$$\text{原式}=2\sqrt{2}+1-3\sqrt{2}$$
$$=-\sqrt{2}+1$$

4.

【答案】见解析

【解析】解：

$$\text{原式}=-\frac{1}{3}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$$
$$=-\frac{1}{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$
$$=\frac{7}{6}$$

5.

【答案】见解析

【解析】（1）解：

$$\text{原式}=3\sqrt{2}-6\sqrt{2}+5\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

（2）解：

$$\text{原式}=4-2\sqrt{3}+1$$
$$=5-2\sqrt{3}$$

（3）解：

$$\text{原式}=2\sqrt{3}-1-\left(\sqrt{3}-1\right)+2\sqrt{3}$$
$$=3\sqrt{3}$$

6.

【答案】见解析

【解析】（1）解：

$$\text{原式}=3\sqrt{3a}-\sqrt{a}+\sqrt{a}-\left|\sqrt{3a}-3\sqrt{3a}\right|$$
$$=3\sqrt{3a}-2\sqrt{3a}$$
$$=\sqrt{3a}$$

（2）解：

$$\text{原式}=2\sqrt{x}+x-1-2\sqrt{x}$$
$$=x-1$$

【例5】

1．（师大一中半期）若 $\sqrt[3]{0.3670}=0.7160$， $\sqrt[3]{3.670}$=1.542，则 $\sqrt[3]{367}=$__________.

2．若 $\sqrt[3]{25.36}=2.938, \sqrt[3]{253.6}=6.329$，则 $\sqrt[3]{25360000}=$_________.

1.

【答案】7. 160

2.

【答案】293. 8

# 模块三、有理化

## 知识集锦

**1．分母有理化的定义**
在二次根式中，将无理数的分母化为有理数的过程。

**2．分母有理化的方法**
分子分母同时乘以有理化因式（有理化因式是指相乘之后使分母变为有理数的因式）.
单项根式的分母有理化，同乘以分母本身，例：$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$；
两项根式的分母有理化，同乘以使分母构成平方差公式的因式，例：
$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}(a\neq b)$。

【例6】
化简下列各式：
①$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；　②$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；　③$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=$__________；

④$\frac{3}{\sqrt{5}+4}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；　⑤$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；　⑥$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=$__________。

【答案】①$\sqrt{2}-1$　②$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　③$\sqrt{7}-\sqrt{5}$　④$\frac{3\left(4-\sqrt{5}\right)}{11}$　⑤$\sqrt{3}-2$　⑥$3-2\sqrt{2}$

【例7】

1.（实外西区半期）
①$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$　②$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$　③$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=$__________；……
第 $n$ 个等式为____________________；
计算：（1）$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$（$n$ 为正整数）
（2）$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2019}}$

2.（树德半期）已知 $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$，则 $A^2+2A+1=$__________.

1.

【答案】$\sqrt{4}-\sqrt{3}$；$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

【解析】（1）解：

$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\&=\sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

（2）解：

$$\begin{aligned}原式&=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{2019}-\sqrt{2017}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2019}-1}{2}\end{aligned}$$

2.

【答案】2018

【解析】（1）解：

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2018}-\sqrt{2017}\\&=\sqrt{2018}-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore A^2+2A+1&=\left(A+1\right)^2\\&=\left(\sqrt{2018}\right)^2\\&=2018\end{aligned}$$

# 巅峰挑战

（育才半期）观察下列各式及其变形过程：

$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$a_2=\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$a_3=\dfrac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}$

...

（1）按照此规律，写出第五个等式 $a_5=$________；

（2）按照此规律，若 $S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$，试用含 $n$ 的代数式表示 $S_n$；

（3）若 $x=\sqrt{6}S_2+\sqrt{2}a_1$，试求代数式 $2x^4+4x^3-12x^2-4x+2$ 的值．

【解析】（1）$a_5=\dfrac{1}{5\sqrt{6}+6\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

（2）

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\&=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\&=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\&=1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

（3）

$S_2=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$a_1=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore x&=\sqrt{6}S_2+\sqrt{2}a_1\\&=\sqrt{6}\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\sqrt{2}\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1\\&=\sqrt{6}-1\end{aligned}$$

即 $x=\sqrt{6}-1$

$\therefore x+1=\sqrt{6}$

$(x+1)^2=6$

$\therefore x^2+2x=5$

$x^2=5-2x$

$\therefore 2x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 4x + 2$

$= 2x^2(5 - 2x) + 4x^3 - 12x^2 - 4x + 2$

$= 10x^2 - 4x^3 + 4x^3 - 12x^2 - 4x + 2$

$= -2x^2 - 4x + 2$

$= -2(5 - 2x) - 4x + 2$

$= -10 + 4x - 4x + 2$

$= -8$

# 笔记整理

# 第一讲课后练习

1.

（1）若$|a-b+1|$与$\sqrt{a+2b+4}$互为相反数，则$(a-b)^{2005}=$______________。

（2）若$\sqrt{2^{m+n-2}}$和$\sqrt{3^{3m-2n+2}}$都是最简二次根式，则 $m$=__________，$n$=__________。

（3）若最简二次根式$\frac{3}{2}\sqrt{4a^2+1}$与$\frac{2}{3}\sqrt{6a^2-1}$是同类二次根式，则 $a$=_________。

（4）在$\sqrt{20}$，$\sqrt{58}$，$\sqrt{0.1}$，$\sqrt{x^2-y^2}\,(x\geq y)$，$\sqrt{9-6x+x^2}\,(x>3)$，$\sqrt{\frac{1}{a+b}}$中，不是最简二次根式的有______个。

（5）在二次根式：$\sqrt{\frac{5}{a}}$，$\sqrt{x^2+1}$，$\sqrt{5.4}$，$\sqrt{\frac{2}{5}xy}$，$\frac{1}{3}\sqrt{ab}$，$\sqrt{x^2y+xy^2}$中，最简二次根式有_________个.

（6）已知最简根式$\sqrt[3a+2]{4a+3b}$与$(b+1)\sqrt[b+4]{2a-b+6}$是同类根式，求 $a$，$b$ 的值。

【解析】（1）互为相反数的两个数的和为 0，所以$|a-b+1|+\sqrt{a+2b+4}=0$，$\begin{cases}a-b+1=0\\a+2b+4=0\end{cases}$解得

$\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$所以$(a-b)^{2005}=\left[-2-(-1)\right]^{2005}=(-1)^{2005}=-1$

（2）最简二次根式说明根号内的说不能开平方，即根号内的数的指数为 1，即$\begin{cases}m+n-2=1\\3m-2n+2=1\end{cases}$解得

$\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$

（3）同类二次根式说明根号内的数是相同的即$4a^2+1=6a^2-1$解得$a=\pm1$

（4）4

（5）3

（6）$a=1$，$b=1$

2.

（1）设$y=\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2x+1}}$，则使得 $y$ 有意义的 $x$ 的取值范围是____________.

（2）已知 $a$，$b$，$c$ 为△$ABC$ 的三边长，化简：$\sqrt{(a+b-c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}-\sqrt{(b-c-a)^2}$

【解析】（1）$\begin{cases}2-x\geqslant0\\2x+1>0\end{cases}$，即$-\frac{1}{2}<x\leqslant2$

（2）∵ $a$，$b$，$c$ 为三角形的三边长，∴$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$，

∴$a+b-c>0$，$a-b-c<0$，$b-c-a<0$.

∴$\sqrt{(a+b-c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}-\sqrt{(b-c-a)^2}=|a+b-c|+|a-b-c|-|b-c-a|=3b-a-c$

3.

（1）$\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$　　　（2）$5\sqrt{x}\times3\sqrt{x^3}$

（3）$\sqrt{48}-\sqrt{54}\div2+\left(3-\sqrt{3}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$　　　（4）$\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)-\left(3\sqrt{5}-1\right)^2$

（5）$\left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(1+\sqrt{3}\right)^2\left(1-\sqrt{2}\right)^2\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

【答案】（1）原式$=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=3\times\sqrt{2\times2}=3\times2=6$

（2）原式$=5\sqrt{x}\times3\sqrt{x^3}=15\sqrt{x\times x^3}=15x^2$

（3）原式$=4\sqrt{3}-3\sqrt{6}\div2+\left(3-\sqrt{3}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=4\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{6}}{2}+2$

（4）原式$=49-16\times3-\left(45-6\sqrt{5}+1\right)=49-48-45+6\sqrt{5}-1=-45+6\sqrt{5}$

（5）原式$=\left[\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\right]^2\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)\right]^2=(-1)^2(-2)^2=4$

4.

（1）计算：$\left(2\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)^{16}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^{17}$

（2）计算：$\left(5+\sqrt{6}\right)\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$

（3）计算：$\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+x+\sqrt{x}\right)\left(1+x-\sqrt{x}\right)$

【解析】(1) 原式$=(2\sqrt{3}-\sqrt{11})^{16}(2\sqrt{3}+\sqrt{11})^{17}=[(2\sqrt{3}-\sqrt{11})(2\sqrt{3}+\sqrt{11})]^{16}(2\sqrt{3}+\sqrt{11})=2\sqrt{3}+\sqrt{11}$

（2）原式$=(5+\sqrt{6})\left[5\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}\right]=(5+\sqrt{6})\left[\sqrt{2}(5-\sqrt{6})\right]=\sqrt{2}(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})=19\sqrt{2}$

（3）原式$=(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})(1+x+\sqrt{x})(1+x-\sqrt{x})=(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

5.

化简下列各式：

①$\frac{1}{2\sqrt{2}-1}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；　②$\frac{1}{\sqrt{5}+2}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；　③$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=$__________；

④$\frac{4}{\sqrt{7}+3}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；　⑤$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；　⑥$\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{\sqrt{14}+\sqrt{7}}=$__________。

【答案】①$\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$

②$\sqrt{5}-2$

③$\sqrt{7}+\sqrt{5}$

④$6-2\sqrt{7}$

⑤$-2-\sqrt{3}$

⑥$3-2\sqrt{2}$

# 第二讲、二次根式（二）

## 模块一、二次根式化简求值

### 知识集锦

**1．高斯记号**

对于一个实数 $m$，我们把不超过 $m$ 的最大整数叫做 $m$ 的整数部分，把 $m$ 减去其整数部分的差叫做 $m$ 的小数部分。

整数部分：记为 $\left[x\right]$，表示不超过 $x$ 的最大整数；

小数部分：记为 $\left\{x\right\}$，$\left\{x\right\}=x-\left[x\right]$；

数学上，$[\ ]$ 叫做取整符号，$\{\ \}$ 叫做取小符号，它们统称为高斯记号.

【例1】

1．当 $m=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$ 时，求 $\dfrac{m^2}{m-2}+\dfrac{4}{2-m}$ 的值。

2.（棕北半期）已知：$y=\sqrt{1-8x}+\sqrt{8x-1}+\dfrac{1}{2}$，求代数式 $\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2}-\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}$ 的值。

3. 若 $x$，$y$ 是实数，且 $y=\sqrt{4x-1}+\sqrt{2-8x}+\dfrac{1}{3}$，求 $(\dfrac{2}{3}\sqrt{9x}+\sqrt{4xy})-(\sqrt{x^3}+\sqrt{25xy})$ 的值。

1.

【答案】见解析

【解析】解：$m=-\left(2+\sqrt{3}\right)$

$$\begin{aligned}&\therefore \frac{m^2}{m-2}+\frac{4}{2-m}\\&=\frac{m^2-4}{m-2}\\&=\frac{\left(m-2\right)\left(m+2\right)}{m-2}\\&=m+2\\&=-\sqrt{3}\end{aligned}$$

2.

【答案】见解析

【解析】解：$\begin{cases}1-8x\ge 0\\8x-1\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{8}\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$$\therefore \text{原式}=\sqrt{\frac{1}{4}+4+2}-\sqrt{\frac{1}{4}+4-2}$$
$$=\sqrt{\frac{25}{4}}-\sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}$$
$$=1$$

3.

【答案】见解析

【解析】解：$\because \begin{cases}4x-1\geq 0\\2-8x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$$\therefore\left(\frac{2}{3}\sqrt{9x}+\sqrt{4xy}\right)-\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{25xy}\right)$$
$$=\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{xy}\right)-\left(x\sqrt{x}+5\sqrt{xy}\right)$$
$$=\left(2-x\right)\sqrt{x}-3\sqrt{xy}$$
$$=\left(2-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}-3\times\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{7}{8}-3\times\frac{1}{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

【例2】

1．先化简，再求值：$2a-\sqrt{a^2-4a+4}$，其中$a=\sqrt{3}$，小刚的解法如下：$2a-\sqrt{a^2-4a+4}=2a-\sqrt{(a-2)^2}=2a-(a-2)=a+2$，当$a=\sqrt{3}$时，$2a-\sqrt{a^2-4a+4}=\sqrt{3}+2$．小刚的解法对吗？若不对，请改正。

【解析】解：不对

$$2a-\sqrt{a^2-4a+4}=2a-\sqrt{\left(a-2\right)^2}$$
$$\because a=\sqrt{3}<2$$
$$\therefore \text{原式}=2a-\left(2-a\right)$$
$$=3a-2$$
$$=3\times\sqrt{3}-2$$
$$=3\sqrt{3}-2$$

2. 当 $a=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$，求代数式 $\dfrac{9-6a+a^2}{a-3}+\dfrac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值。

【解析】解：

$$
\begin{aligned}
a&=-\frac{1}{2+\sqrt{5}}\\
&=2-\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \text{原式}&=\frac{(a-3)^2}{a-3}+\frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}\\
&=a-3+\frac{1-a}{a(a-1)}\\
&=a-3-\frac{1}{a}\\
&=-1-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}\\
&=1
\end{aligned}
$$

3.（嘉祥月考）已知 $xy=3$，求 $x\sqrt{\dfrac{y}{x}}+y\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 的值。

【解析】解：

$$
\begin{aligned}
&x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}\\
&=x\cdot\sqrt{\frac{xy}{x^2}}+y\sqrt{\frac{xy}{y^2}}\\
&=x\cdot\frac{\sqrt{xy}}{|x|}+y\cdot\frac{\sqrt{xy}}{|y|}
\end{aligned}
$$

①$x>0$， $y>0$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=x\cdot\frac{\sqrt{xy}}{x}+y\cdot\frac{\sqrt{xy}}{y}\\
&=2\sqrt{xy}\\
&=2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

②$x<0$，$y<0$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=x\cdot\frac{\sqrt{xy}}{(-x)}+y\cdot\frac{\sqrt{xy}}{(-y)}\\
&=-2\sqrt{xy}\\
&=-2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

【例3】

1．填空

| | $2.1$ | $-7.6$ | $\sqrt{5}$ | $-\sqrt{17}$ |
|---|---|---|---|---|
| 整数部分 | | | | |
| 小数部分 | | | | |

【答案】

| | $2.1$ | $-7.6$ | $\sqrt{5}$ | $-\sqrt{17}$ |
|---|---|---|---|---|
| 整数部分 | 2 | -8 | 2 | -5 |
| 小数部分 | 0.1 | 0.4 | $\sqrt{5}-2$ | $5-\sqrt{17}$ |

2.（师大一中月考）我们用符号$[x]$表示一个不大于实数 $x$ 的最大的整数，如：$[2.78]=2,\ [-0.23]=-1$，则按这个规律，$\left|-1-\sqrt{7}\right|=$________.

【答案】−4

3.（天七月考）已知$5a+2$的立方根是 3，$3a+b-1$的算术平方根是 4，$c$ 是$\sqrt{13}$的整数部分

（1）求 $a$、$b$、$c$ 的值；

（2）求$3a-b+c$的平方根

【解析】解：（1）$\sqrt[3]{5a+2}=3$

$\therefore 5a+2=3^3$

$a=5$

$3a+b-1=4^2$

即

$3a+b=17$

$b=2$

$c$ 是$\sqrt{13}$ 的整数部分

∴$c$=3

（2）

$3a-b+c$

$=3\times5-2+3$

$=16$

16 的平方根为 ±4

4．若$4+\sqrt{7}$的整数部分为 $a$，$4-\sqrt{7}$ 的小数部分为 $b$，求 $a^2-b^2$的值。

【解析】解：$6<4+\sqrt{7}<7$

∴整数部分 $a$=6

$1<4-\sqrt{7}<2$

$\therefore 4-\sqrt{7}$ 的整数部分=1

$\therefore 4-\sqrt{7}$ 的小数部分

$b=\left(4-\sqrt{7}\right)-1$

$=3-\sqrt{7}$

$\therefore a^2-b^2$

$=36-\left(3-\sqrt{7}\right)^2$

$=36-\left(9-6\sqrt{7}+7\right)$

$=20+6\sqrt{7}$

$\therefore a^2-b^2$

$=36-\left(3-\sqrt{7}\right)^2$

$=36-\left(9-6\sqrt{7}+7\right)$

$=20+6\sqrt{7}$

# 模块二、换元法与整体思想

【例4】

1．已知：$a+b=3$，$ab=1$，且 $a>b$，求 $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 的值。

【解析】解：

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$$

$\because a+b=3,\ \ ab=1$

$\therefore \left(a-b\right)^2=\left(a+b\right)^2-4ab$

$=5$

又 $\because a>b$

$\therefore a-b=\sqrt{5}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$

$=\dfrac{3-2}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

2．已知：$x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}$，$y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}$，求$\sqrt{x^2+y^2+3xy}$的值。

【解析】解：

$$\begin{aligned} x&=\frac{1}{2\sqrt{2}-3}\\ &=-\left(3+2\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{2\sqrt{2}+3}\\ &=3-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\therefore x+y=-\left(3+2\sqrt{2}\right)+3-2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$

$xy=-\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=-1$

$$\begin{aligned} &\therefore \sqrt{x^2+y^2+3xy}\\ &=\sqrt{\left(x+y\right)^2+xy}\\ &=\sqrt{\left(-4\sqrt{2}\right)^2-1}\\ &=\sqrt{32-1}\\ &=\sqrt{31} \end{aligned}$$

3.（石室联中半期）已知$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$，求$2x^2-xy+2y^2$的值.

【解析】解：$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+y^2&=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\\ &=2 \end{aligned}$$

$$xy=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &\therefore 2x^2-xy+2y^2\\ &=2\left(x^2+y^2\right)-xy\\ &=2\times 2-\frac{1}{2}\\ &=4-\frac{1}{2}\\ &=\frac{7}{2} \end{aligned}$$

【例5】

1．已知$a+1=\sqrt{7}$，那么$a^3+3a^2-4a-12$的值为________。

2．若$m=\dfrac{2016}{\sqrt{2017}-1}$，则$m^5-2m^4-2016m^3+2$的值为________。

3.（成外半期）若$m=\dfrac{2018}{\sqrt{2019}-1}$，则$m^3-m^2-2017m+2015=$__________.

1.

【答案】$-6$

【解析】解：$(a+1)^2=7$

$\therefore a^2+2a=6$

$\therefore a^2=6-2a$

$\therefore a^3+3a^2-4a-12$

$=a\times(6-2a)+3a^2-4a-12$

$=a^2+2a-12$

$=6-2a+2a-12$

$=-6$

2.

【答案】2

【解析】$m=\dfrac{2016}{\sqrt{2017}-1}=\sqrt{2017}+1$

$\therefore (m-1)^2=2017$

$\therefore m^2=2m+2016$

$\therefore m^5-2m^4-2016m^3+2$

$=m^3\times(2m+2016)-2m^4-2016m^3+2$

$=2016m^3-2016m^3+2$

$=2$

3.

【答案】见解析

【解析】解：$m=\sqrt{2019}+1$

$\therefore (m-1)^2=2019\Rightarrow m^2=2018+2m$

$\therefore m^3-m^2-2017m+2015$

$=m\times(2018+2m)-m^2-2017m+2015$

$=m^2+m+2015$

$=2018+2m+m+2015$

$=3m+4033$

$=3\times\left(\sqrt{2019}+1\right)+4033$

$=3\sqrt{2019}+4036$

【例6】

1.（石室联中）已知$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$，求$\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+14}$的值.

2．已知$\sqrt{16-x^2}-\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{2}$，则$\sqrt{16-x^2}+\sqrt{4-x^2}=$__________。

3．已知$\sqrt{39+x^2}-\sqrt{15+x^2}=2$，则$\sqrt{39+x^2}+\sqrt{15+x^2}$的值为__________。

1.

【答案】见解析

【解析】解：$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$

$\therefore x+\frac{1}{x}-2=4$

$\therefore x+\frac{1}{x}=6$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=6^2-2$

$=34$

$\therefore\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}$

$=\sqrt{34+14}$

$=\sqrt{48}$

$=4\sqrt{3}$

2.

【答案】见解析

【解析】令 $16-x^2=a$

$4-x^2=b$

$\therefore\sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{2}$

又 $\because a-b=12$

$\therefore a-b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

$=2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

$\therefore 2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=12$

$\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}=3\sqrt{2}$

即 $\sqrt{16-x^2}+\sqrt{4-x^2}=3\sqrt{2}$

3.

【答案】见解析

【解析】令 $39+x^2=a$

$15+x^2=b$

$\therefore\sqrt{a}-\sqrt{b}=2$

又 $\because a-b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=24$

$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}=12$

即 $\sqrt{39+x^2}+\sqrt{15+x^2}=12$

# 模块三、配方与双重二次根式

【例7】

观察、思考、解答：

$\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times1\times\sqrt{2}+1^2=3-2\sqrt{2}$；反之 $3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

$\therefore\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1$

（1）化简：$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

（2）化简：$\sqrt{4-\sqrt{12}}$

（3）化简：$\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$

【解析】（1）解：

$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}\\&=\sqrt{5}-1\end{aligned}$$

（2）解：

$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}\\&=\sqrt{3}-1\end{aligned}$$

（3）解：

$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}+\sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{2}}\\&=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{15}+3}{2}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{15}+3}{2}}\\&=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

【例8】

1.（成外半期）已知：$2a+b+5=4\left(\sqrt{2a-2}+\sqrt{b-1}\right)$，先化简再求值：$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}-\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}$ .

2．已知 $a+b+c-6\sqrt{a-2}-10\sqrt{b+1}-2\sqrt{c-3}=-31$，求 $a+b+c$ 的值。

3．如果 $a+b+c-2\sqrt{a-1}-4\sqrt{b-2}-6\sqrt{c-3}+8=0$，那么 $abc$ 为多少？

1.

【答案】见解析

【解析】解：$(2a-2)-4\sqrt{2a-2}+4+(b-1)-4\sqrt{b-1}+4=0$

即 $\left(\sqrt{2a-2}-2\right)^2+\left(\sqrt{b-1}-2\right)^2=0$

$\therefore \sqrt{2a-2}=2$

$\sqrt{b-1}=2$

$\therefore \begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases}$

$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}-\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

$=2\sqrt{\frac{a}{b}}$

$=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

2.

【答案】见解析

【解析】解：$\left[(a-2)-6\sqrt{a-2}+9\right]+\left[(b+1)-10\sqrt{b+1}+25\right]+\left[(c-3)-2\sqrt{c-3}+1\right]=0$

$\therefore \left(\sqrt{a-2}-3\right)^2+\left(\sqrt{b+1}-5\right)^2+\left(\sqrt{c-3}-1\right)^2=0$

$\therefore \sqrt{a-2}=3 \Rightarrow a=11$

$\sqrt{b+1}=5 \Rightarrow b=24$

$\sqrt{c-3}=1 \Rightarrow c=4$

$\therefore a+b+c=11+24+4$

$=39$

3.

【解析】解：$\left[(a-1)-2\sqrt{a-1}+1\right]+\left[(b-2)-4\sqrt{b-2}+4\right]+\left[(c-3)-6\sqrt{c-3}+9\right]=0$

$\therefore \left(\sqrt{a-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{b-2}-2\right)^2+\left(\sqrt{c-3}-3\right)^2=0$

$\therefore \sqrt{a-1}=1 \Rightarrow a=2$

$\sqrt{b-2}=2 \Rightarrow b=6$

$\sqrt{c-3}=3 \Rightarrow c=12$

$\therefore abc=2\times 6\times 12$

$=144$

# 笔记整理

# 第二讲课后练习

1.

（1）已知$a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$求$\sqrt{a^2-3ab+b^2}$的值。

（2）当$a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$时，代数式$\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$的值是______________。

（3）当$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$时，求$\dfrac{a^2}{a+2}-\dfrac{4}{2+a}$的值。

（4）若 $x$，$y$ 是实数，且$y=\sqrt{4x-1}+\sqrt{1-4x}+\dfrac{1}{3}$，求$(\dfrac{2}{3}x\sqrt{9x}+\sqrt{4xy})-(\sqrt{x^3}+\sqrt{25xy})$的值.

（5）先化简，再求代数式的值.

$\sqrt{a^4+2a^3b+a^2b^2}-\sqrt{a^2b^2-2ab^3+b^4}$，其中：

（1）$a=6$，$b=4$；

（2）$a=4$，$b=6$.

【解析】

（1）$a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+2\sqrt{6},b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5-2\sqrt{6}\Rightarrow a+b=10\Rightarrow ab=1$

$\sqrt{a^2-3ab+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-5ab}=\sqrt{95}$

（2）$a+b=\sqrt{5}a-b=1,ab=1$

$\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

（3）$\dfrac{a^2}{a+2}-\dfrac{4}{2+a}=\dfrac{a^2-4}{a+2}=a-2\Rightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}\Rightarrow$原式$=a-2=-\sqrt{3}$

（4）依题意得：$1=4x$，解得$x=\dfrac{1}{4}$，所以$y=\dfrac{1}{3}$，

$(\dfrac{2}{3}x\sqrt{9x}+\sqrt{4xy})-(\sqrt{x^3}+\sqrt{25xy})=2x\sqrt{x}-x\sqrt{x}+2\sqrt{xy}-5\sqrt{xy}=x\sqrt{x}-3\sqrt{xy}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（5）$\sqrt{a^4+2a^3b+a^2b^2}-\sqrt{a^2b^2-2ab^3+b^4}=|a||a+b|-|b||a-b|$，

（1）当$a=6$，$b=4$时，原式$=6\times10-4\times2=52$；

（2）当$a=4$，$b=6$时，原式$=4\times10-6\times2=28$.

2.

（1）已知$\sqrt{7}$的整数部分为 $a$，小数部分为 $b$.

求：（1）$a$、$b$ 的值；

（2）式子$a^2-a-b$的值.

【解析】（1）$\because 2<\sqrt{7}<3$，$\therefore\sqrt{7}$的整数部分为 2，小数部分为$\sqrt{7}-2$，$\therefore a=2$，$b=\sqrt{7}-2$.

（2）$a^2-a-b=2^2-2-(\sqrt{7}-2)=4-\sqrt{7}$.

（2）已知$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$的整数部分为 $a$，小数部分为 $b$，求$a^2+b^2$的值.

【解析】$\because\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，$1<\sqrt{3}<2$，$\therefore a=3$，$b=\sqrt{3}-1$，

$\therefore a^2+b^2=9+(\sqrt{3}-1)^2=9+4-2\sqrt{3}=13-2\sqrt{3}$.

（3）已知$\sqrt{5}+2$的整数部分为$a$，小数部分为$b$，求$\dfrac{a^2-4b^2}{a^2+4ab+4b^2}$的值.

【解析】$\because 4<5<9$，$\therefore 2<\sqrt{5}<3$，$\therefore 4<\sqrt{5}+2<5$，$\therefore a=4$，$b=\sqrt{5}-2$；

$\therefore \dfrac{a^2-4b^2}{a^2+4ab+4b^2}=\dfrac{(a-2b)(a+2b)}{(a+2b)^2}=\dfrac{a-2b}{a+2b}=\dfrac{4-2\sqrt{5}+4}{4+2\sqrt{5}-4}=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}-1$.

3.

（1）若$x=\sqrt{5}-1$，则$x^2+5x+4$的值为______；

【解析】$\because x=\sqrt{5}-1$，$\therefore x^2+5x+4=(\sqrt{5}-1)^2+5\times(\sqrt{5}-1)+4=5-2\sqrt{5}+1+5\sqrt{5}-5+4=3\sqrt{5}+5$

（2）若$m=\dfrac{2017}{\sqrt{2018}-1}$，则$m^2-2m+1$的值是______.

【解析】$\because m=\dfrac{2017}{\sqrt{2018}-1}=\dfrac{2017(\sqrt{2018}+1)}{(\sqrt{2018}-1)(\sqrt{2018}+1)}=\sqrt{2018}+1$，

$\therefore m^2-2m+1=(m-1)^2=(\sqrt{2018}+1-1)^2=2018$.

（3）已知$a=-\dfrac{2}{\sqrt{7}+3}$，求代数式$a^3+5a^2-4a-6$的值.

【解析】$\because a=-\dfrac{2}{\sqrt{7}+3}=-3+\sqrt{7}$，

$\therefore a+3=\sqrt{7}$

$\therefore a^3+5a^2-4a-6$

$=a^3+6a^2+9a-(a^2+6a+9)-7a+3$

$=a(a+3)^2-(a+3)^2-7a+3$

$=7a-7-7a+3$

$=-4$.

4.

（1）观察、思考、解答：

$(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2})^2-2\times1\times\sqrt{2}+1^2=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$

反之$3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2$

$\therefore 3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$

$\therefore \sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

（1）仿上例，化简：$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$；

（2）若$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$，则$m$、$n$与$a$、$b$的关系是什么？并说明理由；

（3）已知$x=\sqrt{4-\sqrt{12}}$，求$\dfrac{x}{x-1}$的值

【解析】（1）$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$；

（2）$a=m+n$，$b=mn$，理由：$\because \sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$，$\therefore a+2\sqrt{b}=m+2\sqrt{mn}+n$，

$\therefore a=m+n$，$b=mn$；

（3）$\because x=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$，

$$\frac{x}{x-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=-1-\sqrt{3}.$$

（2）已知$a+b+c=2\sqrt{a-2}+4\sqrt{b-1}+6\sqrt{c+3}-14$，求 $a$、$b$、$c$ 的值.

【解析】$\because a+b+c=2\sqrt{a-2}+4\sqrt{b-1}+6\sqrt{c+3}-14$,

$\therefore a-2-2\sqrt{a-2}+1+b-1-4\sqrt{b-1}+4+c+3-6\sqrt{c+3}+9=0$,

$\therefore(\sqrt{a-2}-1)^2+(\sqrt{b-1}-2)^2+(\sqrt{c+3}-3)^2=0$,

$\therefore\sqrt{a-2}-1=0$，$\sqrt{b-1}-2=0$，$\sqrt{c+3}-3=0$,

$\therefore a=3$，$b=5$，$c=6$.

# 第三讲、勾股定理

## 模块一、勾股定理的证明与计算

### 知识集锦

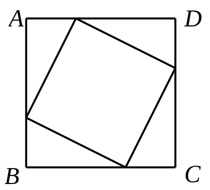
1．勾股定理

直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方．即直角三角形的两直角边分别是 $a$，$b$，斜边为 $c$，那么 $a^2+b^2=c^2$

2．勾股定理的部分证明方法

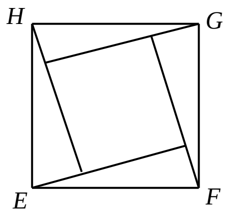
（1）内弦图：将四个全等的直角三角形拼成如图所示的正方形：

$$S_{正方形ABCD}=\left(a+b\right)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab \quad \therefore\ a^2+b^2=c^2$$



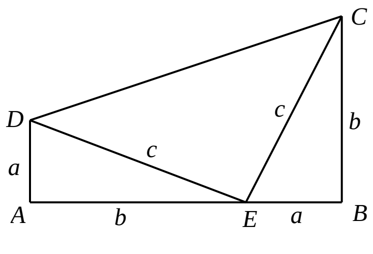

（2）外弦图：将四个全等的直角三角形拼成如图所示的正方形：

$$S_{正方形EFGH}=c^2\left(a-b\right)^2+4\times\frac{1}{2}ab \quad \therefore\ a^2+b^2=c^2$$




（3）“总统”法．如图所示将两个直角三角形拼成直角梯形：

$$S_{梯形ABCD}=\frac{(a+b)(a-b)}{2}=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2 \quad \therefore\ a^2+b^2=c^2$$



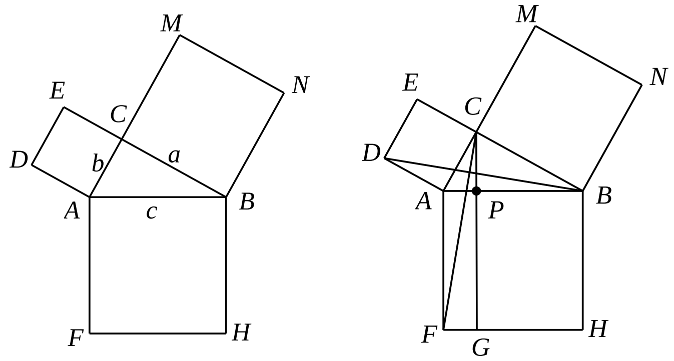

3．常见勾股数

（1）常见勾股数：3，4，5；6，8，10；5，12，13；7，24，25；8，15，17；9，40，41；

（2）若 $a$，$b$，$c$ 为一组勾股数，则 $ak$，$bk$，$ck$ 也为勾股数（$k$ 为正整数）

【例1】

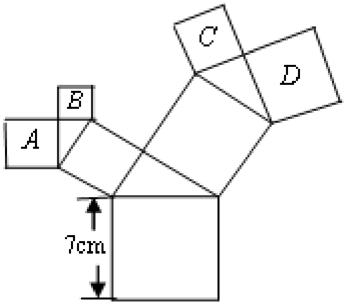
欧几里得法：勾股证明的方法成百上千种，其中《几何原本》中的证法非常经典，是在一个我们非常熟悉的几何图形中实现的（如图所示），同学们，如果直角三角形 $ABC$ 的三边长为 $a$，$b$，$c$（$c$ 为斜边），试利用此图证明 $a^2+b^2=c^2$




【解析】分别连接 $CD$、$PF$，由 $BE//AD$，$CG//AF$ 可知 $S_{ADC}=S_{ADB}$，$S_{AFP}=S_{ACF}$，易证△$ADB$≌△$ACF$，所以 $S_{ADC}=S_{ADB}=S_{ACF}=S_{AFP}$，所以 $\frac{1}{2}S_{ACED}=\frac{1}{2}S_{APGF}$，即 $S_{ACED}=S_{APGF}$，同理可证 $S_{CBNM}=S_{PGHB}$，所以 $S_{ACED}+S_{CBNM}=S_{APGF}+S_{PGHB}=S_{AFHB}$，即证勾股定理

【例2】

1. 如图，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形的边长为 7$cm$，则正方形 $A$，$B$，$C$，$D$ 的面积之和为_______$cm^2$。

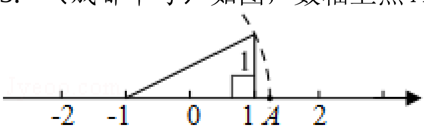



【答案】49

2.（棕北半期）两直角边的长是 5 和 12 的直角三角形斜边的长是________

【答案】13

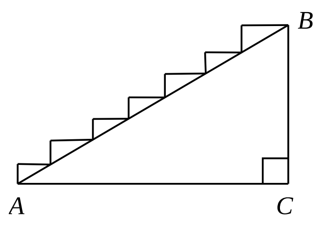
3. （成都中考）如图，数轴上点 $A$ 表示的实数是_______.




【答案】$\sqrt{5}-1$

4.（棕北月考）

某楼梯的侧面视图如图所示，其中 $AB$=5 米，$AC$=4 米，∠$C$=90°，因某种活动要求铺设红色地毯，则在 $AB$ 段楼梯所铺地毯的长度应为_______.

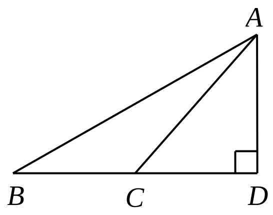



【答案】7 米

【例3】

1.（石室联中期末）

如图，$\triangle ABD$ 中 $\angle D=90°$，$C$ 是 $BD$ 上一点，已知 $CB=9$，$AB=17$，$AC=10$，则 $DC=$______，$AD=$_________.




【解析】设 $CD=x$，由 $AD^2=AB^2-BC^2=AC^2-CD^2$ 可得 $CD=6$，$AD=8$

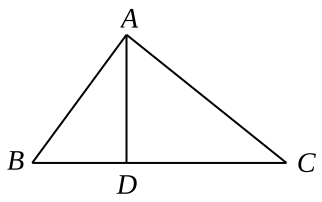
2．已知 $Rt\triangle ABC$ 的周长是 $4+4\sqrt{2}$，斜边上的中线长是 2，则 $S_{\triangle ABC}=$____________。

【解析】$\because$ $Rt\Delta ABC$ 的周长是 $4+4\sqrt{2}$，斜边上的中线长是 2，$\therefore$ 斜边长为 4，

设两个直角边的长为 $x$，$y$，则 $x+y=4\sqrt{2}$，$x^2+y^2=16$，解得：$xy=8$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}xy=4$

3．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于点 $D$，若 $AD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$ 的周长是_______.




【解析】$Rt\Delta ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AD\cdot BC=1$ .

设 $AB=x$，$AC=y$，则 $xy=2$，$x^2+y^2=12$，解得：$x+y=4$，周长为 $4+2\sqrt{3}$

【例4】

1.（成外半期）若一个直角三角形的两边长分别为 4 和 5，则此三角形的第三边长为________.

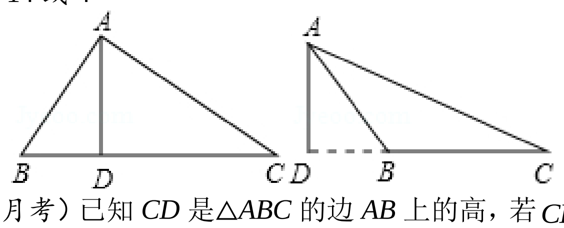
【答案】3 或 $\sqrt{41}$

2．直角三角形中，两条边长分别为 3 和 4，则斜边上的高长为_________.

【答案】$\frac{3\sqrt{7}}{4}$ 或 $\frac{12}{5}$

3. 已知$\triangle ABC$ 中，$AB=13$，$AC=15$，高 $AD=12$，则 $BC$ 长为________.

【答案】14 或 4



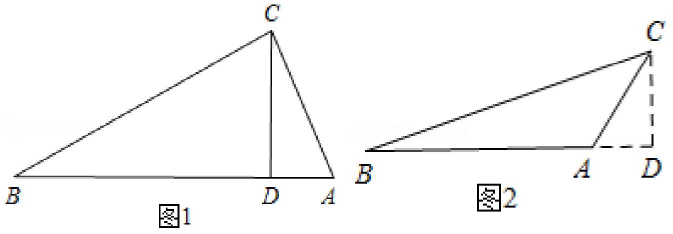

4.（天七月考）已知 $CD$ 是$\triangle ABC$ 的边 $AB$ 上的高，若 $CD=\sqrt{3}$，$AD=1$，$AB=2AC$，则 $BC$ 的长为______.

【解析】分两种情况：

①当$\Delta ABC$是锐角三角形，如图1，$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle CDA=90^\circ$，$\because CD=\sqrt{3}$，$AD=1$，$\therefore AC=2$，$\because AB=2AC$，$\therefore AB=4$，$\therefore BD=4-1=3$，$\therefore BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$；

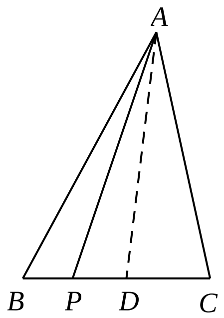
②当$\Delta ABC$是钝角三角形，如图2，同理得：$AC=2$，$AB=4$，$\therefore BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2}=2\sqrt{7}$；

综上所述，$BC$的长为$2\sqrt{3}$或$2\sqrt{7}$.




【例5】

如图，在△*ABC*中，*AB*=*AC*=1，*BC*边上有2013个不同的点$P_1$，$P_2$,$\cdots P_{2013}$，记$m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC\left(i=1,\cdots 2013\right)$，则$m_1+m_2+\cdots+m_{2013}=$________.




【解析】$\because APi^2=AD^2+PiD^2$

$$=AD^2+(BD-BPi)^2$$
$$=AD^2+BD^2-2BD\times BPi+BPi^2$$
$$=1+BPi(BPi-BC)$$
$$=1-BPi\times PiC,$$

$\therefore APi^2+BPi\times PiC=1$，$\therefore m_1+m_2+\ldots+m_{2013}=2013$，

# 模块二、勾股定理逆定理

## 知识集锦

勾股定理逆定理

如果一个△$ABC$ 的三边为 $a$，$b$，$c$ 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么它是一个直角三角形。

【例6】

1.（嘉祥半期）下列各组数中不能作为直角三角形三边长的是（　　）

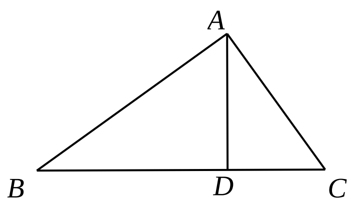
$A$．1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$　　　$B$．7，24，25　　　$C$．6，8，10　　　$D$．5，6，7

【答案】$D$

2. （育才半期）如图，在 $\Delta ABC$ 中，$AB=10$，$BD=8$，$AD=6$，$CD=2\sqrt{3}$．

（1）试说明 $AD\perp BC$；

（2）试求点 $D$ 到直线 $AC$ 的距离.

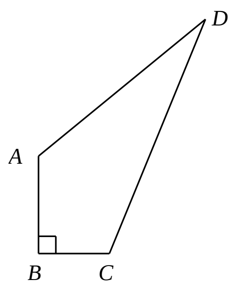



【解析】（1）由题意 $AB^2=BD^2+AD^2$，所以 $\angle ADB=90°$，即证 $AD\perp BC$

（2）利用等面积法计算即可，设 $D$ 到直线 $AC$ 的距离为 $d$，$S_{ACD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot d=\dfrac{1}{2}AD\cdot CD$，

而 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=4\sqrt{3}$，所以 $d=3$

3.（树德半期）如图，有一块菜地，已知 $AB$=4$m$，$BC$=3$m$，$AB\perp BC$，$AD=5\sqrt{3}m$，$DC$=10$m$，求这块地的面积.

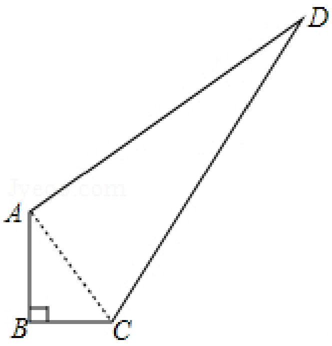



【解析】连结 $AC$，在 $\Delta ABC$ 中，

$\because \angle B=90°$，$AB=4m$，$BC=3m$，$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5(m)$，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6(m^2)$，

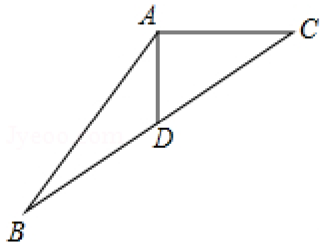
在 $\Delta ACD$ 中，$\because AD=5\sqrt{3}m$，$AC=5m$，$CD=10m$，$\therefore AD^2+AC^2=CD^2$，$\therefore \Delta ACD$ 是直角三角形，

$\therefore S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}\times 5\times 5\sqrt{3}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}(m^2)$．$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=(6+\dfrac{25\sqrt{3}}{2})$ 平方米.




4.（树德月考）

如图$\Delta ABC$中，$AB$=10，$AC$=6，中线$AD$=4，则△$ABC$的面积是_________.

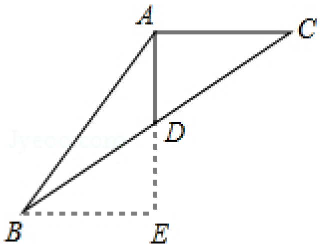



【解析】延长$AD$至$E$，使$ED=AD$，连接$BE$，$\because AD$是$BC$的中线，$\therefore BD=CD$，

在$\Delta ADC$和$\Delta EDB$中$\begin{cases} AD=DE \\ \angle ADC=\angle EDB \\ BD=CD \end{cases}$，$\therefore \Delta ADC\cong\Delta EDB(SAS)$，$\therefore AC=BE$，

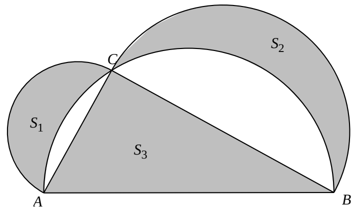
$\because AC=6$，$\therefore BE=6$，$\because AE=2AD=8, AB=10$，$\therefore \angle E=90°$

$\therefore S_{ABC}=S_{ABE}=\dfrac{1}{2}AE\cdot BE=24$



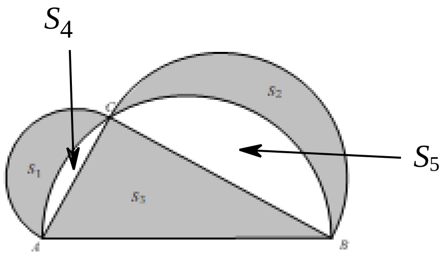
# 巅峰挑战

铺垫：如图所示，在△ $ABC$ 中，$\angle C$=90°，分别以△ $ABC$ 三边为直径向上方作三个半圆，其面积分别用 $S_1$，$S_2$，$S_3$ 表示，那么必有 $S_1+S_2=S_3$，试证明.



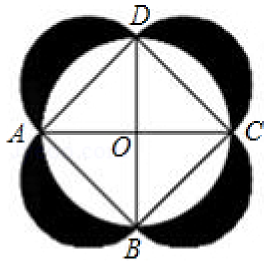

【解析】易证 $\left(S_1+S_4\right)+\left(S_2+S_5\right)=\left(S_3+S_4+S_5\right)$，直角三角形三条边为直径分别作的半圆

所以 $S_1+S_2=S_3$




1.（2017 成都中考/师大一中月考）

已知圆 $O$ 的两条直径 $AC$，$BD$ 互相垂直，分别以 $AB$，$BC$，$CD$，$DA$ 为直径向外作半圆得到如图所示的图形，现随机地向该图形内掷一枚小针，记针尖落在阴影区域内的概率为 $P_1$，针尖落在圆 $O$ 内的概率为 $P_2$，则 $\dfrac{P_1}{P_2}=$_________



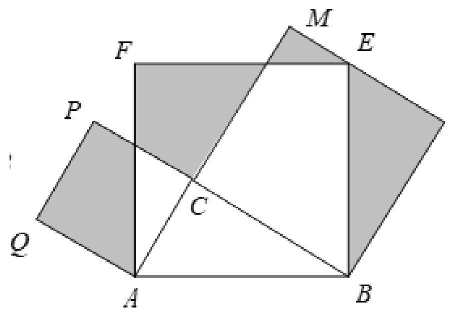

【解析】设圆 $O$ 的半径为 1，则 $AD=\sqrt{2}$，故 $S_{圆O}=\pi$，阴影部分面积为：$\pi(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2\times 2+\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\pi=2$，

（利用例题 5 铺垫中的结论，阴影面积等同于正方形 $ABCD$ 的面积，可立即得到结果）则 $P_1=\dfrac{2}{\pi+2}$，

$P_2=\dfrac{\pi}{\pi+2}$，故 $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{2}{\pi}$

2.（育才半期）

如图，$Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$BC=8$．分别以 $AB$、$AC$、$BC$ 为边在 $AB$ 的同侧作正方形 $ABEF$、$ACPQ$、$BCMN$，四块阴影部分的面积分别为 $S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_4$，则 $S_1+S_2+S_3+S_4=$________.




【解析】过 $F$ 作 $AM$ 的垂线交 $AM$ 于 $D$，

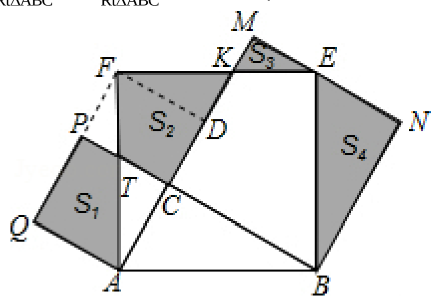
可证明 $\mathrm{Rt\Delta ADF}\cong\mathrm{Rt\Delta ABC}$，$\mathrm{Rt\Delta DFK}\cong\mathrm{Rt\Delta CAT}$，$\therefore S_2=S_{\mathrm{Rt\Delta ABC}}$．

由 $\mathrm{Rt\Delta DFK}\cong\mathrm{Rt\Delta CAT}$ 可进一步证得：$\mathrm{Rt\Delta FPT}\cong\mathrm{Rt\Delta EMK}$，$\therefore S_3=S_{\Delta FPT}$，

又可证得 $\mathrm{Rt\Delta AQF}\cong\mathrm{Rt\Delta ACB}$，$\therefore S_1+S_3=S_{\mathrm{Rt\Delta AQF}}=S_{\mathrm{Rt\Delta ABC}}$．

易证 $\mathrm{Rt\Delta ABC}\cong\mathrm{Rt\Delta EBN}$，$\therefore S_4=S_{\mathrm{Rt\Delta ABC}}$，

$\therefore S_1+S_2+S_3+S_4=(S_1+S_3)+S_2+S_4=S_{\mathrm{Rt\Delta ABC}}+S_{\mathrm{Rt\Delta ABC}}+S_{\mathrm{Rt\Delta ABC}}=S_{\mathrm{Rt\Delta ABC}}\times 3=60$．

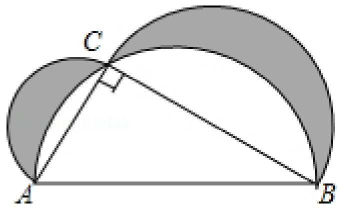


# 笔记整理

# 第三讲课后练习

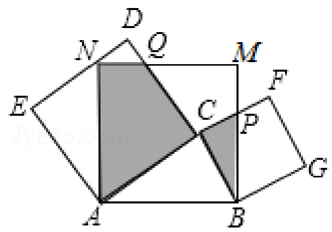
1.

（1）已知在△*ABC* 中，∠*C*=90°，*AC*=3，*BC*=4，分别以 *AC*、*BC*、*AB* 为直径作半圆， 如图所示， 则阴影部分的面积是____.




【答案】1

（2）如图，*Rt*△*ABC* 中，∠*ACB*=90°，*AC*=4，*BC*=3，以 *AB*，*BC*，*AC* 为边在 *AB* 同侧作正方形 *ABMN*，正方形 *ACDE* 和正方形 *BCFG*，其中线段 *DE* 经过点 *N*，*CF* 与 *BM* 交于点 *P*，*CD* 与 *MN* 交于点 *Q*，图中阴影部分的面积为_____.




【解析】如图，∵四边形 *ABCD* 是正方形，

$\therefore \angle ABP = \angle M = \angle ACB = 90^\circ$， $AB = BM$，

$\therefore \angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$， $\angle ABC + \angle MBQ = 90^\circ$，

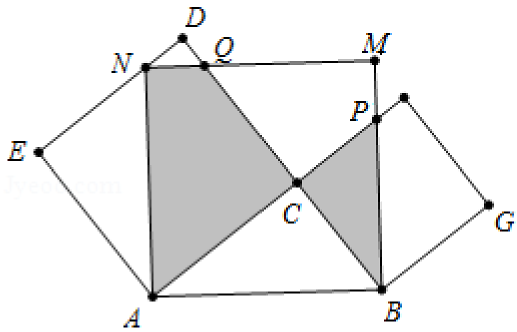
$\therefore \angle MBQ = \angle BAP$，

$\therefore \Delta MBQ \cong \Delta BAP$，

$\therefore S_{\Delta MBQ} = S_{\Delta BAP}$，

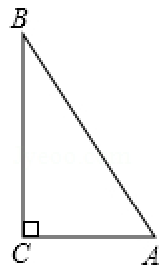
$\therefore S_{\Delta ABC} = S_{四边形QCPM}$，

$\therefore S_{阴} = S_{正方形ABMN} - 2S_{\Delta ABC} = 25 - 12 = 13$，



2.

（1）如图，△$ABC$ 中，∠$C$=90°，$AC+BC=6$，△$ABC$ 的面积为 $\frac{11}{4}cm^2$，则斜边 $AB$ 的长是__________$cm$




【答案】5

（2）在△$ABC$ 中，$AB=\sqrt{34}$，$AC$=5，若 $BC$ 边上的高等于 3，则 $BC$ 边的长为____.
【答案】9 或 1

（3）在△$ABC$ 中，$AB$=15，$AC$=13，高 $AD$=12，则△$ABC$ 的周长为_______.
【答案】32 或 42

（4）在△$ABC$ 中，$AB=\sqrt{34}$，$AC$=5，若 $BC$ 边上的高等于 3，则 $BC$ 边的长为____.
【解析】有两种情况：

①如图 1，$\because AD$ 是 $\Delta ABC$ 的高，$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$，

由勾股定理得：$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}=5$，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\therefore BC=BD+CD=5+4=9$；

②如图 2，同理得：$CD=4$，$BD=5$，$\therefore BC=BD-CD=5-4=1$，

综上所述，$BC$ 的长为 9 或 1；

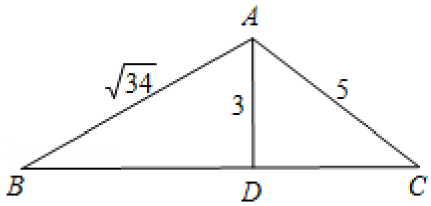



图1

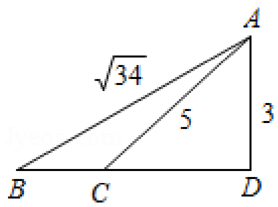
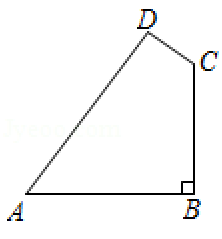



图2

3.

如图，某开发区有一块四边形空地 $ABCD$，现计划在空地上种植草皮，经测量，∠$B$=90°，$AB$=20$m$,，$BC$=15$m$，$CD$=7$m$，$AD$=24$m$．若每平方米草皮需要 200 元，则种植这片草皮需要多少元？



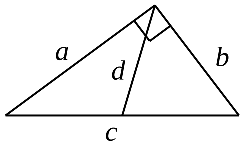
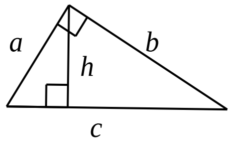

【答案】 46800 元

# 第四讲、解三角形

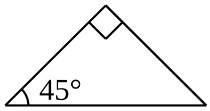
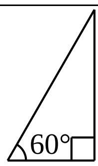
## 模块一、特殊直角三角形

### 知识集锦

**1．直角三角形中的特殊线：**

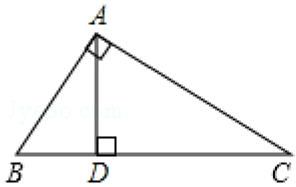
| | |
|---|---|
|   “直角三角形斜边中线$d=\frac{c}{2}$” |   “直角三角形斜边高$h=\frac{ab}{c}$” |

**2．特殊直角三角形的三边关系：**

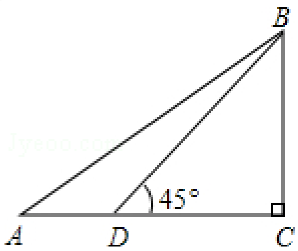
| | |
|---|---|
|   “等腰直角三角形” |   “含30°和60°的直角三角形” |
| 边的比：$1:1:\sqrt{2}$ | 边的比：$1:\sqrt{3}:2$ |

【例1】

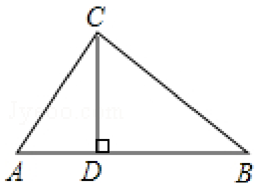
1．如图，△*ABC*中，∠*BAC*=90°，*AD*是△*ABC*的高，∠*C*=30°，*BC*=4，求*BD*的长．



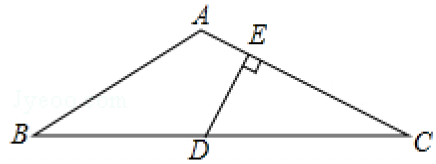

2．如图，△*ABC*中，∠*C*=90°，点*D*在*AC*上，已知∠*BDC*=45°，$BD=10\sqrt{2}$，*AB*=20．求*AC*的长．




3．如图，在△*ABC*中，*CD*⊥*AB*于*D*，∠*A*=60°，∠*B*=45°，*BC*=4，
（1）求*CD*的长；（2）求*AB*的长．



4．如图，△*ABC* 中，*AB*=*AC*，∠*BAC*=120°，*D* 为 *BC* 的中点，*DE*⊥*AC* 于 *E*，*AE*=1，求 *CE* 的长．

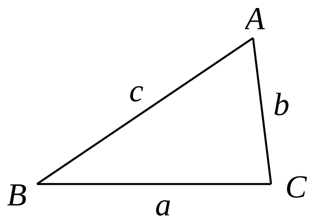



【答案】1．1；2．$10\sqrt{3}$；3．（1）$2\sqrt{2}$ （2）$\dfrac{2\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3}$；4．3.

# 模块二、解三角形

## 知识集锦

一般地，把三角形的三个角 *A*，*B*，*C* 和它们的对边 *a*，*b*，*c* 叫做三角形的元素.




解三角形

1．定义：由三角形的已知元素，求出所有未知元素的过程

2．本质：与全等本质相同，由三个元素推导另外三个元素（已知三个角除外）

3．依据

①角角关系：三角形内角和为 180°，直角三角形的两锐角互余

②边边关系：勾股定理

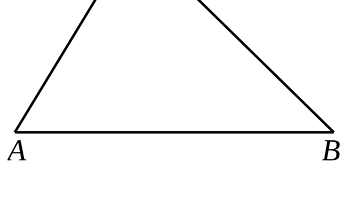
③边角关系：特殊直角三角形

4．方法：做垂线，注意保留特殊角（大于 90°的特殊角为其邻补角）和已知边

【例2】

1．已知三角形 *ABC* 的三边长分别为 5，7，8，求该三角形的面积.

2. 如图，已知在△*ABC* 中，$AB=1+\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{6}$，*AC*=2，求∠*A* 和∠*B* 的值.




1．

【答案】$10\sqrt{3}$

2．

【答案】见解析

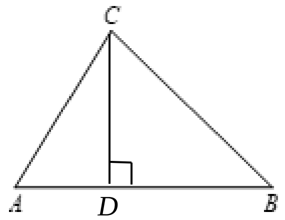
【解析】过 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于 $D$，设 $AD=x$，$BD=1+\sqrt{3}-x$

$\because CD^2=AC^2-AD^2$　$CD^2=BC^2-BD^2$，$\therefore AC^2-AD^2=BC^2-BD^2$

$4-x^2=6-\left(1+\sqrt{3}-x\right)^2$

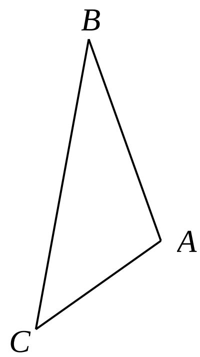
$x=1$

$\therefore AD=1$，$BD=\sqrt{3}$，$\therefore \angle A=60^\circ$，$\angle B=45^\circ$

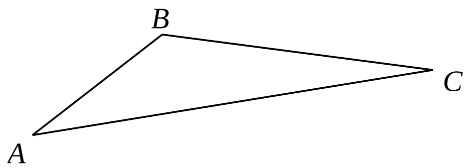



【例3】

1．在△$ABC$ 中，$AB$=3，$BC=4\sqrt{3}$，∠ $ABC$=30° 求 $AC$ 的长．




2．在△$ABC$ 中，$AB$=3，$BC=3\sqrt{2}$，∠ $ABC$=135° ，求 $AC$ 的长．




1．

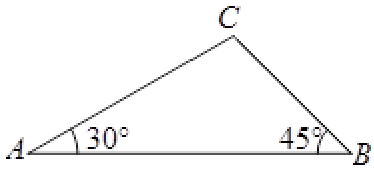
【答案】$AC=\sqrt{21}$

2．

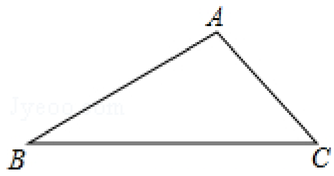
【答案】$3\sqrt{5}$

【例4】

1． 如图所示，在△$ABC$ 中，∠$A$=30°，∠$B$=45°，$AC=2\sqrt{3}$ 求 $AB$，$BC$ 的值．




2． 已知：如图，在△$ABC$ 中，∠$A$=105°，∠$B$=30°，$AC$=2．求 $BC$ 与 $AB$ 的长．




1．

【答案】$AB=3+\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{6}$

2．

【答案】$BC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{2}$

【例5】

1． 在△$ABC$ 中，∠$A$=30°，$AC$=40，$BC$=25，求 $AB$ 的长.

2．在等腰△$ABC$ 中，∠$A$=30°，$AB$=8，则该等腰三角形腰上的高为________.

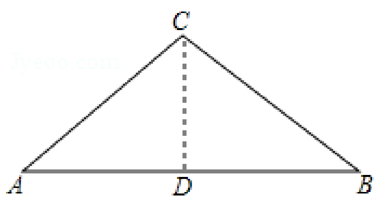
1.【答案】见解析

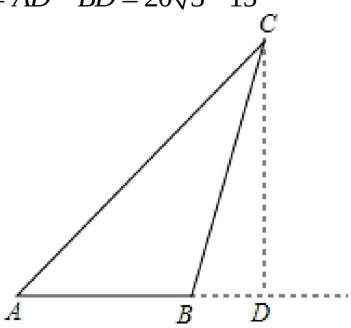
【解析】作 $CD\perp AB$．$\because \angle A=30^\circ$，$\therefore CD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 40=20$，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=20\sqrt{3}$，

$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=15$．

情况一：当 $\angle ACB$ 为钝角时，$AB=AD+BD=20\sqrt{3}+15$

情况二：当 $\angle ACB$ 为锐角时，$AB=AD-BD=20\sqrt{3}-15$



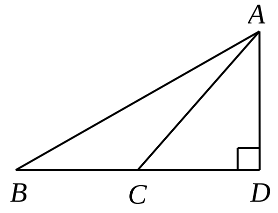




2.

【答案】$4\sqrt{3}$ 或 4

【例6】

（石室联中期末）如图，△$ABD$中$\angle D$=90°，$C$是$BD$上一点，已知$CB$=9，$AB$=17，$AC$=10，则$DC$=______，$AD$=_________.

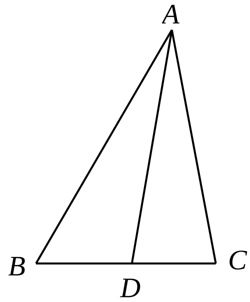



【答案】见解析

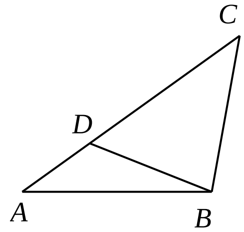
【解析】设$CD$=$x$，由$AD^2=AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$可得$CD=6$，$AD=8$

【例7】

1．如图，在△$ABC$中，∠$B$=60°，$AB$=8，点$D$在$BC$上，$AD$=7，若$CD$=2，求线段$AC$的长度.




2．如图，在△$ABC$中，$\angle C=45°$，$AB$=7，点$D$在$AC$上，$AD$=3，$BD$=5，求线段$BC$的长度.




1.

【答案】7

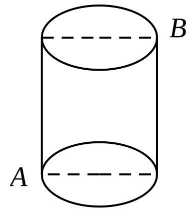
2.

【答案】$\frac{5}{2}\sqrt{6}$

# 模块三、勾股定理的应用

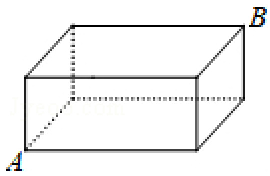
【例8】

1.（树德半期）如图，一圆柱高 8$cm$，底面半径为$\frac{6}{\pi}cm$，一只蚂蚁从点 $A$ 爬到点 $B$ 处吃食，要爬行的最短路程是（　　）




$A$．6$cm$　　　$B$．8$cm$　　　$C$．10$cm$　　　$D$．12$cm$

2．如图，一只小蚂蚁要从 $A$ 点沿长方体木块表面爬到 $B$ 点处吃蜜糖．已知长方体木块的长、宽、高分别为 10$cm$、8$cm$、6$cm$，则小蚂蚁爬行的最短距离_________$cm$．




1.

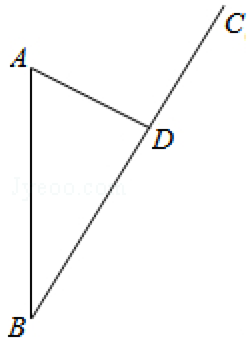
【答案】$C$

2.

【答案】$2\sqrt{74}$

【例9】

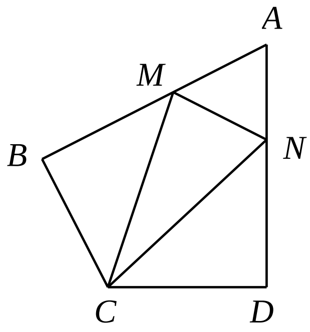
沿海城市 $A$ 接到台风警报，在该市正南方向 130$km$ 的 $B$ 处有一台风中心，沿 $BC$ 方向以 15$km/h$ 的速度向 $D$ 移动，已知城市 $A$ 到 $BC$ 的距离 $AD$=50$km$，那么台风中心经过多长时间从 $B$ 点移到 $D$ 点？如果在距台风中心 30$km$ 的圆形区域内都将有受到台风的破坏的危险，正在 $D$ 点休闲的游人在接到台风警报后的几小时内撤离才可脱离危险？




【答案】6

## 巅峰挑战

（师大一中半期）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=6$，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=60°$，点 $M$，$N$ 分别在 $AB$、$AD$ 边上，若 $AM:MB=AN:ND=1:2$，则 $M$ 到 $CN$ 的距离是__________.




【解析】$\because AB=AD=6$，$AM:MB=AN:ND=1:2$，$\therefore AM=AN=2$，$BM=DN=4$，连接 $AC$，

$\because AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=60°$ 在 Rt△ABC 与 Rt△ADC 中，$\begin{cases}AB=AD\\AC=AC\end{cases}$，

$\therefore$ Rt△ABC≌Rt△ADC(HL)，

$\therefore \angle BAC=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAD=30°$，$MC=NC$，$\therefore BC=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore AC^2=BC^2+AB^2$，即 $(2BC)^2=BC^2+AB^2$，$3BC^2=AB^2$，$\therefore BC=2\sqrt{3}$，

在 Rt△BMC 中，$CM=\sqrt{BM^2+BC^2}=2\sqrt{7}$，$\because AN=AM$，$\angle MAN=60°$，

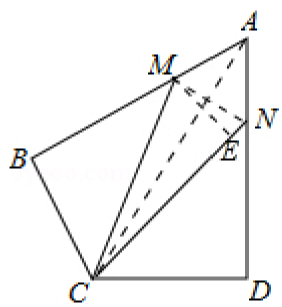
$\therefore$ △$MAN$ 是等边三角形，$\therefore MN=AM=AN=2$，

过 $M$ 点作 $ME\perp CN$ 于 $E$，设 $NE=x$，则 $CE=2\sqrt{7}-x$，

$\therefore MN^2-NE^2=MC^2-EC^2$，即 $4-x^2=(2\sqrt{7})^2-(2\sqrt{7}-x)^2$，解得：$x=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore EC=2\sqrt{7}-\frac{\sqrt{7}}{7}=\frac{13\sqrt{7}}{7}$，

由勾股定理得：$ME=\sqrt{MC^2-CE^2}=\sqrt{(2\sqrt{7})^2-(\frac{13\sqrt{7}}{7})^2}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$，$M$ 到 $CN$ 的距离是 $\frac{3\sqrt{21}}{7}$

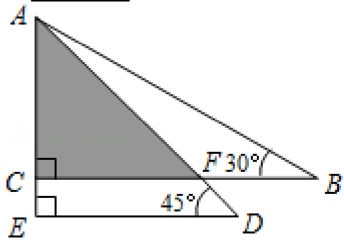


# 笔记整理

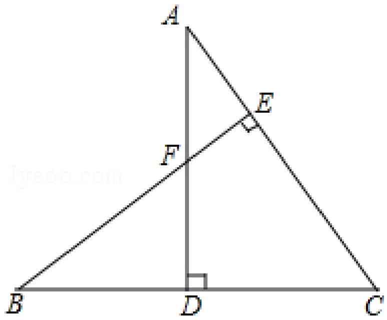
# 课后练习

1．

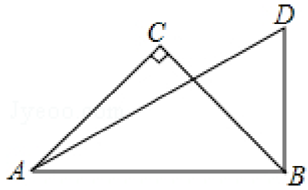
（1）将一副三角尺如图方式叠放在一起， 若 $AB$=20$cm$，则阴影部分面积是________ $cm^2$ .




（2）如图，$AD\perp BC$，$BE\perp AC$，$\angle C$=60°，$AF$=4，$DF$=6，求 $BE$ 的长.




（3）已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C$=90°，$AC$=$BC$，$BD\perp AB$，$\angle BAD$=30°，若 $AD$=8，求 $AC$ 的长.




(1)

【答案】50

(2)

【答案】见解析

【解析】$\because AD\perp BC$， $BE\perp AC$，

$\therefore \angle ADC=\angle ADB=\angle BEC=90^\circ$，

$\because \angle C=60^\circ$，

$\therefore \angle A=90^\circ-\angle C=30^\circ$， $\angle B=90^\circ-\angle C=30^\circ$，

$\because AF=4$， $DF=6$，

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}AF=2$， $BF=2DF=12$，

$\therefore BE=BF+EF=12+2=14$.

(3)

【答案】见解析

【解析】解：在 Rt△ABD 中， $AB=AD\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$，

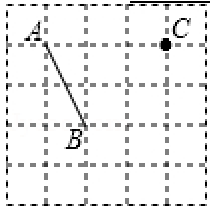
$\because \angle C=90^\circ$， $AC=BC$，

$\therefore \triangle ACB$ 是等腰直角三角形，

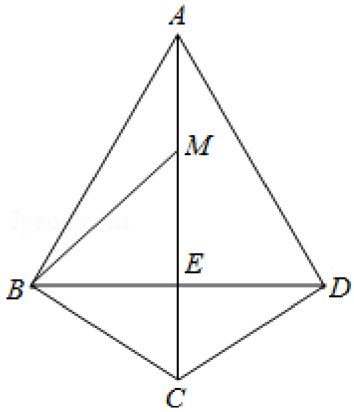
$\therefore AC=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$.

2．

（1）点$A$、$B$、$C$在格点图中的位置如图所示，格点小正方形的边长为1，则点$C$到线段$AB$的距离是______．




（2）如图，在四边形$ABCD$中，$AB$=$AD$，$\angle BAD$=60°，$\angle BCD$=120°，连接$AC$，$BD$交于点$E$．若$BC$=$CD$=2，$M$为线段$AC$上一点，且$AM:CM=1:2$，连接$BM$，求点$C$到$BM$的距离．




(1)

【答案】$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

(2)

【答案】见解析

【解析】解：$\because AB=AD$，$\angle BAD=60°$，

$\therefore \triangle ABD$是等边三角形，$\therefore \angle ABD=\angle ADB=60°$．

$\because BC=CD$，$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$，

$\therefore \angle BAC=\angle DAC=30°$，$\angle ACB=\angle ACD=60°$．

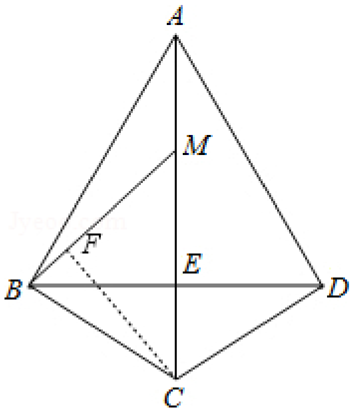
$\therefore \angle AEB=\angle BEC=90°$，$\angle ABC=90°$，

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}BC=1$，$BE=\sqrt{3}$，$AC=2BC=4$．

$\because AM:CM=1:2$，$\therefore AM=\dfrac{4}{3}$，$CM=\dfrac{8}{3}$，

$\therefore EM=\dfrac{5}{3}$，在Rt△BEM中由勾股定理得

$BM=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\dfrac{5}{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$．



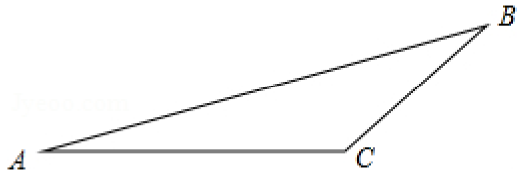

过点$C$作$CF\perp BM$于点$F$．$\therefore \dfrac{BM\bullet CF}{2}=\dfrac{CM\bullet BE}{2}$，

$\therefore \dfrac{\dfrac{2\sqrt{13}}{3}CF}{2}=\dfrac{\dfrac{8}{3}\times\sqrt{3}}{2}$，

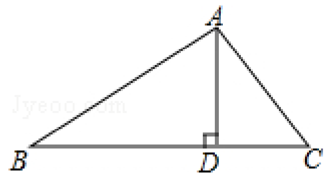
$\therefore CF=\dfrac{4\sqrt{39}}{13}$，即点$C$到$BM$的距离$\dfrac{4\sqrt{39}}{13}$．

3.

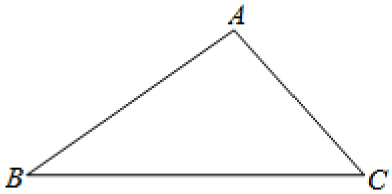
(1). 如图所示，在△*ABC* 中，∠*C*=135°，$BC=\sqrt{2}$，*AC*=2，求 *AB* 的长.



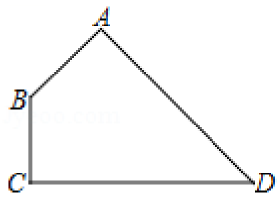

(2). 在△*ABC* 中，*AD* 是高，∠*C*=45°，$AC=3\sqrt{2}$，*BD*=4，求 *AB* 的长.




(3). 已知，如图，在△*ABC* 中，∠*A*=105°，∠*B*=30°，$BC=2+2\sqrt{3}$，求△*ABC* 的面积 .




(4). 如图， 四边形 *ABCD* 中，∠*A*=∠*C*=90°， ∠*ABC*=135°，*CD*=6，*AB*=2，则四边形 *ABCD* 的面积为__________.




(1)

【答案】见解析

【解析】如图，作 $BD\perp AC$ 交 $AC$ 的延长线于 $D$，

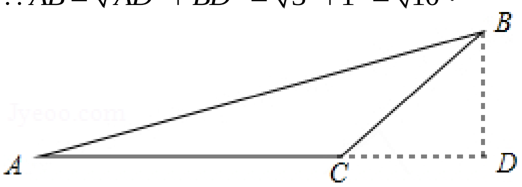
$\because \angle ACB=135°$， $\therefore \angle BCD=45°$，

在 Rt△BCD 中， $BC=\sqrt{2}$， $\angle BCD=45°$，

$\therefore CD=BD=BC\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$，

在 Rt△ABD 中 $AD=AC+CD=2+1=3$， $BD=1$

$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.




(2)

【答案】见解析

【解析】$\because AD\perp BC$， $\angle C=45°$， $AC=3\sqrt{2}$，

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore 2AD^2=AC^2$， 即 $2AD^2=(3\sqrt{2})^2$， 解得 $AD=3$.

在 Rt△ABD 中，

$\because BD=4$， $AD=3$，

$\therefore AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

(3)

【答案】见解析

【解析】如图， 过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于 $D$,

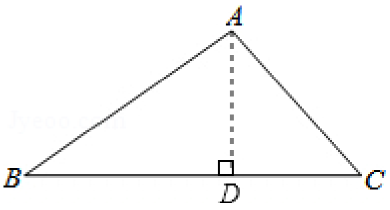
$\because \angle BAC=105°$， $\angle B=30°$， $\therefore \angle C=45°$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACD$ 中， $AD=CD$， 在 $Rt\triangle ABD$ 中， $BD=\sqrt{3}AD$，

$\because BC=BD+CD=2+2\sqrt{3}$， $AD=CD$，

$\therefore \sqrt{3}AD+AD=2+2\sqrt{3}$， $\therefore AD=2$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\bullet AD=\dfrac{1}{2}\times(2+2\sqrt{3})\times 2=2+2\sqrt{3}$ .




(4)

【答案】16

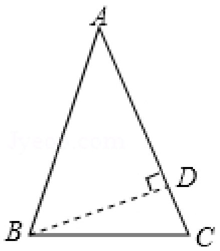
4．

在等腰三角形 $ABC$ 中，$\angle A$=30°，$AB$=6$cm$，则△$ABC$ 的面积为________.

【解析】当 $\angle A$ 是顶角时，

过 $B$ 作 $BD\perp AC$ 于 $D$，$\because \angle ADB=90°$， $\angle A=30°$， $AB=AC=6cm$，

$\therefore BD=\dfrac{1}{2}AB=3cm$， $\therefore \triangle ABC$ 的面积为： $\dfrac{1}{2}AC\times BD=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3=9(cm^2)$；



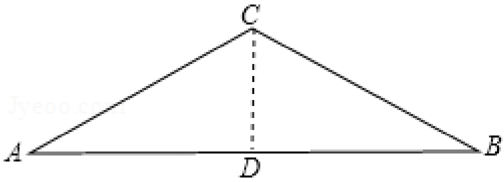

当 $\angle A$ 为底角时，

①如果 $AC=BC$，

则 $\angle B=\angle A=30°$，如图，过 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于 $D$，

$\because AC=BC$， $\therefore AD=BD=\dfrac{1}{2}AB=3cm$， $\therefore CD=3cm\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}cm$，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积是： $\dfrac{1}{2}AB\times CD=\dfrac{1}{2}\times 6cm\times\sqrt{3}cm=3\sqrt{3}cm^2$；

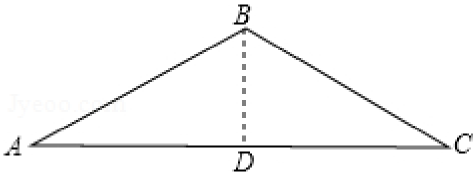



②如果 $AB=BC$，

则 $\angle A=\angle C=30°$，如图， 过 $B$ 作 $BD\perp AC$ 于 $D$，$\because AB=6cm$， $\therefore BD=\dfrac{1}{2}AB=3cm$，

由勾股定理得： $AD=3\sqrt{3}cm$， $\because AB=BC$， $BD\perp AC$， $\therefore AC=2AD=6\sqrt{3}cm$，

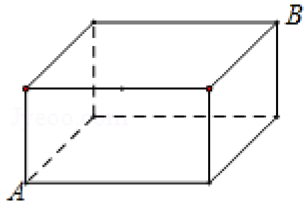
$\therefore \triangle ABC$ 的面积是：$\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}cm\times 3cm=9\sqrt{3}cm^2$；



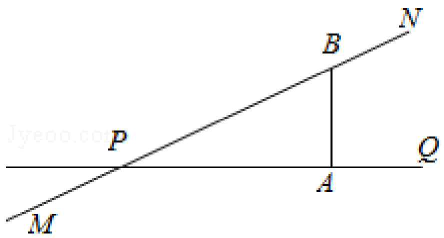

故答案为：$9cm^2$ 或 $3\sqrt{3}cm^2$ 或 $9\sqrt{3}cm^2$．

5.

（1）如图是一块长、 宽、 高分别为 $4cm$、$2cm$ 和 $1cm$ 的长方体木块， 一只蚂蚁要从长方体木块的一个顶点 $A$ 处， 沿着长方体木块的表面爬到长方体木块上和顶点 $A$ 相对的顶点 $B$ 处吃食物， 那么它需要爬行的最短路径的长是_______.




（2）公路 $MN$ 和公路 $PQ$ 在点 $P$ 处交汇，点 $A$ 处有一所中学，$PA$=120 米，$AB=40\sqrt{3}$ 米 且 $PA\perp AB$．假设拖拉机行驶时，周围 100 米以内会受到噪声的影响，那么拖拉机在公路 $MN$ 上沿 $PN$ 方向行驶时，学校是否会受到噪声影响？说明理由：如果受影响，已知设拖拉机速度为 5 米 / 秒，那么学校受影响的时间为多少秒？




(1)

【答案】$5cm$

(2)

【答案】见解析

【解析】作 $AC\perp MN$ 于 $C$,

$\because PA=120$ 米， $AB=40\sqrt{3}$ 米且 $PA\perp AB$，

$\therefore BP=\sqrt{120^2+(40\sqrt{3})^2}=80\sqrt{3}$ 米，

$AC=120\times 40\sqrt{3}\div 80\sqrt{3}=60$ 米，

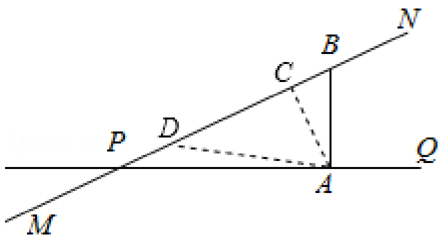
$\because 60$ 米 $<100$ 米，

$\therefore$ 学校会受到噪声的影响；

$\therefore CD=\sqrt{100^2-60^2}=80$ 米，

$\therefore$ 学校受影响的时间为 $80\times 2\div 5=32$ 秒

故学校受影响的时间为 32 秒.

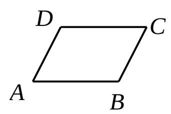


# 第五讲、平行四边形

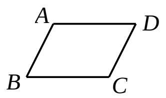
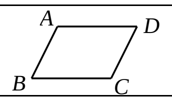
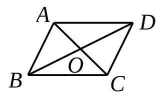
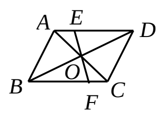
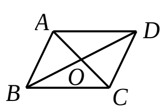
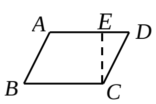
## 模块一、平行四边形的定义及性质

### 知识集锦

**1.平行四边形的定义和表示：**

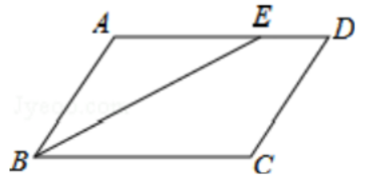
| | | |
|---|---|---|
| **平行四边形：**两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形（如图），记作“$\square ABCD$”.<br>**平行四边形的表示：**一般按一定的方向依次表示各顶点，如右图的平行四边形不能表示成$\square ACBD$，也不能表示成$\square ADBC$. |  | $\left.\begin{array}{l}AB \parallel CD\\ AD \parallel BC\end{array}\right\}\Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 叫做平行四边形 |

**2.平行四边形的性质：**

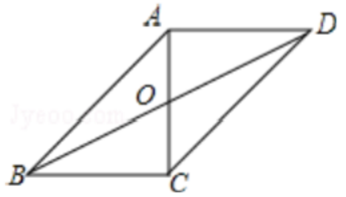
| | | |
|---|---|---|
| ①平行四边形的对边平行且相等 |  | 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 $\Rightarrow AB \underline{\underline{\parallel}} CD$，$AD \underline{\underline{\parallel}} BC$. |
| ②平行四边形的对角相等； |  | 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 $\Rightarrow \angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$. |
| ③平行四边形的对角线互相平分 |  | 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 $\Rightarrow OA = OC$，$OB = OD$. |
| ④平行四边形是中心对称图形，对称中心就是两条对角线的交点；连接四边上任意一点和平行四边形的对称中心，与另一条边相交于一点，则这两个点关于平行四边形的对称中心对称；并且这条线段将平行四边形面积分成相等的两部分. |  | 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$E$、$F$ 在 $AD$，$BC$ 上，且线段 $EF$ 过点 $O \Rightarrow OE = OF$；<br>$S_{四边形ABFE} = S_{四边形CDEF}$. |
| ⑤平行四边形中重要结论： |  | $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle DOC} = S_{\triangle DOA}$<br>$\triangle AOB \cong \triangle COD$<br>$\triangle AOD \cong \triangle COB$<br>$\triangle ABC \cong \triangle CDA$<br>$\triangle BCD \cong \triangle DAB$ |
| ⑥平行四边形的面积 |  | $S_{\square ACBD}$=$AD \times EC$；<br>平行四边形面积=底×高 |

【例1】

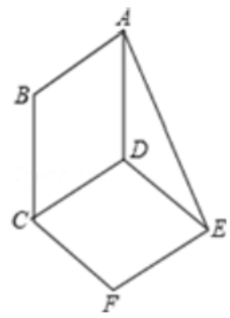
1. 如图，在▱ $ABCD$ 中，$BE$ 平分∠$ABC$，$BC$=6，$DE$=2，则▱ $ABCD$ 的周长等于_______.




2. 如图，在▱ $ABCD$ 中，点 $O$ 是对角线 $AC$、$BD$ 的交点，$AC$ 垂直于 $BC$，且 $AB$=10$cm$，$AD$=8$cm$，则 $OB$=_______$cm$.




3. 如图，▱ $ABCD$ 与▱ $DCFE$ 的周长相等，且∠$BAD$=60°，∠$F$=110°，则∠$DAE$ 的度数为_______.




4. 在▱$ABCD$ 中，$AD$=$BD$，$BE$ 是 $AD$ 边上的高，∠$EBD$=20°，则∠$A$ 的度数为_______.

1.

【答案】20

2.

【答案】$\sqrt{73}$

3.

【答案】25°

4.

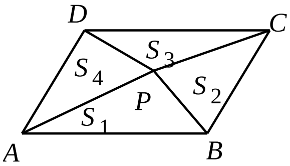
【答案】35°或 55°

【例2】

1. 如图，▱$ABCD$中，$P$是四边形内任意一点，$\triangle ABP$，$\triangle BCP$，$\triangle CDP$，$\triangle ADP$的面积分别为$S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_4$，则一定成立的是（　　）

$A$．$S_1+S_2>S_3+S_4$　　　　$B$．$S_1+S_2=S_3+S_4$

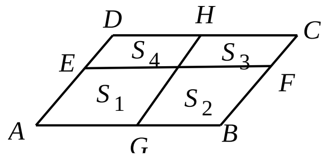
$C$．$S_1+S_2<S_3+S_4$　　　　$D$．$S_1+S_3=S_2+S_4$



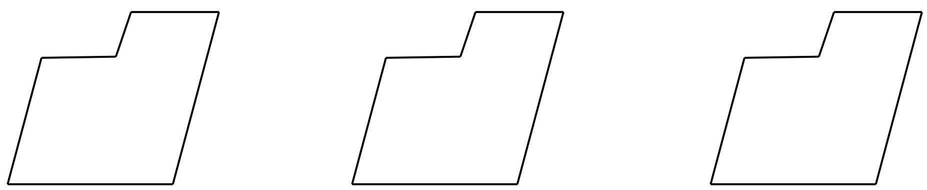

2. 如图，▱$ABCD$中，平行于边的两条线段$EF$，$GH$把▱$ABCD$分成四部分，分别记这四部分的面积为$S_1$，$S_2$，$S_3$和$S_4$，则下列等式一定成立的是（　　）

$A$．$S_1=S_3$　　　　$B$．$S_1+S_3=S_2+S_4$

$C$．$S_3-S_1=S_2-S_4$　　　　$D$．$S_1\times S_3=S_2\times S_4$




3．现有如图的铁片，其形状是一个大的平行四边形在一角剪去一个小的平行四边形，工人师傅想用一条直线将其分割成面积相等的两部分，请你帮助师傅设计三种不同的分割方案．



1.

【答案】$D$

2.

【答案】$D$

3.

【答案】如图所示2，3，4所示：

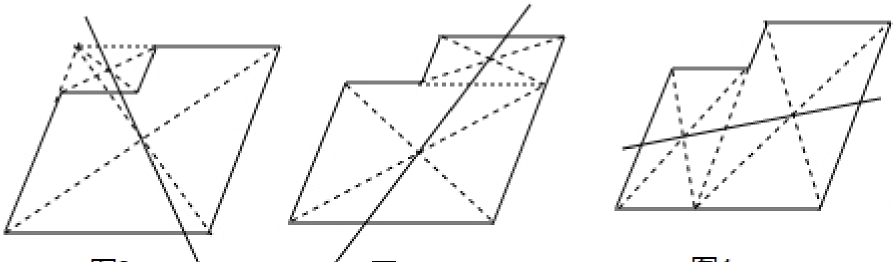
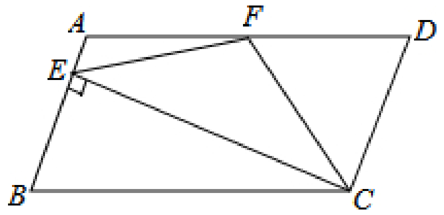


图2　　图3　　图4

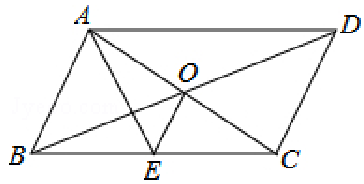
【例3】

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=2AB$，$F$ 是 $AD$ 的中点，作 $CE\perp AB$，垂足 $E$ 在线段 $AB$ 上，连接 $EF$、$CF$，则下列结论中一定成立的是___________.

①$\angle DCF=\dfrac{1}{2}\angle BCD$；②$EF=CF$；③$S_{BEC}=2S_{CEF}$；④$\angle DFE=3\angle AEF$




2. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 交于点 $O$，$AE$ 平分 $\angle BAD$ 交 $BC$ 于点 $E$，且 $\angle ADC=60°$，$AB=\dfrac{1}{2}BC$，连接 $OE$. 下列结论：①$\angle CAD=30°$；②$S_{▱ABCD}=AB\cdot AC$；③$OB=AB$；④$OE=\dfrac{1}{4}BC$，其中成立的是_________________.




1.

【答案】见解析

【解析】①②④

①$\because F$ 是 $AD$ 的中点，$\therefore AF=FD$，$\because$ 在▱$ABCD$ 中，$AD=2AB$，$\therefore AF=FD=CD$，$\therefore \angle DFC=\angle DCF$，

$\because AD//BC$，$\therefore \angle DFC=\angle FCB$，$\therefore \angle DCF=\angle BCF$，$\therefore \angle DCF=\dfrac{1}{2}\angle BCD$，故此选项正确；

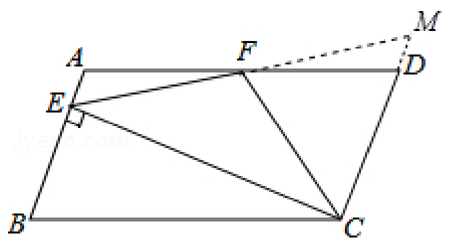
②延长 $EF$，交 $CD$ 延长线于 $M$，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB//CD$ $\therefore \angle A=\angle MDF$，$\because F$ 为 $AD$ 中点，$\therefore AF=FD$，

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DFM$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle FDM\\ AF=DF\\ \angle AFE=\angle DFM\end{cases}$，$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DMF(ASA)$，

$\therefore FE=MF$，$\angle AEF=\angle M$，$\because CE\perp AB$，$\therefore \angle AEC=90°$，$\therefore \angle AEC=\angle ECD=90°$，$\because FM=EF$，$\therefore FC=FM$，故②正确；

③$\because EF=FM$，$\therefore S_{\triangle EFC}=S_{\triangle CFM}$，$\because MC>BE$，$\therefore S_{\triangle BEC}<2S_{\triangle EFC}$ 故 $S_{\triangle BEC}=2S_{\triangle CEF}$ 错误；

④设 $\angle FEC=x$，则 $\angle FCE=x$，$\therefore \angle DCF=\angle DFC=90°-x$，$\therefore \angle EFC=180°-2x$，$\therefore \angle EFD=90°-x+180°-2x=270°-3x$，$\because \angle AEF=90°-x$，$\therefore \angle DFE=3\angle AEF$，故此选项正确.



2.

【答案】见解析

【解析】①②④

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 60°$，$\angle BAD = 120°$，$\because AE$ 平分 $\angle BAD$，

$\therefore \angle BAE = \angle EAD = 60°$ $\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形，$\therefore AE = AB = BE$，$\because AB = \frac{1}{2}BC$，$\therefore AE = \frac{1}{2}BC$，

$\therefore \angle BAC = 90°$，$\therefore \angle CAD = 30°$，故①正确；

$\because AC \perp AB$，$\therefore S_{▱ABCD} = AB \cdot AC$，故②正确，

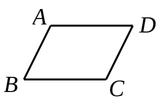
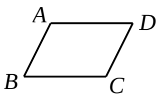
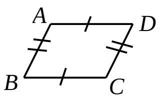
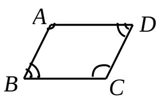
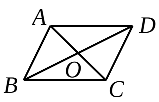
$\because AB = \frac{1}{2}BC$，$OB = \frac{1}{2}BD$，$\because BD > BC$，$\therefore AB \neq OB$，故③错误；

$\because CE = BE$，$CO = OA$，$\therefore OE = \frac{1}{2}AB$，$\therefore OE = \frac{1}{4}BC$，故④正确.

# 模块二、平行四边形的判定

## 知识集锦

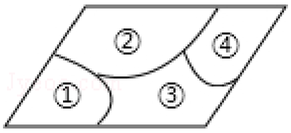
**平行四边形的判定：**

| | | |
|---|---|---|
| ①定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形 |  | $\left.\begin{matrix} AD \parallel BC \\ AB \parallel CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 |
| ②一组对边平行且相等的四边形是平行四边形 |  | $\left.\begin{matrix} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 |
| ③两组对边分别相等的四边形是平行四边形 |  | $\left.\begin{matrix} AB = CD \\ AD = BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 |
| ④两组对角分别相等的四边形是平行四边形 |  | $\left.\begin{matrix} \angle A = \angle C \\ \angle B = \angle D \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 |
| ⑤对角线互相平分的四边形是平行四边形 |  | $\left.\begin{matrix} OA = OC = \frac{1}{2}AC \\ OB = OD = \frac{1}{2}BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 |

【例4】

1. 小敏不慎将一块平行四边形玻璃打碎成如图的四块，为了能在商店配到一块与原来相同的平行四边形玻璃，他带了两块碎玻璃，其编号应该是（　　）

*A*．①，②　　*B*．①，④　　*C*．③，④　　*D*．②，③




2．已知四边形 *ABCD*，从下列条件中：①$AD//BC$；②$AB//CD$；③$AB=CD$；④$AD=BC$；⑤$\angle A=\angle C$；⑥$\angle B=\angle D$；任取其中两个，可以得出“四边形 *ABCD* 是平行四边形 *ABCD*”这一结论的的情况有（　　）

*A*．4 种　　*B*．9 种　　*C*．13 种　　*D*．15 种

1.

【答案】*D*

2.

【答案】*B*

【例5】

对于下列说法，正确的请给出证明，错误的请举出反例.

（1）一组对边平行，一组对角相等的四边形是平行四边形.

（2）一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形.

（3）一组对角相等，一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形.

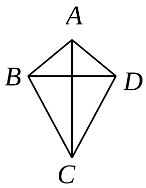
（4）一组对边相等，一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形.

（5）一组对边相等，一组对角相等的四边形是平行四边形.

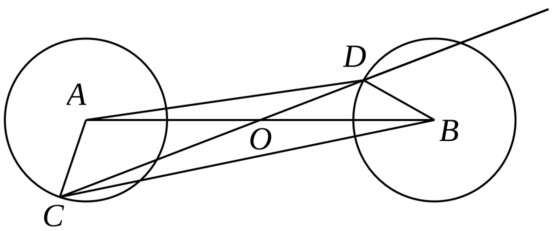
【解析】(1) 正确；

（2）错误；反例：等腰梯形

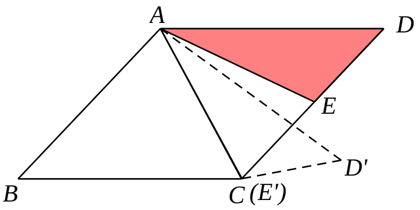
（3）错误；反例：如图，*AC* 垂直平分 *BD*，即满足$\angle ABC=\angle ADC$，但 *ABCD* 不一定是平行四边形（*ABCD* 为筝形）




（4）错误；反例，如图，任作线段 *AB* 并取其中点 *O*，分别以 *A*、*B* 为圆心，作两个半径相等的圆，在圆上任取一点 *C*，连接 *CO* 并延长使之与另一圆交于点 *D*，四边形 *ACBD* 满足条件但显然不是平行四边形

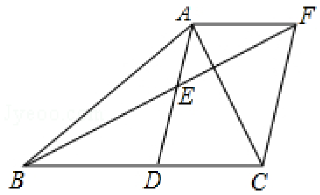



（5）错误；反例，如图，作平行四边形 *ABCD*，以 *A* 为圆心 *AC* 为半径作圆并交 *CD* 于 *E*，从而 *AC*=*AE*，把△*ADE* 绕 *A* 点顺时针旋转使得 *AE* 与 *AC* 重合得到△*AD*’*E*’，则四边形 *ABE*’*D*’满足条件但显然不是平行四边形

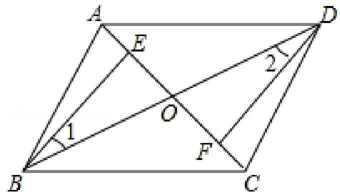



【例6】

1．如图，在$\triangle ABC$中，$AD$是$BC$边的中线，$E$是$AD$的中点，过$A$点作$AF//BC$交$BE$的延长线于点$F$，连接$CF$. 试说明：四边形$ADCF$是平行四边形.




2. 如图，四边形$ABCD$中，对角线$AC$，$BD$相交于点$O$，点$E$，$F$分别在线段$OA$，$OC$上，且$OB=OD$，$\angle 1=\angle 2$，$AE=CF$，证明：四边形$ABCD$是平行四边形.




1.

【答案】见解析

【解析】$\because AF//BC$，$\therefore \angle AFE=\angle EBD$，$\because E$是$AD$的中点，$\therefore AE=DE$，在$\triangle AEF$和$\triangle DEB$中

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle EBD\\ \angle AEF=\angle BED\\ AE=ED\end{cases}，\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEB(AAS)，\therefore AF=BD，$$

$\because AD$是$BC$边的中线，$\therefore BD=CD$，$\therefore AF=DC$又

$\because AF//BC$，$\therefore$四边形$ADCF$是平行四边形.

2.

【答案】见解析

【解析】$\because \angle EOB$与$\angle FOD$是对顶角，$\therefore \angle EOB=\angle FOD$，

在$\triangle BEO$和$\triangle DFO$中$\begin{cases}\angle 1=\angle 2\\ OB=OD\\ \angle EOB=\angle FOD\end{cases}$

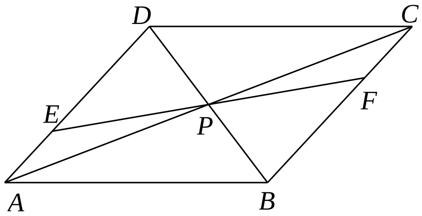
$\therefore \triangle BEO\cong\triangle DFO(ASA)$；$\therefore OE=OF$，

$\because AE=CF$，$\therefore OA=OC$，

$\because OB=OD$，$\therefore$四边形$ABCD$为平行四边形.

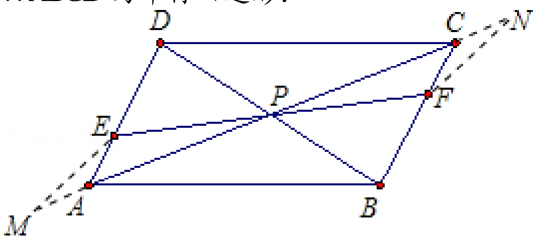
【例7】

如图,四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 交于点 $P$,过点 $P$ 作直线交 $AD$ 于点 $E$,交 $BC$ 于点 $F$. 若 $PE=PF$,且 $AP+AE=CP+CF$ . 求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.




【解析】延长 $AC$,在 $C$ 上方取 $N$,$A$ 下方取 $M$,使 $AM=AE$, $CN=CF$ ,则由已知可得 $PM=PN$ ,易证 $\triangle PME\cong\triangle PNF$ ,且 $\triangle AME$ , $\triangle CNF$ 都是等腰三角形. $\therefore\angle M=\angle N$ , $\angle MEP=\angle NFP$ $\therefore\angle AEP=\angle PFC$ $\therefore AD//BC$ ,可证得 $\triangle PAE\cong\triangle PCF$ ,得 $PA=PC$ ,再证 $\triangle PED\cong\triangle PFB$ . 得 $PB=PD$ .

$\therefore ABCD$ 为平行四边形.

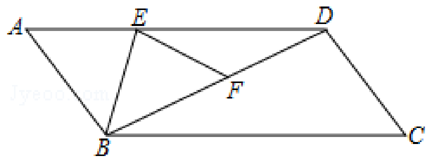


# 笔记整理

# 课后练习

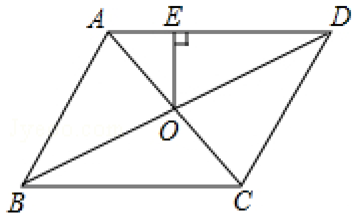
1.

（1）$E$ 为▱$ABCD$ 边 $AD$ 上一点，将△$ABE$ 沿 $BE$ 翻折得到△$FBE$，点 $F$ 在 $BD$ 上，且 $EF=DF$．若∠$C$=52°，那么∠$ABE$=________.



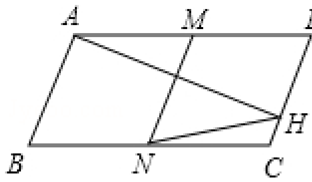

【答案】51°

（2）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB$=4，$BC$=5，∠$ABC$=60°，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 交于点 $O$，过点 $O$ 作 $OE\perp AD$，则 $OE$=________.




【答案】$\sqrt{3}$

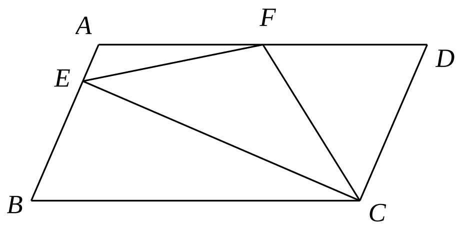
（3）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD$=2$AB$，$AH\perp CD$ 于 $H$，$M$ 为 $AD$ 的中点，$MN$∥$AB$，连接 $NH$，如果∠$D$=68°，则∠$CHN$=________.




【答案】56°

2.

如图，在▱$ABCD$ 中，$AD$=2$AB$，$F$ 是 $AD$ 的中点，作 $CE\perp AB$，垂足 $E$ 在线段 $AB$ 上，连接 $EF$、$CF$，求证（1）$EF$=$CF$（2）$\angle DFE=3\angle AEF$ .




【解析】∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$AB$=$CD$，$AD$∥$BC$，∴∠$DFC$=∠$BCF$，

∵$AD$=2$AB$，$F$ 是 $AD$ 的中点，∴$AF$=$DF$=$CD$，

∴∠$DFC$= ∠$DCF$，

连接 $CF$ 并延长交 $BA$ 的延长线于 $G$，如图所示：

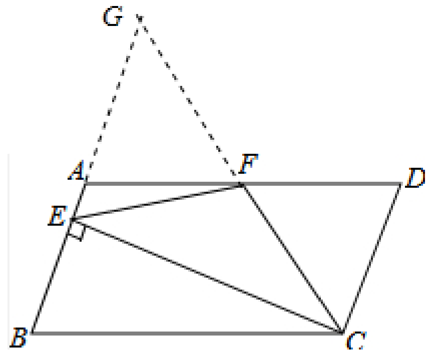
∵$F$ 是 $AD$ 的中点，$AB$∥$CD$，∴$CF$=$GF$，

∵$CE\perp AB$，∴∠$CEG$=90°，∴ $EF=\frac{1}{2}CG=CF=GF$ ，

∵$EF$=$GF$，∴∠$G$=∠$FEG$，

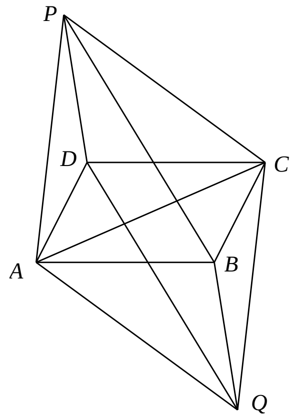
∵$AB$∥$CD$，　∴ $\angle G=\angle DFC=\angle DCF=\angle FEG$ ，

∵ $\angle CFE=\angle G+\angle FEG=2\angle FEG$ ，∠$DFC$=∠$FEG$，∴ $\angle DFE=\angle CFE+\angle DFC=3\angle AEF$ .




3.

如图，已知□$ABCD$，以 $AC$ 为边在两侧各作一个正三角形 $ACP$，$ACQ$．求证：四边形 $BPDQ$ 为平行四边形.




【解析】∵ $\triangle APC$、$\triangle AQC$ 为等边三角形，∴ $\angle PAC=\angle ACQ=60°$，

$AP=CQ=AC$，∴$AP\parallel CQ$，

又∵$ABCD$ 为平行四边形，∴$AD=BC$ 且 $AD\parallel BC$，$\angle DAC=\angle ACB$，

∴ $\angle PAC-\angle DAC=\angle ACQ-\angle ACB$，即：$\angle DAP=\angle QCB$，

在$\triangle DAP$ 和$\triangle QCB$ 中，$AD=BC$，$\angle DAP=\angle QCB$，$AP=CQ$，

∴$\triangle DAP\cong\triangle QCB$，∴$DP=QB$ ①，

同理，$\angle ACP=\angle QAC=60°$，$AQ=PC=AC$，$\angle ACB+\angle ACP=\angle DAC+\angle QAC$，

即：$\angle DAQ=\angle PCB$，

在$\triangle DAQ$ 和$\triangle BCP$ 中，$\angle DAQ=\angle PCB$，$AQ=PC$，$AD=CB$，

∴$\triangle DAQ\cong\triangle BCP$，∴$BP=QD$ ②，

由①、②，四边形 $PDQB$ 是平行四边形.

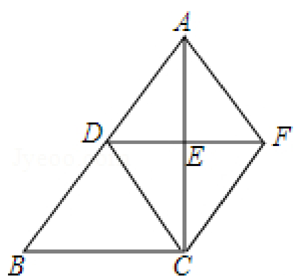
4.

（锦江区零诊）如图， 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 $D$，$E$ 分别是边 $AB$，$AC$ 的中点， 连接 $DE$，$DC$，过点 $A$ 作 $AF//DC$ 交 $DE$ 的延长线于点 $F$，连接 $CF$.

（1） 求证：$DE=FE$；

（2） 求证： 四边形 $BCFD$ 是平行四边形；

（3） 若 $AB=6$，$\angle BAC=30°$，求四边形 $ADCF$ 的面积 .



【解析】（1） 证明：$\because AF//CD$，$\therefore \angle AFE=\angle CDE$，$\because AE=EC$，$\angle AEF=\angle DEC$，

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle CED$，$\therefore DE=EF$．

（2）$\because AD=DB$，$AE=EC$，$\therefore DE//BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$，$\because DE=EF$，$\therefore BC=DF$，

$\therefore$四边形$BCFD$是平行四边形 ．

（3） 在$\mathrm{Rt}\triangle \mathrm{ABC}$中，$AB=6$，$\angle BAC=30°$，$\therefore BC=\dfrac{1}{2}AB=3$，$AC=3\sqrt{3}$，

$\therefore DE=EF=\dfrac{3}{2}$，$\because DE//BC$，$\therefore \angle AED=\angle ACB=90°$，$\therefore AC\perp DF$，

$\therefore S_{四边形ADCF}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot DF=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

# 第六讲、菱形与矩形

## 模块一、菱形的性质和判定

### 知识集锦

**菱形的性质和判定：**

1．**定义：**有一组邻边相等的平行四边形是菱形.

2．**性质：**菱形是特殊的平行四边形，具有平行四边形的一切性质，此外，还具有下述性质：

性质 1：菱形的四条边相等.

性质 2：菱形的对角线互相垂直平分.

性质 3：菱形的对角线平分一组对角.

性质 4：菱形是轴对称图形，对称轴是两条对角线所在直线.

另外，由菱形的性质可以得出：

（1）菱形的面积除了可以用平行四边形面积的求法外，还可用对角线乘积的一半来计算.

（2）菱形的对角线把菱形分成四个小的直角三角形.

3．**判定：**（1）有一组邻边相等的平行四边形是菱形.

（2）两条对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

（3）四条边相等的四边形是菱形.

（4）一条对角线平分一组对角的平行四边形是菱形.

**【教师备课提示】**各位老师在讲解菱形的面积时可以进行拓展，就是对角线互相垂直的四边形的性质：

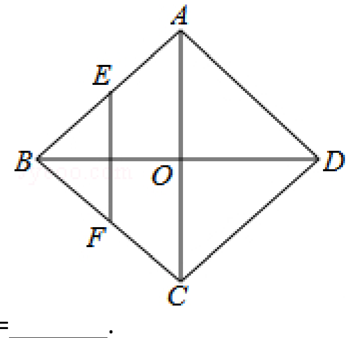
（1）四边形面积等于对角线乘积的一半；即 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$

（2）四边形对边的平方和相等．即 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$

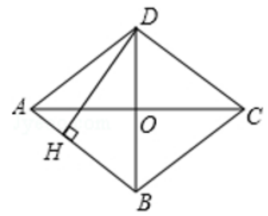
【例1】

1.如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC$，$BD$ 相交于 $O$ 点，$E$，$F$ 分别是 $AB$，$BC$ 边上的中点，连接 $EF$.若 $EF=\sqrt{3}$，$BD$=4，则菱形 $ABCD$ 的周长为（　　）

*A*．4　　*B*．$4\sqrt{6}$　　*C*．$4\sqrt{7}$　　*D*．28




2．如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC$=8，$DB$=6，$DH\perp AB$ 于点 $H$，则 $DH$=_______.



3．菱形的一个内角为60°，一条对角线长度为$2\sqrt{3}$，则另一条对角线长度为_______.

【答案】1. $C$　　2. $\frac{24}{5}$　　3.　2 或 6

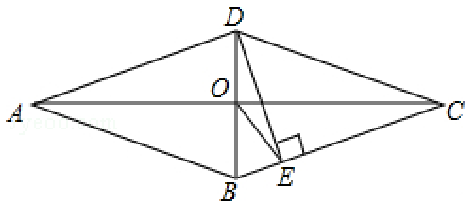
【解析】2. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore OA=OC=4$，$OB=OD=3$，$AC\perp BD$，

在 Rt△AOB 中，$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\because S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$，$S_{菱形ABCD}=DH\cdot AB$，

$\therefore DH\bullet 5=\frac{1}{2}\bullet 6\bullet 8$，$\therefore DH=\frac{24}{5}$．

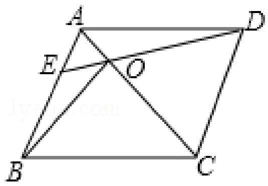
【例2】

1．如图，菱形 $ABCD$ 中，$AC$ 交 $BD$ 于 $O$，$DE\perp BC$ 于 $E$，连接 $OE$，若∠$ABC$=140°，则∠$OED$=_______.



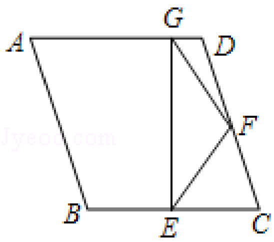

【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore DO=OB$，$\because DE\perp BC$ 于 $E$，$\therefore OE$ 为直角三角形 $BED$ 斜边上的中线，$\therefore OE=\frac{1}{2}BD$，$\therefore OB=OE$，$\therefore \angle OBE=\angle OEB$，$\because \angle ABC=140°$，$\therefore \angle OBE=70°$，$\therefore \angle OED=90°-70°=20°$，

2．如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 $E$ 是 $AB$ 上的一点，连接 $DE$ 交 $AC$ 于点 $O$，连接 $BO$，且∠$AED$=50°，则∠$CBO$=_______度.




【答案】50°

3.（青羊区零诊）如图，菱形 $ABCD$ 中，$E$、$F$ 分别是 $BC$、$CD$ 的中点，过点 $E$ 作 $EG\perp AD$ 于 $G$，连接 $GF$，若∠$A$=70°，则∠$DGF$ 的度数为________.



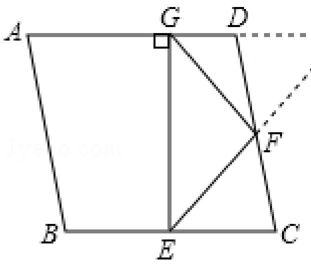

【解析】如图，延长 $AD$、$EF$ 相交于点 $H$，$\because F$ 是 $CD$ 的中点，$\therefore CF=DF$，$\because$ 菱形对边 $AD//BC$，

$\therefore \angle H=\angle CEF$，在△$CEF$ 和△$DHF$ 中，$\begin{cases}\angle CEF=\angle H\\ \angle CFE=\angle DFH\\ CF=DF\end{cases}$，$\therefore \triangle CEF\cong\triangle DHF(AAS)$，

$\therefore EF=FH$，$\because EG\perp AD$，$\therefore GF=FH$，$\therefore \angle DGF=\angle H$，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore \angle C=\angle A=70°$，$\because$ 菱形 $ABCD$ 中，$E$、$F$ 分别是 $BC$、$CD$ 的中点，$\therefore CE=CF$，

在△$CEF$ 中，$\angle CEF=\frac{1}{2}(180°-70°)=55°$，$\therefore \angle DGF=\angle H=\angle CEF=55°$．



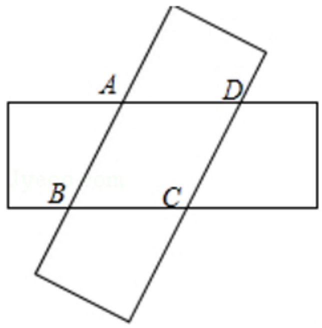

【例3】

1．四个点 $A$，$B$，$C$，$D$ 在同一平面内，从①$AB\parallel CD$；②$AB=CD$；③$AC\perp BD$；④$AD=BC$；⑤$AD\parallel BC$，这五个条件中任选三个，能使四边形 $ABCD$ 是菱形的选法有（　　）

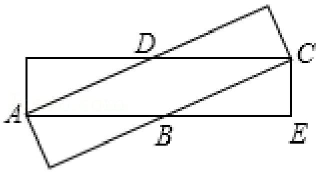
$A$．1 种　　$B$．2 种　　$C$．3 种　　$D$．4 种

【答案】$D$，①②③；①③⑤；③④⑤；②③④可以判定

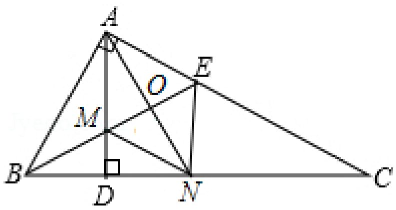
2．如图，由两个长为 10，宽为 2 的矩形叠合而得到四边形 $ABCD$，则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为______.




【解析】如图，菱形的一条对角线与矩形的对角线重合时，面积最大，设 $AB=BC=x$，则 $BE=10-x$，在 Rt△BCE 中，$BC^2=BE^2+CE^2$，即 $x^2=(10-x)^2+2^2$，解得 $x=\dfrac{26}{5}$，所以 $S_{菱形ABCD}=\dfrac{26}{5}\times 2=\dfrac{52}{5}$.




3．已知：如图，已知 $AD$ 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 $BC$ 上的高，$\angle B$ 的平分线交 $AD$ 于 $M$ 交 $AC$ 于 $E$，$\angle DAC$ 的平分线交 $ME$ 于 $O$，交 $CD$ 于 $N$．求证：四边形 $AMNE$ 是菱形.




【解析】∵$BE$ 平分 $\angle ABC$ 交 $AD$ 于 $M$，交 $AC$ 于 $E$，∴$\angle ABE=\angle DBM$，

∵$AD$ 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 $BC$ 上的高，∴$\angle BAC=\angle ADB=90°$，∴$\angle AEM=\angle BMD$，

∵$\angle AME=\angle BMD$，∴$\angle AEM=\angle AME$，∴$AE=AM$，

∵$\angle DAC$ 的平分线交 $CD$ 于 $N$，∴$\angle MAN=\angle NAE$，$AN\perp ME$，且 $AN$ 平分 $ME$，

在△$BAO$ 和△$BNO$ 中，$\begin{cases}\angle ABO=\angle NBO\\ BO=BO\\ \angle AOB=\angle NOB=90^\circ\end{cases}$，∴△$ABO$≌△$NBO$（$ASA$），∴$AO=NO$，∴$AN$ 和 $ME$ 互相垂直平分，∴四边形 $AMNE$ 是菱形.

# 模块二、矩形的性质和判定

## 知识集锦

**矩形的性质和判定：**

1．**定义：**有一个角是直角的平行四边形是矩形.

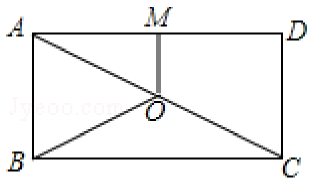
2．**性质：**矩形是特殊的平行四边形，具有平行四边形的一切性质，此外，还具有下述性质：
性质1：矩形的四个内角都相等，且为90°.
性质2：矩形的两条对角线相等.
性质3：矩形是轴对称图形，对称轴是一组对边中点的连线所在的直线.
另外，由矩形的性质可以得出：（1）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；（2）矩形的对角线把矩形分成四个小的等腰三角形.

3．**判定：**
（1）有一个角是直角的平行四边形是矩形；
（2）对角线相等的平行四边形是矩形.
（3）有三个角是90°的四边形是矩形.
另外，存在一点到两对对顶点的距离的平方和相等的平行四边形是矩形.

【例4】

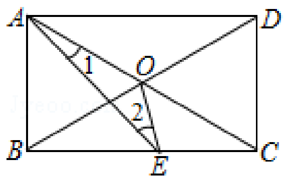
1．如图，点 $O$ 是矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 的中点，$OM$∥$AB$ 交 $AD$ 于点 $M$，若 $OM$=3，$BC$=10，则 $OB$ 的长为（　　）

$A$．5　　　$B$．4　　　$C$．$\frac{\sqrt{34}}{2}$　　　$D$．$\sqrt{34}$




【答案】$D$

2．如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$、$BD$ 交于点 $O$，点 $E$ 是 $BC$ 上一点，且 $AB$=$BE$，∠1=15°，则∠2=_______.




【答案】30°

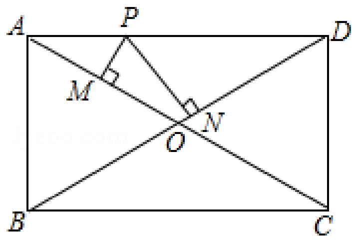
【例5】

1．$P$ 为矩形 $ABCD$ 内一点，已知 $PA$=3，$PB$=4，$PC$=5，则 $PD$ 的长为________.

【答案】$3\sqrt{2}$

2．如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$，$P$ 为 $AD$ 上的动点，过点 $P$ 作 $PM\perp AC$，$PN\perp BD$，垂足分别为 $M$、$N$，若 $AB=m$，$BC=n$，则 $PM+PN=$(　　)

A．$\dfrac{m+n}{2}$　　B．$\dfrac{mn}{m+n}$　　C．$\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$　　D．$\dfrac{n}{m}$



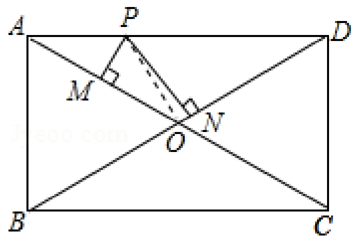

【解析】连接 $OP$，如图所示：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle ABC=90^\circ$，$OA=\dfrac{1}{2}AC$，$OD=\dfrac{1}{2}BD$，$AC=BD$，

$\therefore OA=OD$，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{m^2+n^2}$，$\therefore OA=OD=\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$，

$\because\triangle OAP$ 的面积 $+\triangle ODP$ 的面积 $=\triangle AOD$ 的面积 $=\dfrac{1}{4}$ 矩形 $ABCD$ 的面积，

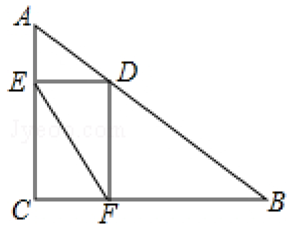
即 $\dfrac{1}{2}OA\bullet PM+\dfrac{1}{2}OD\bullet PN=\dfrac{1}{2}OA(PM+PN)=\dfrac{1}{4}AB\bullet BC=\dfrac{1}{4}mn$，

$\therefore PM+PN=\dfrac{mn}{2OA}=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$，故选：$C$．




3．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，$D$ 是 $AB$ 上一动点，过点 $D$ 作 $DE\perp AC$ 于点 $E$，$DF\perp BC$ 于点 $F$，连接 $EF$，则线段 $EF$ 的最小值是（　　）

A．5　　B．4.8　　C．4.6　　D．4.4

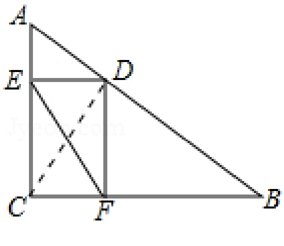



【解析】如图，连接 $CD$．$\because \angle ACB=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

$\because DE\perp AC$，$DF\perp BC$，$\angle C=90^\circ$，$\therefore$ 四边形 $CFED$ 是矩形，$\therefore EF=CD$，

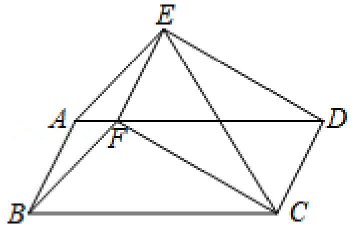
由垂线段最短可得 $CD\perp AB$ 时，线段 $EF$ 的值最小，此时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\bullet AC=\dfrac{1}{2}AB\bullet CD$，

解得 $CD=4.8$，$\therefore EF=4.8$．故选：$B$．



【例6】

如图，已知四边形 $ABCD$、四边形 $ABFE$ 都是平行四边形，联结 $FC$、$ED$、$EC$，且 $\angle FEC=\angle ABC$．求证：四边形 $CDEF$ 是矩形．




【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 平行四边形，$\therefore AB//CD$，$AB=CD$，

$\because$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形，$\therefore AB//EF$，$AB=EF$，

$\therefore CD//EF$，$CD=EF$，$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 是平行四边形，

记 $EC$ 与 $FD$ 的交点记作点 $O$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \angle ABC=\angle ADC$，

$\because \angle FEC=\angle ABC$，$\therefore \angle FEC=\angle ADC$，

$\because CD//EF$，$\therefore \angle FEC=\angle ECD$，$\therefore \angle ECD=\angle ADC$，

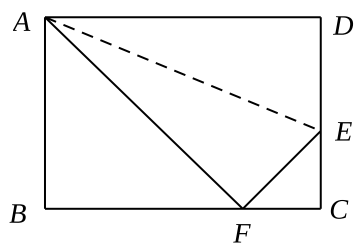
$\therefore CO=DO$，又 $CO=\frac{1}{2}CE, DO=\frac{1}{2}DF$，$\therefore CE=DF$，

$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 是矩形．

## 模块三、矩形常见的翻折问题

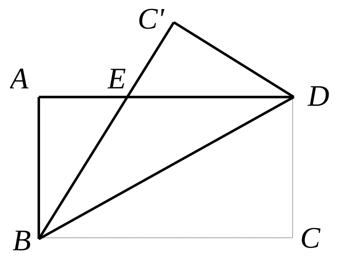
【例7】

1．已知，如图所示，折叠长方形的一边 $AD$，使点 $D$ 落在 $BC$ 边的点 $F$ 处，如果 $AB$=8$cm$，$BC$=10$cm$，求 $FC$ 与 $EC$ 的长.



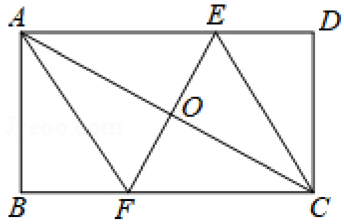

【答案】$FC=4cm$；$EC=3cm$

2. 如下左图，已知矩形 $ABCD$ 沿着直线 $BD$ 折叠，使点 $C$ 落在 $C'$ 处，$BC'$ 交 $AD$ 于 $E$，$AD$=16，$AB$=8，求 $DE$ 的长.




【答案】10

3. （石室联中半期）如图，矩形纸片 $ABCD$（$AD>AB$）中，将它折叠，使点 $A$ 与 $C$ 重合，折痕 $EF$ 交 $AD$ 于 $E$，交 $BC$ 于 $F$，交 $AC$ 于 $O$，连结 $AF$，$CE$，若 $AB=4$，$EF=2\sqrt{5}$，求四边形 $AECF$ 的面积.



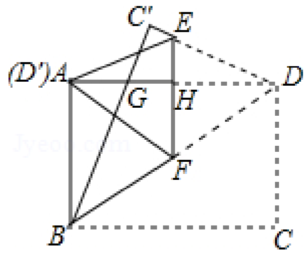

【答案】20

# 巅峰挑战

如图， 在矩形纸片 *ABCD* 中，*AB*=6，*BC*=8． 把△*BCD* 沿对角线 *BD* 折叠， 使点 *C* 落在 *C*′ 处，*BC*′ 交 *AD* 于点 *G*；*E*、*F* 分别是 *C*′ *D* 和 *BD* 上的点， 线段 *EF* 交 *AD* 于点 *H*，把△*FDE* 沿 *EF* 折叠， 使点 *D* 落在 *D*′ 处， 点 *D*′ 恰好与点 *A* 重合 ．

（1） 求证：△*ABG*≌△*C*′ *DG*；

（2） 求 *GH* 的长 ．




【解析】(1) $\because \triangle BDC'$ 由 $\triangle BDC$ 翻折而成，$\therefore \angle C=\angle BAG=90^\circ$，$C'D=AB=CD$，$\angle AGB=\angle DGC'$，

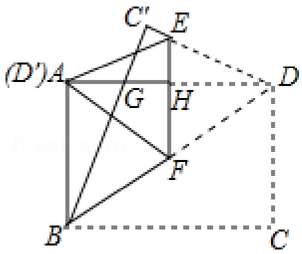
$\therefore \angle ABG=\angle ADE$，

在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle C'DG$ 中，$\because \begin{cases}\angle BAD=\angle C'\\ AB=C'D\\ \angle ABG=\angle ADC'\end{cases}$，$\therefore \triangle ABG \cong \triangle C'DG(AAS)$；

（2） 由 （1） 可知 $\triangle ABG \cong \triangle C'DG$，$\therefore GD=GB$，$\therefore AG+GB=AD$，

设 $AG=x$，则 $GB=8-x$，在 Rt△ABG 中，$\because AB^2+AG^2=BG^2$，即 $6^2+x^2=(8-x)^2$，

解得 $x=\dfrac{7}{4}$，$\therefore AG=\dfrac{7}{4}$，又 $\because AH=\dfrac{1}{2}AD=4$，$\therefore GH=4-\dfrac{7}{4}=\dfrac{9}{4}$．

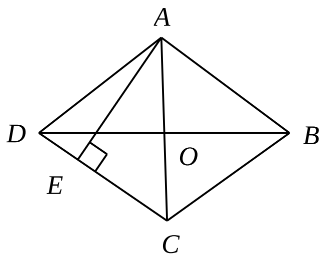


# 笔记整理

# 课后练习

1.

（1）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AC$=6$cm$，$BD$=8$cm$，则菱形 $ABCD$ 的高 $AE$ 为________$cm$.



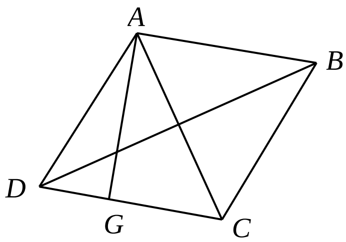

【解答】∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴$AC$、$BD$ 互相垂直平分，

∴ $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 8=4(cm)$， $CO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 6=3(cm)$ ，

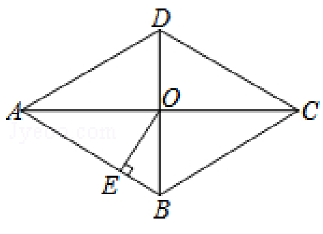
在△$BCO$ 中，由勾股定理，可得 $BC=\sqrt{BC^2+CO^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5(cm)$

∵$AE\perp BC$，∴ $AE\bullet BC=AC\bullet BO$，∴ $AE=\frac{AC\cdot BD}{BC}=\frac{6\times 4}{5}=\frac{24}{5}(cm)$

即菱形 $ABCD$ 的高 $AE$ 为 $\frac{24}{5}cm$. 故答案为： $\frac{24}{5}$ .




（2）如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$，$OE\perp AB$，垂足为 $E$，若∠$ADC$=120°，则∠$AOE$=_________.



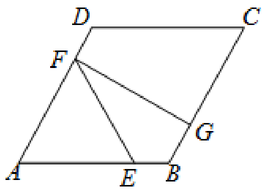

【解答】在菱形 $ABCD$ 中，∠$ADC$=120°，∴ $\angle BAD=180°-120°=60°$ ，

∴ $\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\times 60°=30°$, ∵$OE\perp AB$，∴ $\angle AOE=90°-\angle BAO=90°-30°=60°$

故答案为：60°.

（3）如图，菱形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$DF=1$，$\angle DAB=60°$，$\angle EFG=15°$，$FG\perp BC$，则 $AE$=（　　）

$A$．$1+\sqrt{2}$　　　　$B$．$\sqrt{6}$　　　　$C$．$2\sqrt{3}-1$　　　　$D$．$1+\sqrt{3}$




【解答】过 $FH\perp AB$，垂足为 $H$.

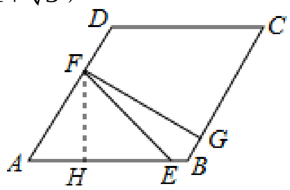
∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AD=AB=3$，

∵$DF$=1，∴ $AF=AD-FD=2$，

∵ $\angle DAB$=60°，∴ $\angle AFH$=30°，∴$AH$=1，$FH=\sqrt{3}$，

又∵ $\angle EFG$=15°，∴ $\angle EFH=\angle AFG-\angle AFH-\angle EFG=90°-30°-15°=45°$，

∴△$FHE$ 是等腰直角三角形，∴ $HE=FH=\sqrt{3}$，∴ $AE=AH+HE=1+\sqrt{3}$，故选 $D$.

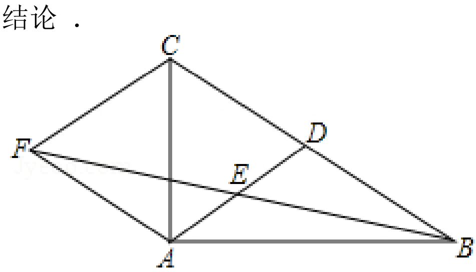



2.

如图，在△$ABC$ 中，$AD$ 是 $BC$ 边上的中线，$E$ 是 $AD$ 的中点，过点 $A$ 作 $BC$ 的平行线交 $BE$ 的延长线于点 $F$，连接 $CF$.

（1） 求证：$AF$=$DC$;

（2） 若 $AB\perp AC$，试判断四边形 $ADCF$ 的形状，并证明你的结论 .




【解析】(1) 证明：$\because AF//BC$，$\therefore \angle AFE=\angle DBE$，$\because E$ 是 $AD$ 的中点，$AD$ 是 $BC$ 边上的中线，

$\therefore AE=DE$，$BD=CD$，在△$AFE$ 和△$DBE$ 中 $\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE\\ \angle FEA=\angle BED\\ AE=DE\end{cases}$ $\therefore \triangle AFE\cong\triangle DBE(AAS)$，

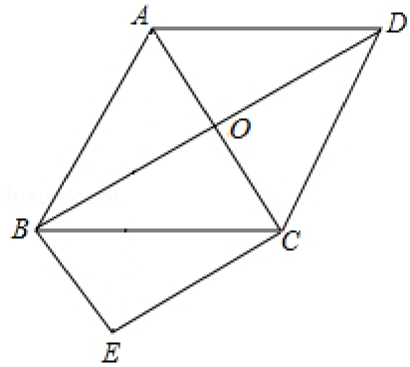
$\therefore AF=BD$，$\therefore AF=DC$.

(2) 四边形 $ADCF$ 是菱形，

证明：$AF//BC$，$AF=DC$，∴四边形 $ADCF$ 是平行四边形，

$\because AC\perp AB$，$AD$ 是斜边 $BC$ 的中线，$\therefore AD=\dfrac{1}{2}BC=DC$，∴平行四边形 $ADCF$ 是菱形 .

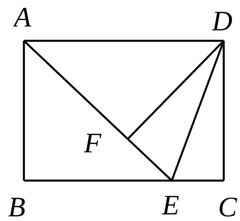
3.
（金牛区零诊）已知：如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 相交于点 $O$，$BE//AC$，$\angle DBC=\angle BCE$．求证：四边形 $OBEC$ 是矩形．




【解析】$\because \angle DBC=\angle BCE$，$\therefore CE//DB$，$\because BE//AC$，$CE//DB$，$\therefore$ 四边形 $OBEC$ 是平行四边形，
又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AC\perp BD$，$\therefore \angle AOB=90^{\circ}$，$\therefore$ 平行四边形 $OBEC$ 是矩形

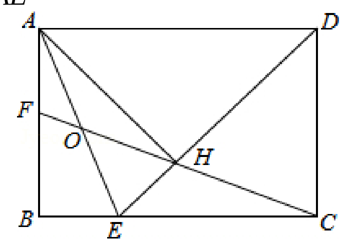
4.
（1）如图，已知▱$ABCD$，以 $AC$ 为边在两侧各作一个正三角形 $ACP$，$ACQ$．求证：四边形 $BPDQ$ 为平行 1．如图，已知点 $E$ 为矩形 $ABCD$ 边 $BC$ 上一点，且 $D$ 到 $AE$ 的距离 $DF$ 等于 $DC$，下列结论：①$\angle AEB=2\angle EDC$；②$AE=BC$；③$AF=AB$；④若 $BC=\sqrt{2}DC$，则点 $F$ 在线段 $BC$ 的垂直平分线上，其中正确结论的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4



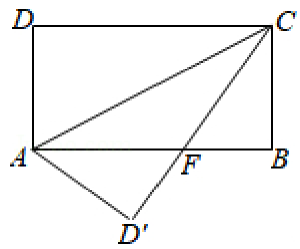

【答案】$C$

（2）（金牛区零诊）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=\sqrt{2}AB$，$\angle ADC$ 的平分线交边 $BC$ 于点 $E$，$AH\perp DE$ 于点 $H$，连接 $CH$ 并延长交边 $AB$ 于点 $F$，连接 $AE$ 交 $CF$ 于点 $O$，则 $\dfrac{OH}{AE}$ 的值是________．




【解析】在矩形 $ABCD$ 中，$AD=BC=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}CD$，$\because DE$ 平分 $\angle ADC$，$\therefore \angle ADE=\angle CDE=45^{\circ}$，
$\because AH\perp DE$，$\therefore \triangle ADH$ 是等腰直角三角形，$\therefore AD=\sqrt{2}AB$，$\therefore AH=AB=CD$，
$\because \triangle DEC$ 是等腰直角三角形，$\therefore DE=\sqrt{2}CD$，$\therefore AD=DE$，$\therefore \angle AEH=67.5^{\circ}$，
$\therefore \angle EAH=22.5^{\circ}$，$\because DH=CD$，$\angle EDC=45^{\circ}$，$\therefore \angle DHC=67.5^{\circ}$，$\therefore \angle OHA=22.5^{\circ}$，
$\therefore \angle OAH=\angle OHA$，$\therefore OA=OH$，$\therefore \angle AEH=\angle OHE=67.5^{\circ}$，$\therefore OH=OE$，
$\therefore OH=\dfrac{1}{2}AE$，即 $\dfrac{OH}{AE}=\dfrac{1}{2}$．故答案为：$\dfrac{1}{2}$．

5.
如图， 长方形 $ABCD$ 中，$AB$=8，$BC$=4，将长方形沿 $AC$ 折叠， 点 $D$ 落在 $D'$ 处 .
（1） 求证：$\triangle AFD' \cong \triangle CFB$；
（2） 求线段 $BF$ 的长度；
（3） 试求出重叠部分$\triangle AFC$ 的面积 .



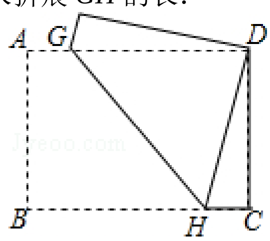

【解析】（1） 由折叠可得，$\angle D'=\angle D=\angle B=90^\circ$， $AD'=AD=BC$，

在 $\triangle AD'F$ 和 $\triangle CBF$ 中，$\begin{cases}\angle AFD'=\angle CFB\\ \angle D'=\angle B\\ AD'=CB\end{cases}$， $\therefore \triangle AFD \cong \triangle CFB(AAS)$；

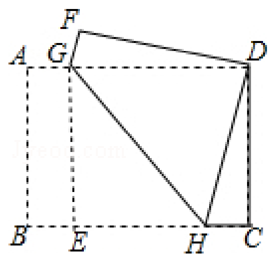
（2） 由（1）$\triangle AFD \cong \triangle CFB(AAS)$ $\therefore AF=CF$，设 $BF=x$，则 $AF=CF=8-x$，$\because \angle B=90^\circ$，
$\therefore$ 在 Rt△BCF 中， $BF^2+CB^2=CF^2$，
即 $4^2+x^2=(8-x)^2$， 解得 $x=3$， $\therefore BF=3$；

（3）$\because AF=8-3=5$， $BC=4$， $CB\perp AF$， $\therefore S_{\triangle ACF}=\dfrac{1}{2}AF\times BC=\dfrac{1}{2}\times 5\times 4=10$.

6.
在矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB$=6，$BC$=8．将矩形纸片折叠，使点 $B$ 与点 $D$ 重合，求折痕 $GH$ 的长.




【解析】如图，$\because$ 四边形 $DFGH$ 与四边形 $BAGH$ 关于 $GH$ 对称
$\therefore DH=BH$， $FD=BA$， $FG=AG$， $\angle GHB=\angle GHD$． $\angle F=\angle A$ $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
$\therefore \angle A=\angle B=90^\circ$，$AB=CD$，$AD=BC$，$AD//BC$，$\therefore \angle DGH=\angle GHB$，$\therefore \angle DGH=\angle GHD$，
$\therefore GD=HD$． $\therefore GD=DH=BH$． $\because AB=6$， $BC=8$， $\therefore DF=CD=6$， $AD=8$.
设 $BH=x$， 则 $HC=8-x$， 由勾股定理， 得 $x^2=(8-x)^2+36$， 解得： $x=\dfrac{25}{4}$.
$\therefore GD=HD=\dfrac{25}{4}$， $\therefore AG=\dfrac{7}{4}$， $\therefore EH=\dfrac{9}{2}$.
在 Rt△GEH 中， 由勾股定理， 得 $GH=\sqrt{GE^2+EH^2}=7.5$.



# 第七讲、正方形

## 模块一、正方形的性质及判定

### 知识集锦

**正方形的性质和判定**

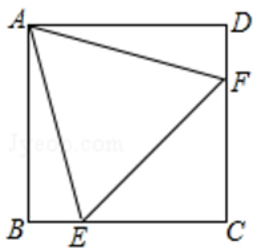
1．**定义：**四个角相等、四条边也相等的四边形叫作正方形.

2．**性质：**正方形既是矩形，又是菱形，具有矩形和菱形的一切性质.
性质 1：正方形的四个内角都相等，且都为 90°，四条边都相等.
性质 2：正方形的对角线互相垂直平分且相等，对角线平分一组对角.
性质 3：正方形具有 4 条对称轴，两条对角线所在的直线和过两组对边中点的两条直线..
另外，由正方形的性质可以得出：
（1）正方形的对角线把正方形分成四个小的等腰直角三角形.
（2）正方形的面积是边长的平方，也可表示为对角线长平方的一半.

3．**判定：**判定一个四边形是正方形，除了定义之外，还可以采用以下方法：
（1）先证明是矩形，再证明该矩形有一组邻边相等，或对角线互相垂直.
（2）先证明是菱形，再证明该菱形的一个角是直角，或两条对角线相等.

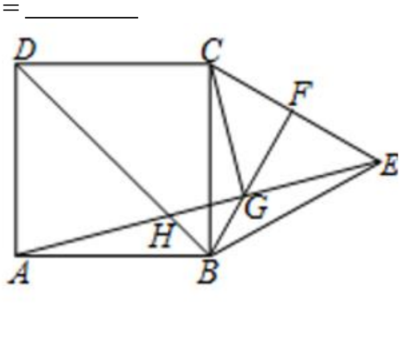
【例1】

1．如图 1-1，在正方形 *ABCD* 中，等边三角形 *AEF* 的顶点 *E*、*F* 分别在边 *BC* 和 *CD* 上，则$\angle AEB$=__



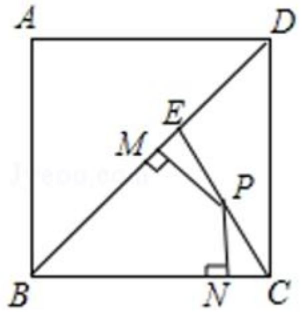

【答案】75°

2．如图 1-2，已知正方形 *ABCD* 的面积是 64，△*BCE* 为等边三角形，*F* 是 *CE* 的中点，*AE*、*BF* 交于点 *G*，连接 *CG*，连接 *BD* 交 *AE* 于点 *H*，则$\angle AHB$=_________，$CG$＝________



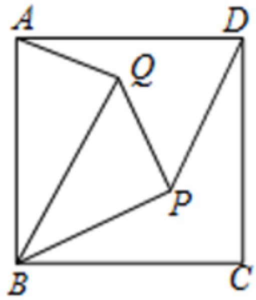

【答案】120°，$4\sqrt{2}$

3．如图 1-3，边长为 1 的正方形 *ABCD* 中，点 *E* 是对角线 *BD* 上的一点，且 *BE*=*BC*，点 *P* 在 *EC* 上，$PM \perp BD$ 于 *M*，$PN \perp BC$ 于 *N*，则 *PM*+*PN*=_________



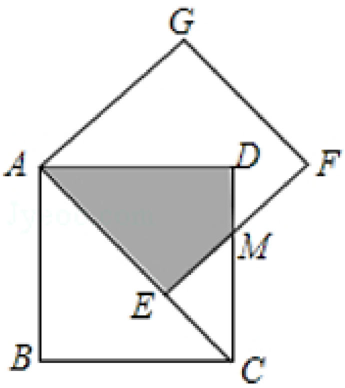

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

4．如图，在正方形 *ABCD* 中，点 *P*，*Q* 为正方形内的两点，且 *PD*=*PB*， *QB*=*AB*，$\angle CBP = \angle QBP$，则$\angle BQP =$__________




【答案】45°

5．如图，正方形 *AEFG* 的边 *AE* 放置在正方形 *ABCD* 的对角线 *AC* 上，*EF* 与 *CD* 交于点 *M*，得四边形 *AEMD*，且两正方形的边长均为 2，则两正方形重合部分（阴影部分）的面积为__________



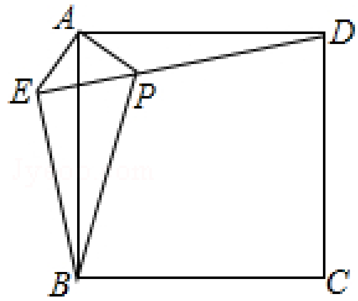

【答案】$4\sqrt{2}-4$

6．（成外直升）如图，已知在正方形 $ABCD$ 外取一点 $E$，连接 $AE$、$BE$、$DE$．过点 $A$ 作 $AE$ 的垂线交 $DE$ 于点 $P$．若 $AE=AP=1$，$PB=\sqrt{6}$。下列结论：

①$\triangle APD\cong\triangle AEB$；②点 $B$ 到直线 $AE$ 的距离为 $\sqrt{3}$；③$EB\perp ED$；④$S_{\triangle APD}+S_{\triangle APB}=0.5+\sqrt{2}$ 。

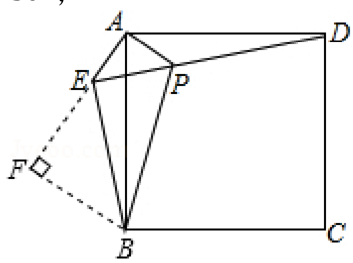
其中正确结论的序号是（　　）

$A$．①③④　　　　$B$．①②③　　　　$C$．②③④　　　　$D$．①②④




【解析】在正方形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\because AP\perp AE$，$\therefore\angle BAE+\angle BAP=90^\circ$，

又$\because\angle DAP+\angle BAP=\angle BAD=90^\circ$，$\therefore\angle BAE=\angle DAP$，




在 $\triangle APD$ 和 $\triangle AEB$ 中，$\begin{cases}AE=AP\\ \angle BAE=\angle DAP\\ AB=AD\end{cases}$，

$\therefore\triangle APD\cong\triangle AEB(SAS)$，故①正确；

$\because AE=AP$，$AP\perp AE$，$\therefore\triangle AEP$ 是等腰直角三角形，

$\therefore\angle AEP=\angle APE=45^\circ$，

$\therefore\angle AEB=\angle APD=180^\circ-45^\circ=135^\circ$，$\therefore\angle BEP=135^\circ-45^\circ=90^\circ$，$\therefore EB\perp ED$，故③正确

$\because AE=AP=1$，$\therefore PE=\sqrt{2}AE=\sqrt{2}$，

在 Rt△PBE 中，$BE=\sqrt{PB^2-PE^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=2$，

$\therefore S_{\triangle APD}+S_{\triangle APB}=S_{\triangle APE}+S_{\triangle BPE}=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2=0.5+\sqrt{2}$，故④正确；

过点 $B$ 作 $BF\perp AE$ 交 $AE$ 的延长线于 $F$，$\because\angle BEF=180^\circ-135^\circ=45^\circ$，

$\therefore\triangle BEF$ 是等腰直角三角形，$\therefore BF=\frac{\sqrt{2}}{2}\times2=\sqrt{2}$，

即点 $B$ 到直线 $AE$ 的距离为 $\sqrt{2}$，故②错误，

综上所述，正确的结论有①③④．故选：$A$．

# 模块二、正方形中的重要模型

## 知识集锦

**1．婆罗摩笈多模型**

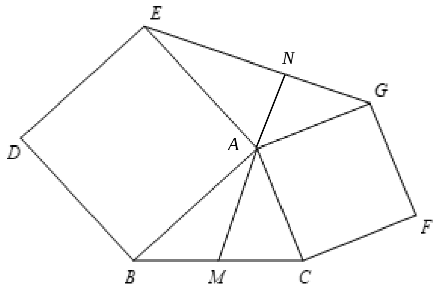
以$\triangle ABC$的边$AC$、$AB$为一边，分别向三角形的外侧作正方形$ACFG$和正方形$ABDE$

①$\triangle AEG$的面积与$\triangle ABC$面积相等

②若$M$为$BC$的中点，则$MA\perp EG$

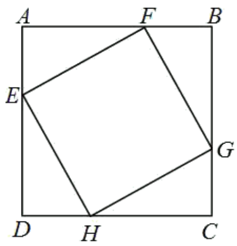
③若$NA\perp EG$，则$M$为$BC$的中点

④$2AM=EG$

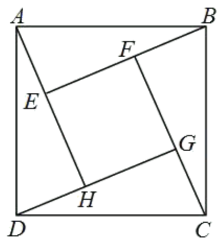



**2.内外弦图：**

内弦图




外弦图




2.1 两个弦图的画法：

内弦图：在正方形$ABCD$的各边上分别取$E$、$F$、$G$、$H$四个点，使得$AE=DH=CG=BF$，连接$EH$、$HG$、$GF$、$FE$可以得到内弦图。

外弦图：在正方形$ABCD$内，分别取点$E$、$F$、$G$、$H$四个点，连接$AH$、$BE$、$CF$、$DG$，使得$\angle DAH=\angle CDG=\angle BCF=\angle ABE$，就可以得到外弦图。

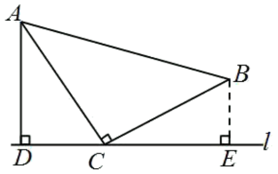
2.2 弦图的作用：

由弦图的画法，会产生四个全等的直角三角形，所以我们在遇到这两个弦图或者其中的一部分，可以利用这两个弦图去构造全等。

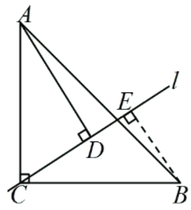
具体应用：①证明勾股定理；②解决复杂的面积问题；③构造全等三角形，求边的关系.

2.3 弦图常见辅助线添加方法：

$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形

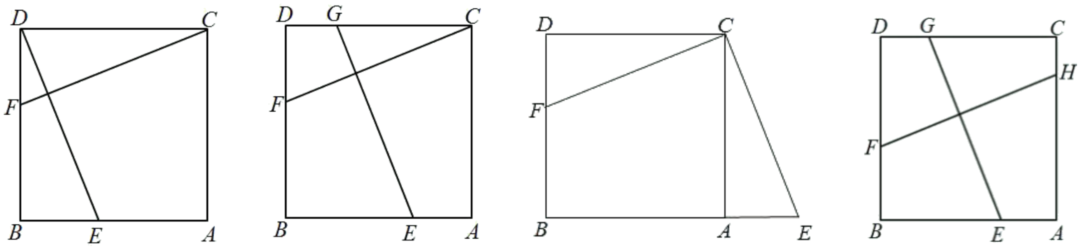



（外 $K$ 型）



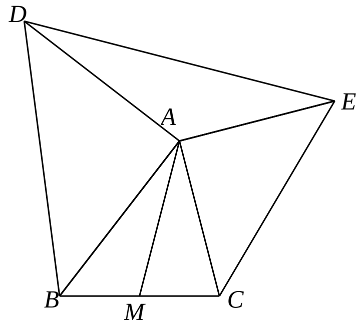

（内 $K$ 型）

2.4 弦图中的垂直且相等




【例2】

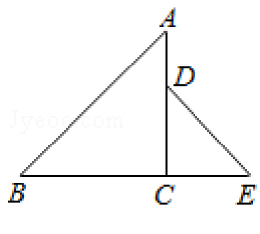
1．（育才半期）如图，$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等腰直角三角形，$\angle BAD$ 和 $\angle CAE$ 都是直角，若 $AB=6$，$BC=5$，$AC=4$，则 $AM$ 的长为________.




【答案】$\dfrac{\sqrt{79}}{2}$

【例3】

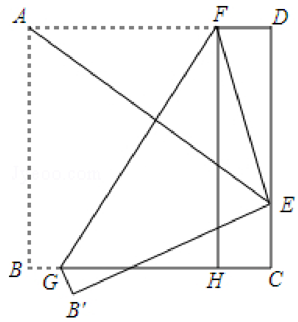
（树德半期）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=10$，在 $\triangle DCE$ 中，$\angle DCE=90°$，$DC=EC=6$，点 $D$ 在线段 $AC$ 上，点 $E$ 在线段 $BC$ 的延长线上。将 $\triangle DCE$ 绕点 $C$ 旋转 $60°$ 得到 $\triangle D'CE'$（点 $D$ 的对应点为点 $D'$，点 $E$ 的对应点为点 $E'$），连接 $AD'$、$BE'$，过点 $C$ 作 $CN\perp BE'$，垂足为 $N$，直线 $CN$ 交线段 $AD'$ 于点 $M$，则 $MN$ 的长为___________。




【答案】$7+\dfrac{15}{7}\sqrt{3}$ 或 $7-\dfrac{15}{7}\sqrt{3}$

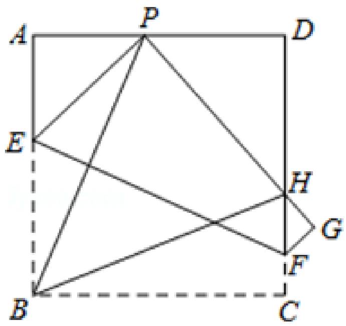
【例4】

1．如图，将边长为 4 的正方形 *ABCD* 折叠，使得点 *A* 落在 *CD* 边上的点 *E* 处，点 *B* 落在点 *B′*处，折痕为 *GF*，*FH*⊥*BC* 于点 *H*，*FG*=5，求线段 *AF* 的长．




【答案】$\frac{25}{8}$

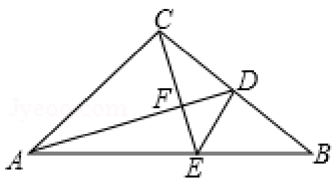
2．如图， 现有一张边长为 4 的正方形纸片 *ABCD*，点 *P* 为正方形 *AD* 边上的一点 （不 与点 *A*，点 *D* 重合），若将正方形纸片折叠， 使点 *B* 落在点 *P* 处， 点 *C* 落在点 *G* 处，*PG* 交 *DC* 于点 *H*，折痕为 *EF*，连结 *BP*，*BH*，设 *AP* 为 1，求四边形 *EFGP* 的面积为 *S*




【答案】$S=6.5$

【例5】

如图所示，△*ABC* 是等腰直角三角形，∠*ACB*=90°，*AD* 是 *BC* 边上的中线，过 *C* 作 *AD* 的垂线，交 *AB* 于点 *E*，交 *AD* 于点 *F*，求证：∠*ADC*=∠*BDE*.

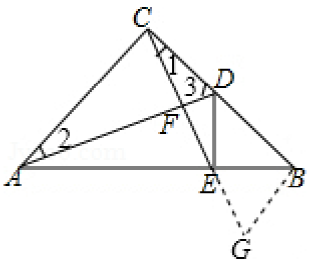



【解析】过 $B$ 点作 $BG\perp BC$，交 $CE$ 的延长线于 $G$ 点，$\because \angle1+\angle3=90^\circ$，$\angle2+\angle3=90^\circ$，

$\therefore \angle1=\angle2$，$\because \angle ACD=\angle CBG=90^\circ$，$AC=CB$，$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBG$

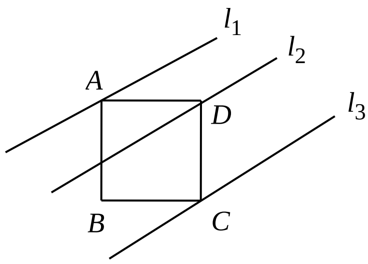
$\therefore BG=CD$，$\angle3=\angle G$，$\because AD$ 是 $BC$ 边上的中线，$\therefore CD=BD=BG$，

$\because \angle EBG=\angle EBD=45^\circ$，$EB=EB$，$\therefore \triangle EBG\cong\triangle EBD$，$\therefore \angle G=\angle EDB$，$\therefore \angle ADC=\angle BDE$；



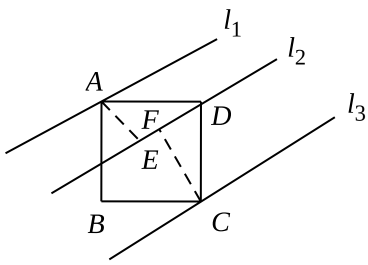

【例6】

1．如图，直线 $L_1$、$L_2$、$L_3$ 分别过正方形 $ABCD$ 的三个顶点 $A$、$D$、$C$，且相互平行，若 $L_1$、$L_2$ 的距离为 2，$L_2$、$L_3$ 的距离为 4，则正方形的边长为_________.

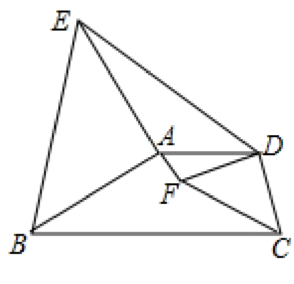



【解析】如图，作 $CF \perp L_2$，垂足为 $F$，$AE \perp L_2$，垂足为 $E$，易证 $\triangle AED \cong \triangle DFC$，

$\therefore ED = CF = 4$，$AE = 2$，$\therefore AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = 2\sqrt{5}$.




2．如图，已知 $AD//BC$，$\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 是等腰直角三角形，$\angle EAB=\angle FDC=90°$，$AD=2$，$BC=5$，则四边形 $AEFD$ 的面积为__________。




【解析】延长 $AD$，过 $B$ 作 $BG \perp AD$ 于 $F$，过 $E$ 作 $EH \perp AD$ 于 $H$，过 $F$ 作 $FI \perp AD$ 于 $I$，过 $C$ 作 $CJ \perp AD$ 于 $J$，则四边形 $BCJG$ 是矩形 $\therefore \angle EHA = \angle G = 90°$

$\because \triangle ABE$ 是等腰直角三角形 $\therefore AE = BA$，$\angle EAB = 90°$

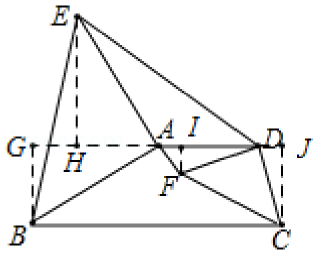
$\therefore \angle BAG + \angle EAH = \angle AEH + \angle EAH = 90°$

$\therefore \angle BAG = \angle AEH$ 在 $\triangle BAG$ 和 $\triangle AEH$ 中 $\begin{cases} \angle BAG = \angle AEH \\ \angle EHA = \angle G \\ AE = BA \end{cases}$

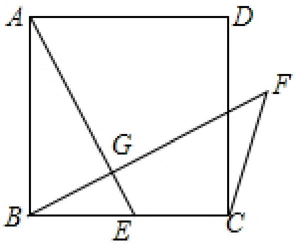
$\therefore \triangle BAG \cong \triangle AEH(AAS)$ $\therefore AG = EH$，同理可得，$\triangle CJD \cong \triangle DIF$ $\therefore DJ = FI$

$\because$ 四边形 $AEDF$ 的面积 $=\triangle ADE$ 的面积 $+\triangle ADF$ 的面积

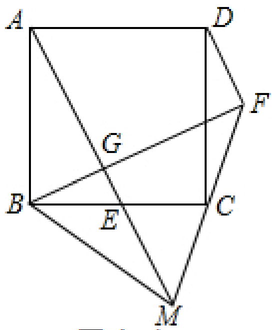
$$=\frac{1}{2}\times AD\times EH+\frac{1}{2}\times AD\times FI$$
$$=\frac{1}{2}\times AD\times(EH+FI)$$
$$=\frac{1}{2}\times AD\times(AG+DJ)$$
$$=\frac{1}{2}\times AD\times(JG-AD)$$
$$=\frac{1}{2}\times AD\times(BC-AD)$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times(5-2)$$
$$=3$$




3. 如图（1），正方形 $ABCD$ 中，$E$ 为 $BC$ 上一点，过 $B$ 作 $BG\perp AE$ 于 $G$，延长 $BG$ 至点 $F$ 使 $\angle CFB=45°$ .
①求证：$AG=FG$；
②如图（2），延长 $FC$、$AE$ 交于点 $M$，连接 $DF$、$BM$，若 $C$ 为 $FM$ 中点，$BM=10$，求 $FC$ 的长.



图（1）



图（2）

【解析】①证明：过 $C$ 点作 $CH\perp BF$ 于 $H$ 点，$\because\angle CFB=45°\ \therefore CH=HF$，

$\because\angle ABG+\angle BAG=90°$，$\angle FBE+\angle ABG=90°\ \therefore\angle BAG=\angle FBE$，

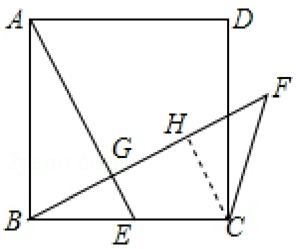
$\because AG\perp BF$，$CH\perp BF$，$\therefore\angle AGB=\angle BHC=90°$，在 $\triangle AGB$ 和 $\triangle BHC$ 中，$\begin{cases}\angle AGB=\angle BHC\\ \angle BAG=\angle CBH\\ AB=BC\end{cases}$，

$\therefore\triangle AGB\cong\triangle BHC$，$\therefore AG=BH$，$BG=CH$，$\because BH=BG+GH$，$\therefore BH=HF+GH=FG$，

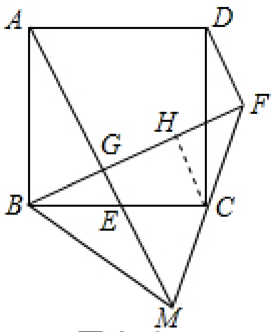
$\therefore AG=FG$；

②解：$\because CH\perp GF$，$\therefore CH//GM$，$\because C$ 为 $FM$ 的中点，

$\therefore FH=HG=\frac{1}{2}FG=2\sqrt{5}$，$\because\angle CFH=45°$，$\therefore CF=\sqrt{2}FH=2\sqrt{10}$ .



图（1）

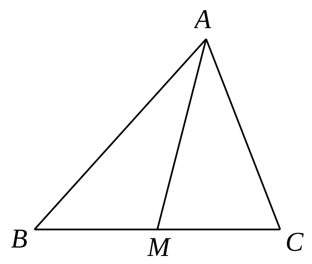


图（2）

# 巅峰挑战

思考：你能得出一般三角形的中线长度公式吗？

任意三角形 $ABC$ 中，$M$ 为 $BC$ 中点，已知 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，则 $AM=$____________



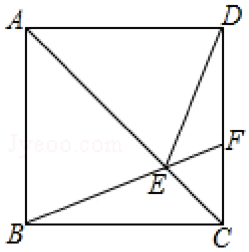

【答案】$\sqrt{\dfrac{1}{2}b^2+\dfrac{1}{2}c^2-\dfrac{1}{4}a^2}$

# 笔记整理

# 课后练习

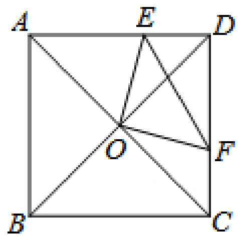
1.

（1）如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 $F$ 为 $CD$ 上一点，$BF$ 与 $AC$ 交于点 $E$，若 $\angle CBF=20^\circ$，则 $\angle DEF=$________度．




【答案】50

（2）如图，在正方形 $ABCD$ 中，$O$ 是对角线的交点，过点 $O$ 作 $OE\perp OF$，分别交 $AD$，$CD$ 于 $E$，$F$，若 $AE=6$，$CF=4$，则 $EF=$_________．




【解析】∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle ADC=90^\circ$，$\angle OAE=\angle ODE=\angle ODF=\angle OCF=45^\circ$，$OA=OB=OC=OD$，$AC\perp BD$，

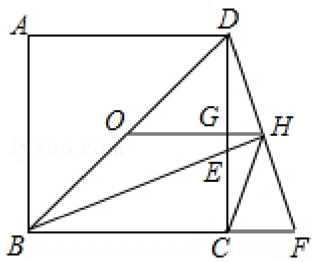
∴$\angle AOD=90^\circ$，∵$OE\perp OF$，∴$\angle EOF=90^\circ$，∴$\angle AOE=\angle DOF$，

在$\triangle AOE$ 和$\triangle DOF$ 中，$\angle OAE=\angle ODF$，$OA=OD$，$\angle AOE=\angle DOF$，

∴$\triangle AOE\cong\triangle DOF$（$ASA$），∴$AE=DF=6$，

同理：$DE=CF=4$，∴$EF=\sqrt{DE^2+DF^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

（3）如图，点 $O$ 为正方形 $ABCD$ 的中心，$BE$ 平分$\angle DBC$ 交 $DC$ 于点 $E$，延长 $BC$ 到点 $F$，使 $FC=EC$，连结 $DF$ 交 $BE$ 的延长线于点 $H$，连结 $OH$ 交 $DC$ 于点 $G$，连结 $HC$．则以下四个结论中：①$OH//BF$，②$GH=\dfrac{1}{4}BC$，③$OD=\dfrac{1}{2}BF$，④$\angle CHF=45^\circ$．正确结论的结论有__________（填序号）．




【解析】①∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$\angle DCB=90^\circ$，$BC=DC$，∴$\angle ECB=\angle DCF=90^\circ$，

∵$EC=CF$，∴$\triangle BCE\cong\triangle DCF(SAS)$，∴$\angle CBE=\angle CDF$，

∵$\angle CBE+\angle BEC=90^\circ$，$\angle BEC=\angle DEH$，∴$\angle DEH+\angle CDF=90^\circ$，

∴$\angle BHD=\angle BHF=90^\circ$，∵$BH=BH$，$\angle HBD=\angle HBF$，∴$\triangle BHD\cong\triangle BHF(ASA)$，

∴$DH=HF$，∵$OD=OB$，∴$OH$ 是$\triangle DBF$ 的中位线∴$OH//BF$；故①正确；

②$\therefore OH=\dfrac{1}{2}BF$，$\angle DOH=\angle CBD=45°$，$\because OH$ 是 $\triangle BFD$ 的中位线，

$\therefore DG=CG=\dfrac{1}{2}BC$，$GH=\dfrac{1}{2}CF$，$\because CE=CF$，$\therefore GH=\dfrac{1}{2}CF=\dfrac{1}{2}CE\because CE<CG=\dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore GH<\dfrac{1}{4}BC$，故②错误.

③由①知：$\triangle DHB\cong\triangle FHB$，$\therefore BD=BF$，$\because OD=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}BF$，故③正确；

④$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，$BE$ 是 $\angle DBC$ 的平分线，$\therefore BC=CD$，$\angle BCD=\angle DCF$，$\angle EBC=22.5°$，$\because CE=CF$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle\mathrm{BCE}\cong\mathrm{Rt}\triangle\mathrm{DCF(SAS)}$，$\therefore\angle EBC=\angle CDF=22.5°$，

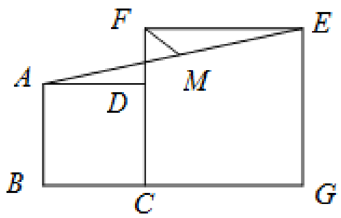
$\therefore\angle F=90°-\angle CDF=90°-22.5°=67.5°$，$\mathrm{Rt}\triangle\mathrm{DCF}$ 中，$DH=FH$ $\therefore CH=\dfrac{1}{2}DF=FH$

$\therefore\angle HCF=\angle F=67.5°$，$\therefore\angle CHF=180°-\angle HCF-\angle BFH=180°-67.5°-67.5°=45°$，

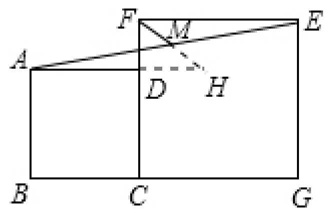
故④正确；故答案为：①③④.

2.

(1)如图，正方形 $ABCD$、正方形 $CGEF$ 的边长分别是 2、3，且点 $B$、$C$、$G$ 在同一条直线上，$M$ 是线段 $AE$ 的中点，连接 $MF$，则 $MF$ 的长为_________.




【解析】延长 $AD$ 至 $H$，延长 $FM$ 与 $AH$ 交于 $H$ 点，则在$\triangle AMH$ 和$\triangle EMF$ 中，




$\angle MAH=\angle FEM$，$EM=AM$，$\angle AHM=\angle EFM$

$\therefore\triangle AMH\cong\triangle EMF$，$\therefore FM=MH$，$AH=EF$，

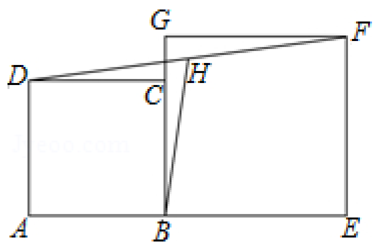
$\therefore DH=AH-AD=EF-AD=1$，

$\because DF=CF-CD=3-2=1$，在直角$\triangle DFH$ 中，$FH$ 为斜边，

解直角$\triangle DFH$ 得：$FH=\sqrt{2}$，

又$\because FM=\dfrac{1}{2}FH$，$\therefore FM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2)如图，点 $A$，$B$，$E$ 在同一条直线上，正方形 $ABCD$，$BEFG$ 的边长分别为 3，4，$H$ 为线段 $DF$ 的中点，则 $BH$=_________.




【解析】连接 $CH$、$GH$，延长 $CH$ 交 $FG$ 于 $N$，过 $H$ 作 $HM\perp BG$ 于 $M$，

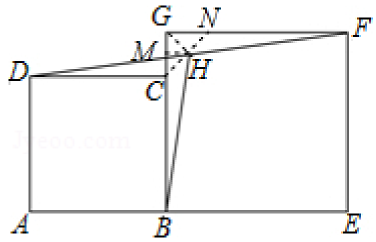
$\because$四边形 $ABCD$，$BEFG$ 都是正方形，$\therefore\angle FGC=\angle DCB=90°$，$\therefore\angle DCG=\angle FGC=90°$，

$\therefore GF//DC$，$\therefore\angle NFH=\angle CDH$，在$\triangle NHF$ 和$\triangle CHD$ 中，$\because\begin{cases}\angle DHC=\angle NHF\\ DH=FH\\ \angle CDH=\angle NFH\end{cases}$，

$\therefore\triangle NHF\cong\triangle CHD(ASA)$，$\therefore NH=CH$，$CD=NF=3$，$\therefore GN=CG=4-3=1$，

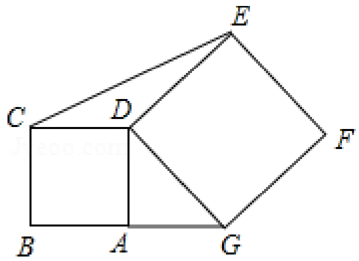
$\because HM // NG$，$\therefore CM = MG = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2}$，$\therefore MH = \frac{1}{2}GN = \frac{1}{2}$，$\therefore BM = BG - MG = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$，

Rt△BMH 中，由勾股定理是：$BH = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$，




3.

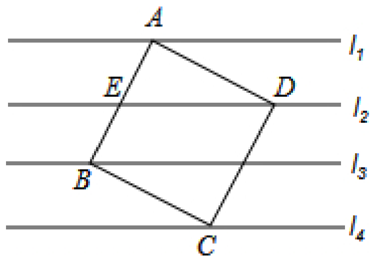
如图，点 $A$ 在 $BG$ 上，四边形 $ABCD$ 与 $DEFG$ 都是正方形，其面积分别为 7 平方厘米，11 平方厘米，则△$CDE$ 面积为__________.




【答案】$\sqrt{7}$ 平方厘米 .

4.

正方形 $ABCD$ 的四个顶点 $A$、$B$、$C$、$D$ 正好分别在四条平行线 $l_1$、$l_3$、$l_4$、$l_2$ 上．若从上到下每两条平行线间的距离都是 $2cm$，则正方形 $ABCD$ 的面积为_______.




【解析】作 $EF \perp l_2$，交 $l_1$ 于 $E$ 点，交 $l_4$ 于 $F$ 点.

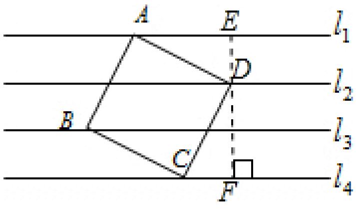
$\because l_1 // l_2 // l_3 // l_4$，$EF \perp l_2$，$\therefore EF \perp l_1$，$EF \perp l_4$，即 $\angle AED = \angle DFC = 90°$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore \angle ADC = 90°$ $\therefore \angle ADE + \angle CDF = 90°$

又 $\because \angle ADE + \angle DAE = 90°$，$\therefore \angle CDF = \angle DAE$，

在△$ADE$ 与△$DCF$ 中，$\angle EAD = \angle FDC$，$\angle AED = \angle DFC$，$AD = CD$

$\therefore$ △$ADE$≌△$DCF$，$\therefore CF = DE = 2$．$\because DF = 4$，$\therefore CD^2 = 2^2 + 4^2 = 20$，即正方形 $ABCD$ 的面积为 $20cm^2$



5.

如图 1，正方形 $ABCD$ 中，点 $O$ 是对角线 $AC$ 的中点，点 $P$ 是线段 $AO$ 上（不与 $A$、$O$ 重合）的一个动点，过点 $P$ 作 $PE\perp PB$ 且交边 $CD$ 于点 $E$.

（1）求证：$PB=PE$；

（2）过点 $E$ 作 $EF\perp AC$ 于点 $F$，如图 2，若正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则在点 $P$ 运动的过程中，$PF$ 的长度是否发生变化？若不变，请直接写出这个不变的值；若变化，请说明理由.

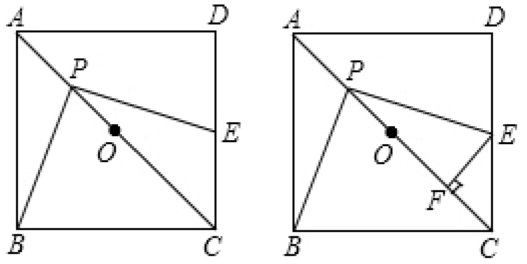



图 1　　图 2

【解析】如图 1，过 $P$ 作 $MN\,/\!/\,AD$，交 $AB$ 于 $M$，交 $CD$ 于 $N$，

∵$PB\perp PE$，∴$\angle BPE=90°$，∴$\angle MPB+\angle EPN=90°$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$\angle BAD=\angle D=90°$，∵$AD\,/\!/\,MN$，

∴$\angle BMP=\angle BAD=\angle PNE=\angle D=90°$，∴$\angle MPB+\angle MBP=90°$，

∴$\angle EPN=\angle PBM$，$Rt\triangle PNC$ 中，$\angle PCN=45°$，

∴$\triangle PNC$ 是等腰直角三角形，∴$PN=CN$，

∵$\angle BMP=\angle PNC=\angle ABC=90°$，∴四边形 $MBCN$ 是矩形，

∴$BM=CN$，∴$BM=PN$，∴$\triangle BMP\cong\triangle PNE$（$ASA$），∴$PB=PE$；

（2）在 $P$ 点运动的过程中，$PF$ 的长度不发生变化，理由是：如图 2，连接 $OB$，

∵点 $O$ 是正方形 $ABCD$ 对角线 $AC$ 的中点，∴$OB\perp AC$，

∴$\angle AOB=90°$，∴$\angle AOB=\angle EFP=90°$，∴$\angle OBP+\angle BPO=90°$，

∵$\angle BPE=90°$，∴$\angle BPO+\angle OPE=90°$，∴$\angle OBP=\angle OPE$，

由（1）得：$PB=PE$，∴$\triangle OBP\cong\triangle FPE$，∴$PF=OB$，

∵$AB=2$，$\triangle ABO$ 是等腰直角三角形，∴$OB=\sqrt{2}$

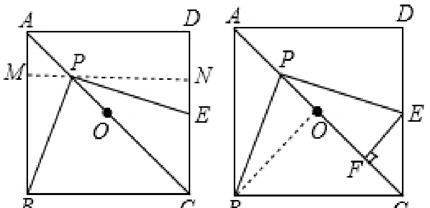


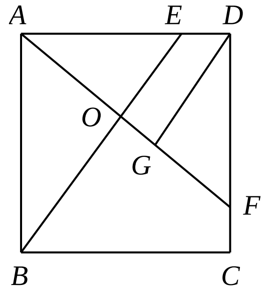

图1　　图2

6.
如图，正方形 $ABCD$ 中，$E$、$F$ 分别是 $AD$、$CD$ 上的点，$DE=CF$， $AF$ 与 $BE$ 相交于 $O$，$DG\perp AF$，垂足为 $G$.

（1）求证：$\triangle AEB\cong\triangle DFA$

（2）求证：$DG//BE$

（3）若 $GO=\sqrt{2},\ AO=3\sqrt{2}$，求正方形的边长.




【解析】(1) 在正方形 $ABCD$ 中，$AD=AB=CD$，$\angle BAD=\angle ADF=90^\circ$，$\because ED=CF$ $\therefore AE=DF$

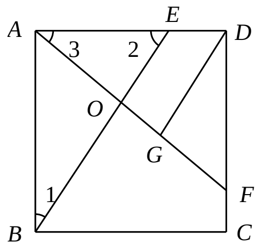
在$\triangle AEB$ 和$\triangle DFA$ 中 $\begin{cases} AE=DF \\ \angle BAE=\angle ADF \\ AB=DA \end{cases}$，$\therefore\triangle AEB\cong\triangle DFA$（$SAS$）.

（2）由（1）知，$\angle 1=\angle 3$，又 $\angle 1+\angle 2=90^\circ$，$\therefore\angle 2+\angle 3=90^\circ$，$\therefore EB\perp AF$

$\because DG\perp AF$ ，$\therefore DG//BE$

（3）在$\triangle ABO$ 与$\triangle ADG$ 中 $\begin{cases} \angle 1=\angle 3 \\ \angle AOB=\angle DGA \\ AB=DA \end{cases}$ ，$\therefore\triangle ABO\cong\triangle DAG$（$AAS$）

$\therefore BO=AG=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ 在 $Rt\triangle ABO$ 中，$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=5\sqrt{2}$.



# 第八讲、旋转（一）

## 模块一、旋转基础

知识集锦

旋转的三要素：①旋转中心 ②旋转方向 ③旋转角度

旋转的性质：

①对应点到旋转中心的距离相等.

②对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角度.

③旋转前后的图形全等.

旋转的本质：邻边相等

【例1】

（1）如图，在△$ABC$ 中，∠$CAB$=65°，将△$ABC$ 在平面内绕点 $A$ 旋转到△$AB'C'$ 的位置，使 $CC'$∥$AB$，则旋转角的度数为__________。

（2）如图，在 $Rt$△$ABC$ 中，∠$ABC$=90°，$AB=BC=\sqrt{2}$，将△$ABC$ 绕点 $C$ 逆时针旋转 60°，得到△$MNC$，连接 $BM$，则 $BM$ 的长是________。

（3）如图，△$ABC$ 绕点 $A$ 顺时针旋转 45°得到△$AB'C'$，若∠$BAC$=90°，$AB=AC=\sqrt{2}$，则图中阴影部分的面积等于________。

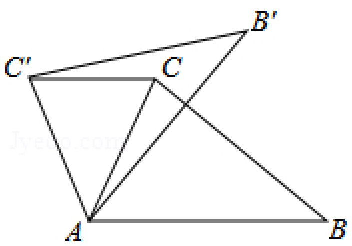



图 1-1

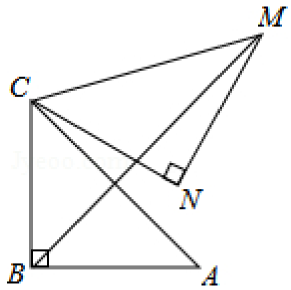



图 1-2

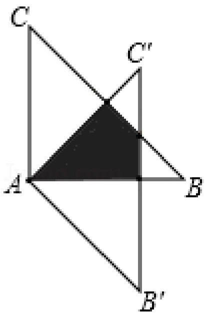
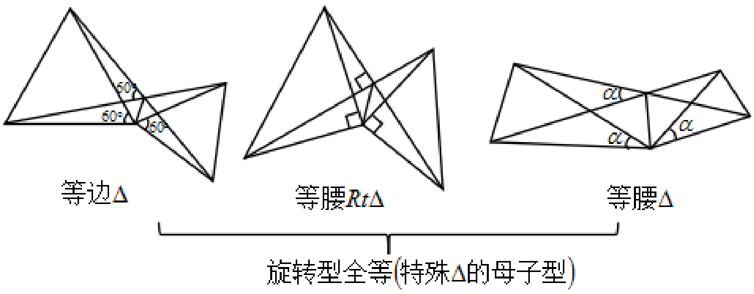



图 1-3

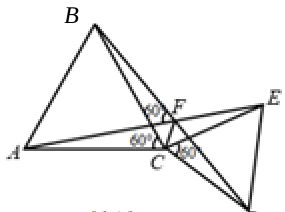
# 模块二、母子型

## 知识集锦




特点：两个顶角相等的等腰三角形共用顶角顶点，则一定会产生一组 $SAS$ 的全等三角形。

相关结论：

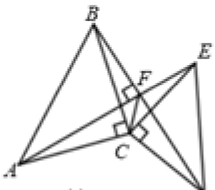



等边Δ

1、$\triangle ACE \cong \triangle BCD(SAS) \Rightarrow AE = BD$;

2、$\angle AFB = 60°$;

3、$CF$ 平分 $\angle AFD$（利用对应边高相等得到垂线段相等）；

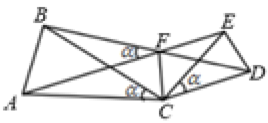



等腰RtΔ

1、$\triangle ACE \cong \triangle BCD(SAS) \Rightarrow AE = BD$;

2、$\angle AFB = 90°$;

3、$CF$ 平分 $\angle AFD$（利用对应边高相等得到垂线段相等）；




等腰Δ

1、$\triangle ACE \cong \triangle BCD(SAS) \Rightarrow AE = BD$;

2、$\angle AFB = \alpha$;

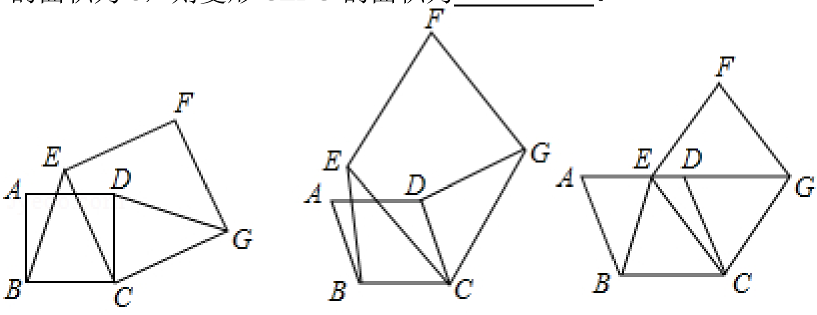
3、$CF$ 平分 $\angle AFD$（利用对应边高相等得到垂线段相等）；

【例2】

【感知】如图①，四边形 *ABCD*、*CEFG* 均为正方形．可知 $BE=DG$。

【拓展】如图②，四边形 *ABCD*、*CEFG* 均为菱形，且 $\angle A=\angle F$，求证：$BE=DG$。

【应用】如图③，四边形 *ABCD*、*CEFG* 均为菱形，点 *E* 在边 *AD* 上，点 *G* 在 *AD* 延长线上．若 $AE=2ED$，$\angle A=\angle F$，$\triangle EBC$ 的面积为 8，则菱形 *CEFG* 的面积为__________。




图①　　图②　　图③

【例3】

如图 1，已知 $\angle DAC=90°$，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 *P* 为射线 *AD* 上任意一点（点 *P* 与点 *A* 不重合），连结 *CP*，将线段 *CP* 绕点 *C* 顺时针旋转 60° 得到线段 *CQ*，连结 *QB* 并延长交直线 *AD* 于点 *E*。

（1）如图 1，猜想 $\angle QEP=$_______°；

（2）如图 2，3，若当 $\angle DAC$ 是锐角或钝角时，其它条件不变，猜想 $\angle QEP$ 的度数，选取一种情况加以证明；（3）如图 3，若 $\angle DAC=135°$，$\angle ACP=15°$，且 $AC=4$，求 *BQ* 的长。

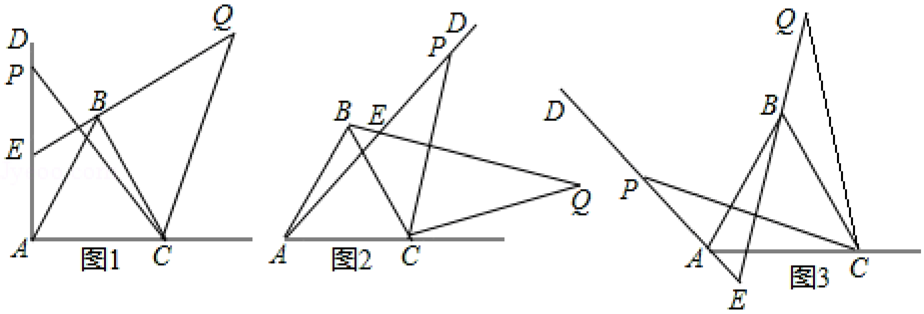
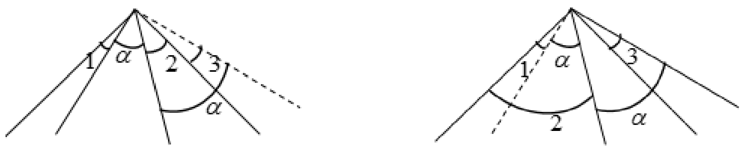



图1　　图2　　图3

# 模块三、大角夹半角

## 知识集锦

1．大角夹半角：思路：将两个不确定的角度通过变换放在一起构造相等的半角；



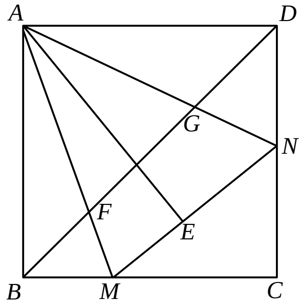

若 $\angle 1+\angle 2=\alpha$

则作 $\angle 3=\angle 1$，使得 $\angle 3+\angle 2=\alpha$

若 $\angle 2-\angle 1=\alpha$

则作 $\angle 3=\angle 1$，使得 $\angle 2-\angle 3=\alpha$

2．正方形中大角夹半角常见结论：




① $MN = BM + DN$；

② $AB = AE$；

③$AM$ 平分 $\angle BAE$，$AN$ 平分 $\angle DAE$；

④ $BF^2 + GD^2 = FG^2$。

3．进阶：（角可以这么处理，线段也可以这么处理，本质一样）

针对条件 $\angle A = 2\angle B$，处理本质就是构造相等的角（相等角会提供更多的条件，比如在一个三角形中，可以得到等腰三角形；如果在两个三角形中可以证全等或者相似；当然还可以帮助倒角）

处理方法：1、大角变小：①作角分线；②构造为等腰三角形的外角

2、小角变大：在小角旁边作一个相等的角即可

【例4】

在△*ABC* 中，∠*ACB*=90°，*CA*=*CB*，*D*、*E* 是直线 *AB* 上的点，且满足∠*DCE*=45°；

（1）当点 *D*、*E* 在线段 *AB* 上时，证明：$DE^2 = AD^2 + EB^2$；

（2）当点 *D* 在线段 *AB* 上，点 *E* 在线段 *AB* 延长线时：证明：$DE^2 = AD^2 + EB^2$.

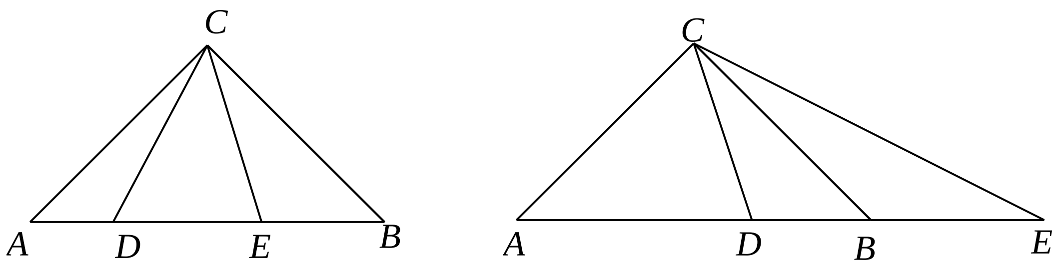



图1　　　　　　　　图2

【解析】（1）将△*CAD* 绕点 *C* 逆时针旋转 90°至△*CBF*，连接 *EF*，如图 1

∴△*CAD*≌△*CBF*, ∠*DCF*=90°（旋转角为 90°）

∴*CD*=*CF*，*AD*=*BF*，∠*A*=∠*CBF*

∵∠*DCE*=45°

∴ $\angle ECF = \angle FCD - \angle DCE = 45°$

∵∠*ACB*=90°，*CA*=*CB*

∴∠*A*=∠*CBA*=45°

∴∠*EBF*=∠*ABC*+∠*CBF*=45°+45°=90°

在△*CED* 和△*CEF* 中

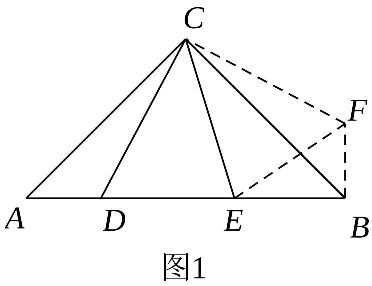



图1

$$\begin{cases} CD = CF \\ \angle ECD = \angle ECF = 45° \\ CE = CE \end{cases}$$

∴△$CED$≌△$CEF$（$SAS$）
∴$ED$=$EF$
在 $Rt$△$BEF$ 中， $EF^2 = BF^2 + EB^2$
∴ $DE^2 = AD^2 + EB^2$

（2）将△$CAD$ 绕点 $C$ 逆时针旋转 90°至△$CBF$，连接 $EF$，如图 2
∴△$CAD$≌△$CBF$,∠$DCF$=90°（旋转角为 90°）
∴$CD$=$CF$，$AD$=$BF$，∠$A$=∠$CBF$=45°
∵∠$DCE$=45°
∴ $\angle ECF = \angle FCD - \angle DCE = 45°$
∵∠$ACB$=90°，$CA$=$CB$
∴∠$A$=∠$CBA$=45°
∴∠$EBF$=∠$ABC$+∠$CBF$=45°+45°=90°
在△$CED$ 和△$CEF$ 中

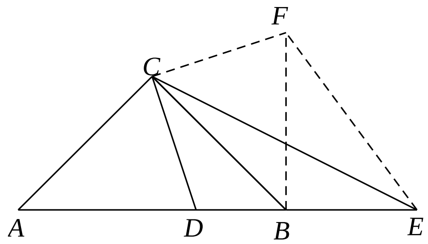


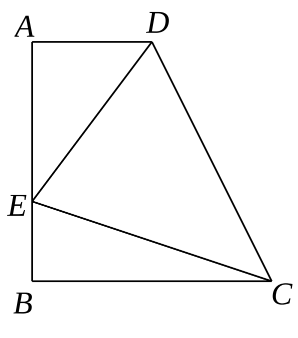
图2

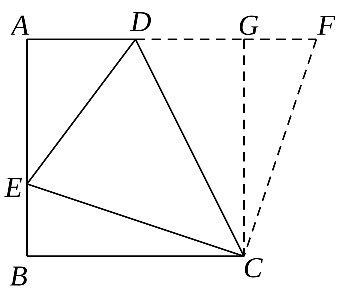
$$\begin{cases} CD = CF \\ \angle ECD = \angle ECF = 45° \\ CE = CE \end{cases}$$

∴△$CED$≌△$CEF$（$SAS$）
∴$ED$=$EF$
在 $Rt$△$BEF$ 中， $EF^2 = BF^2 + EB^2$
∴ $DE^2 = AD^2 + EB^2$

【例5】

如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD//BC(BC > AD)$， $\angle B = 90°$， $AB = BC = 12$， $E$ 是 $AB$ 上一点，且 $\angle DCE = 45°$， $BE = 4$，求 $DE$ 的长.




【解析】过 $C$ 作 $CG \perp AD$ 于 $G$，并延长 $DG$，使 $GF = BE$，如图

在直角梯形 $ABCD$ 中

$\because AD//BC$， $\angle A = \angle B = 90°$， $\angle CGA = 90°$， $AB = BC$，

$\therefore$ 四边形 $ABCG$ 为正方形，

$\therefore AG = BC = 12$，

在△$CBE$ 和△$CGF$ 中

$$\begin{cases} CB = CG \\ \angle CBE = \angle CGF = 90^\circ \\ BE = GF \end{cases}$$

∴△$CBE$≌△$CGF$（$SAS$）

∴$CE$=$CF$，∠$ECB$=∠$FCG$

$\because \angle DCE = 45^\circ$

∴∠$ECB$+∠$DCG$=45°

∴∠$FCG$+∠$DCG$=45°

∴∠$DCF$=45°=∠$ECD$

在△$DCE$ 和△$DCF$ 中

$$\begin{cases} DC = DC \\ \angle DCE = \angle DCF \\ CE = CF \end{cases}$$

∴△$DCE$≌△$DCF$（$SAS$）

$\therefore ED = FD$ .

$\therefore DE = DF = GF + DG = BE + DG$，

设 $DE = x$，则 $DG = x - 4$，

$\therefore AD = AG - DG = 16 - x$

在 Rt△AED 中，$\because DE^2 = AD^2 + AE^2$，

$\therefore x^2 = (16 - x)^2 + 8^2$

$\therefore x = 10$，

即 $DE = 10$ .

【例6】

（1）如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$E$、$F$ 分别是边 $BC$、$CD$ 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$．求证：$EF=BE+FD$．

（2）如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180^\circ$，$E$、$F$ 分别是边 $BC$、$CD$ 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出线段 $EF$、$BE$、$FD$ 之间的数量关系，并证明．

（3）如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle ADC=180^\circ$，$E$、$F$ 分别是边 $BC$、$CD$ 延长线上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出线段 $EF$、$BE$、$FD$ 之间的数量关系，并证明．

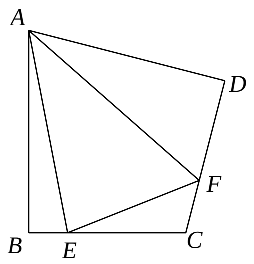


图1

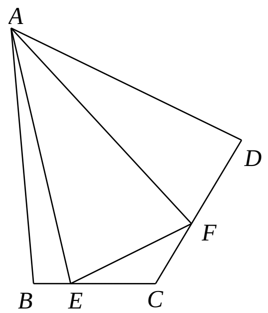


图2

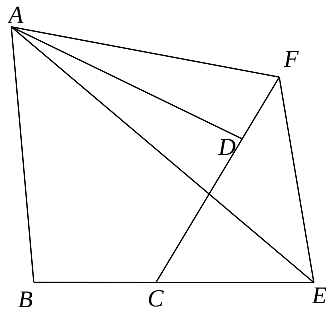


图3

【解析】（1）如图 1，延长 $EB$ 到 $G$，使 $BG=DF$，连接 $AG$．

在 $\Delta ABG$ 与 $\Delta ADF$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle ABG=\angle ADF=90^\circ \\ BG=DF \end{cases},$$

$\therefore \Delta ABG\cong\Delta ADF(SAS)$．

$\therefore AG=AF$，$\angle 1=\angle 2$．

$\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3=\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$．

$\therefore \angle GAE=\angle EAF$．

在 $\triangle AEG$ 与 $\triangle AEF$ 中，

$$\begin{cases} AE=AE \\ \angle EAG=\angle EAF \\ AG=AF \end{cases}$$

$\therefore \Delta AEG \cong \Delta AEF(SAS)$.

$\therefore EG = EF$.

$\because EG = BE + BG$.

$\therefore EF = BE + FD$

（2）

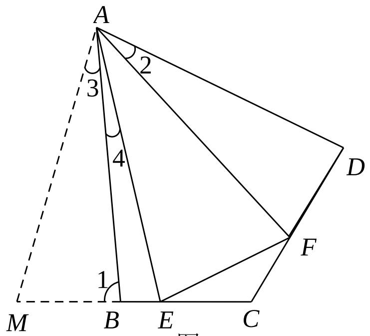


图2

结论 $EF = BE + FD$ 仍然成立.

证明：如图 2，延长 $CB$ 至 $M$，使 $BM = DF$，

$\because \angle ABC + \angle D = 180°$，$\angle 1 + \angle ABC = 180°$，

$\therefore \angle 1 = \angle D$，

在 $\Delta ABM$ 与 $\Delta ADF$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle 1 = \angle D \\ BM = DF \end{cases}，$$

$\therefore \Delta ABM \cong \Delta ADF(SAS)$.

$\therefore AF = AM$，$\angle 2 = \angle 3$.

$\because \angle EAF = \dfrac{1}{2}\angle BAD$，

$\therefore \angle 2 + \angle 4 = \dfrac{1}{2}\angle BAD = \angle EAF$.

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = \angle EAF$，即 $\angle MAE = \angle EAF$.

在 $\Delta AME$ 与 $\Delta AFE$ 中，

$$\begin{cases} AM = AF \\ \angle MAE = \angle EAF \\ AE = AE \end{cases}，$$

$\therefore \Delta AME \cong \Delta AFE(SAS)$.

$\therefore EF = ME$，即 $EF = BE + BM$.

$\therefore EF = BE + DF$.

（3）结论 $EF = BE + FD$ 不成立，应为 $EF = BE - FD$.

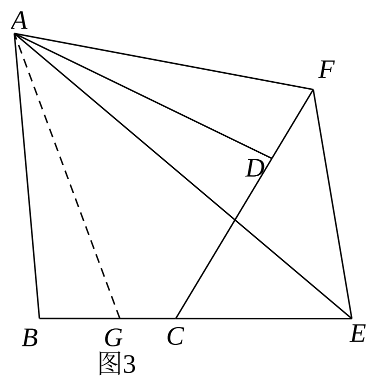


图3

证明：如图 3，在 $BE$ 上截取 $BG$，使 $BG = DF$，连接 $AG$.

$\because \angle B + \angle ADC = 180°$，$\angle ADF + \angle ADC = 180°$，

$\therefore \angle B=\angle ADF$ .

$\because$ 在 $\Delta ABG$ 与 $\Delta ADF$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle ABG=\angle ADF \\ BG=DF \end{cases}，$$

$\therefore \Delta ABG \cong \Delta ADF(SAS)$ .

$\therefore \angle BAG=\angle DAF$， $AG=AF$ .

$\therefore \angle BAG+\angle EAD=\angle DAF+\angle EAD=\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$ .

$\therefore \angle GAE=\angle EAF$ .

在 $\triangle AEG$ 与 $\triangle AEF$ 中，

$$\begin{cases} AE=AE \\ \angle EAG=\angle EAF \\ AG=AF \end{cases}$$

$\therefore \Delta AEG \cong \Delta AEF(SAS)$ .

$\therefore EG=EF$

$\because EG=BE-BG$

$\therefore EF=BE-FD$ .

【例7】

如图：在$\Delta ABC$中，$\angle BAC=110°$，$AC=AB$，射线$AD$、$AE$的夹角为$55°$，过点$B$作$BF\perp AD$于点$F$，直线$BF$交$AE$于点$G$，连结$CG$.

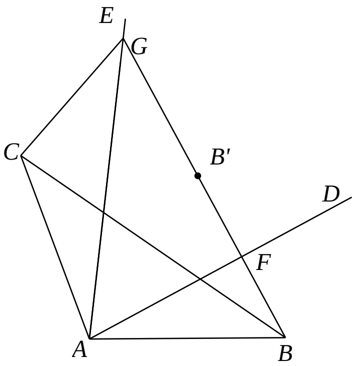



图1

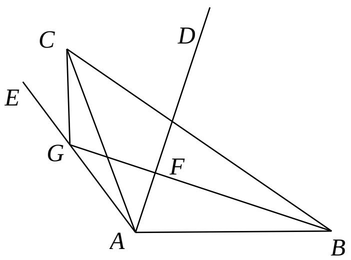



图2

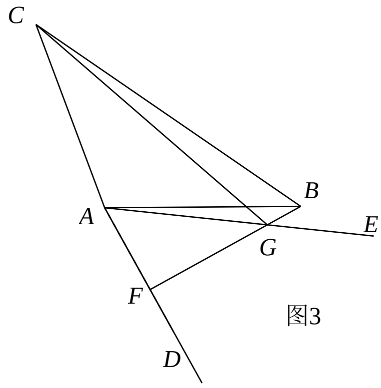



图3

（1）如图1，若射线$AD$、$AE$都在$\angle BAC$的内部，且点$B$与点$B'$关于$AD$对称，求证：$CG=B'G$；

（2）如图2，若射线$AD$在$\angle BAC$的内部，射线$AE$在$\angle BAC$的外部，其他条件不变，求证：$CG=BG-2GF$；

（3）如图3，若射线$AD$、$AE$都在$\angle BAC$的外部，其他条件不变，若$CG=\frac{14}{5}GF$，$AF=3$，$S_{\Delta ABG}=7.5$，求$BF$的长.

【解析】（1）证明：如图1，连接$AB'$，

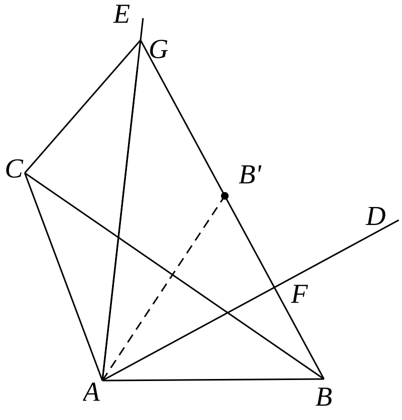



图1

$\because B$，$B'$关于$AD$对称，

$\therefore BB'$被$AD$垂直平分，

$\therefore AB'=AB$，

$\because AC=AB$，

$\therefore AC=AB'$，

$\because AF\perp BG$，

$\therefore \angle BAF=\angle B'AF$，

$\because \angle GAF=55°$，

$\therefore \angle B'AF+GAB'=55°$，

$\because \angle CAB=110°$，

$\therefore \angle CAG+\angle FAB=55°$，

$\therefore \angle B'AF+\angle GAB'=\angle CAG+\angle FAB$，

$\because \angle BAF=\angle B'AF$，

$\therefore \angle GAB'=\angle CAG$，

$\because AG=AG$，

$\therefore \Delta CGA\cong \triangle B'GA$，

$\therefore CG=B'G$，

（2）证明：如图 2，在 $FB$ 上截取 $FG'=GF$，连接 $AG'$，

$\because BF\perp AD$，$\therefore AG=AG'$，

$\therefore \angle GAF=\angle G'AF$，

$\therefore \angle GAG'=2\angle GAF=110^{\circ}$，

$\because \angle CAB=110^{\circ}$，

$\therefore \angle GAG'=\angle CAB$，

$\therefore \angle GAG'-\angle CAG'=\angle CAB-\angle CAG'$，

$\therefore \angle GAC=\angle G'AB$，

$\because AC=AB$，

$\therefore \Delta GAC\cong \triangle G'AB$，

$\therefore CG=G'B$，

$\because FG'=GF$，

$\therefore CG'=2GF$，

$\because GB=GG'+G'B$，

$\therefore GB=2GF+CG$，

$\therefore CG=GB-2GF$，

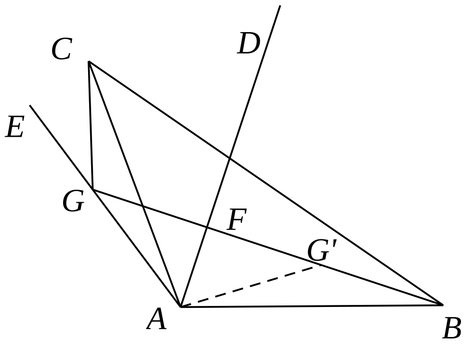



图2

（3）解：延长 $BF$ 至点 $G'$，使 $G'F=GF$，连接 $AG'$，

$\because BF\perp AD$，

$\therefore AG=AG'$，

$\therefore \angle GAF=\angle G'AF$，

$\therefore \angle GAG'=2\angle GAF=110^{\circ}$，

$\because \angle CAB=110^{\circ}$，

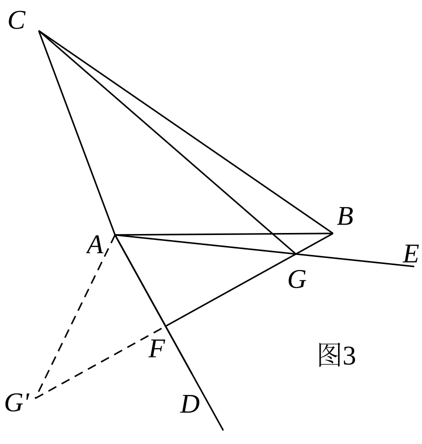



图3

$\therefore \angle GAG' = \angle CAB$，

$\therefore \angle GAG' - \angle CAG' = \angle CAB - \angle CAG'$，

$\therefore \angle GAC = \angle G'AB$，

$\because AC = AB$，

$\therefore \Delta GAC \cong \triangle G'AB$，

$\therefore CG = G'B$，

$\because CG = \frac{14}{5}GF$，

$\therefore$ 设 $GF = 5k$， $CG = 14k$，

$\therefore G'F = 5k$， $BG' = 14k$，

$\therefore BG = 4k$，

$\because S_{\Delta ABG} = 7.5$， $AF = 3$，

$\therefore \frac{1}{2}BG \cdot AF = 7.5$，

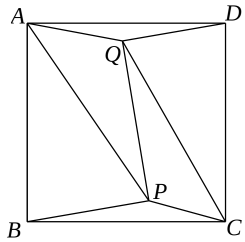
$\therefore \frac{1}{2} \times 4k \times 3 = 7.5$，

$\therefore k = \frac{5}{4}$，

$\therefore BF = 9k = \frac{45}{4}$．

# 巅峰挑战

如图,已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1,$P$、$Q$ 是其内两点,且 $\angle PAQ=\angle PCQ=45^\circ$. 求 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCQ}+S_{\triangle QAD}$ 的值.




【解析】如图，将$\triangle ADQ$ 绕点 $A$ 顺时针旋转 $90^\circ$ 至$\triangle ABM$ 处，

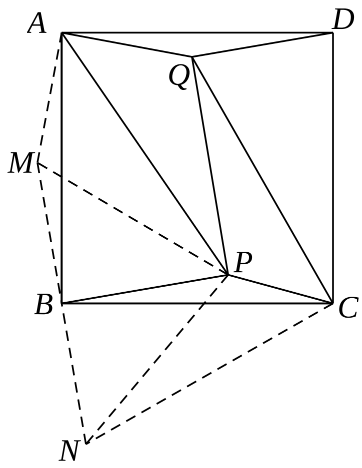
使 $AD$ 与 $AB$ 重合，连接 $PM$ .

将$\triangle CQD$ 绕点 $C$ 逆时针旋转 $90^\circ$ 至$\triangle CBN$ 处，

使 $CD$ 与 $CB$ 重合，连接 $PN$ .

由旋转可知：$\triangle ABM\cong\triangle ADQ$

$\therefore AM=AQ$，$QD=MB$，$\angle MAB=\angle QAD$，$\angle$MBA=$\angle$QDA，$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ADQ}$




又 $\angle PAQ=45^\circ=\frac{1}{2}\angle BAD$

$\therefore \angle MAP=\angle MAB+\angle PAB=QAD+\angle PAB=45^\circ$

$\therefore \angle PAQ=\angle MAP$

又 $AQ=AM$，$AP=AP$

$\therefore \triangle APQ\cong\triangle APM$（SAS）

$\therefore S_{\triangle APQ}=S_{\triangle APM}\quad PM=PQ$

同理：$\triangle CDQ\cong\triangle CBN$；$\triangle CPQ\cong\triangle CPN$

$\therefore$BN=QD，$\angle$CDQ=$\angle$CBN，$S_{\triangle BCN}=S_{\triangle DCQ}$；PQ=PN，$S_{\triangle CPQ}=S_{\triangle CPN}$

$\therefore BM=BN$，PM=PN

$\because$ $BP=BP$

$\therefore \triangle PBM\cong\triangle PBN$（SSS）

$\therefore S_{\triangle PBM}=S_{\triangle PBN}$

$\because \angle$MBA=$\angle$QDA，$\angle$CDQ=$\angle$CBN

$\therefore \angle$MBA+$\angle$CBN=$\angle$QDA+$\angle$CDQ=90°

$\therefore \angle$MBA+$\angle$CBN+$\angle$ABC=180°

$\therefore M$、$B$、$N$ 三点共线

$\therefore S_{五边形AMNCQ}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BCN}+S_{四边形ABCQ}=S_{\triangle ADQ}+S_{\triangle DCQ}+S_{四边形ABCQ}=S_{正方形ABCD}=1$

$\therefore S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCQ}+S_{\triangle QAD}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle MAB}+S_{\triangle PCQ}=S_{\triangle PCQ}+S_{四边形PAMB}$

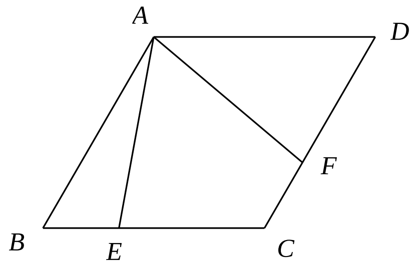
$=S_{\triangle PCQ}+S_{\triangle PAM}+S_{\triangle MPB}=\frac{1}{2}S_{五边形AMNCQ}=\frac{1}{2}$

# 笔记整理

# 课后练习

1.

如图所示，四边形 $ABCD$ 为菱形，且$\angle B$=60°，过点 $A$ 作两条射线 $AE$，$AF$，分别与 $BC$ 和 $CD$ 交于点 $E$，$F$，使得$\angle EAF$=60°，求证：$\triangle AEF$ 为等边三角形。




【解析】证明：连接 $AC$

∵四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle B$=60°

∴$AB$=$AC$=$AD$, $\angle ACB$=$\angle DAC$=$\angle D$=60°

∵ $\angle EAC$＋$\angle CAF$=$\angle EAF$=60°, $\angle DAF$＋$\angle CAF$=$\angle DAC$=60°

∴ $\angle EAC$=$\angle DAF$

∵ $\angle ACB$=$\angle D$, $AC$=$AD$, $\angle EAC$=$\angle DAF$

∴$\triangle ACE\cong\triangle ADF$(角边角)

∴$AE$=$AF$

2.

已知等边$\triangle ABC$，$D$ 是 $BC$ 中点，$\angle EDF=120°$，$DE$ 与 $AB$ 相交于点 $E$，$DF$ 与 $AC$ 或者 $AC$ 的延长线交于点 $F$；

（1）如图 1，若 $DF\perp AC$，$AB=4$，求 $BE$ 的长；

（2）如图 2，将（1）中的$\angle EDF$ 绕点 $D$ 顺时针旋转一定角度，$DF$ 与线段 $AC$ 仍交于点 $F$，求证：$BE+CF=\frac{1}{2}AB$。

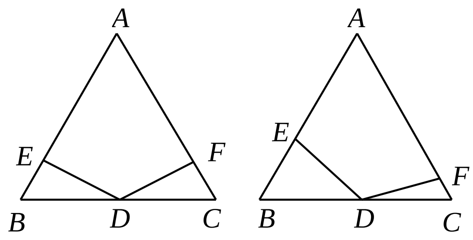



图1　　图2

【解析】（1）证明：连结 $AD$,

∵$\triangle ABC$ 为正三角形, 且 $D$ 为 $BC$ 边中点, ∴$AD$ 满足三线合一, ∴$\angle BAD$=30°, $\angle ADB$=90°，

∵$AB$=4, ∴$BD$=2,

∵ $\angle A$=60°，$\angle EDF$=120°，$\angle AFD$=90°，∴$\angle AED$=90°，

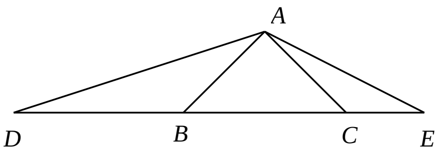
∵ $\angle B$=60°，∴$BE$=1。

（2）证明：作 $DG\parallel AC$,

易证$\triangle GDE\cong\triangle CDF$，则 $CF$=$EG$，即 $BE+CF=\frac{1}{2}AB$

3.

$D$、$E$ 是等腰 $Rt\triangle ABC$ 斜边 $BC$ 所在直线上的两点，满足 $\angle DAE=135°$。求证：$CD^2+BE^2=DE^2$。




【解析】如图, 因 $AB=AC$, $\angle BAC=90°$

∴将△$ABE$ 绕点 $A$ 旋转 90° 到 $AB$ 与 $AC$ 重合得△$ACF$, 连接 $EF$, $CF$, $DF$

∴△$ABE$≌△$ACF$, $\angle FAE=90°$

∴$BE=CF$, $AE=AF$, $\angle ACF=\angle ABE=45°$,

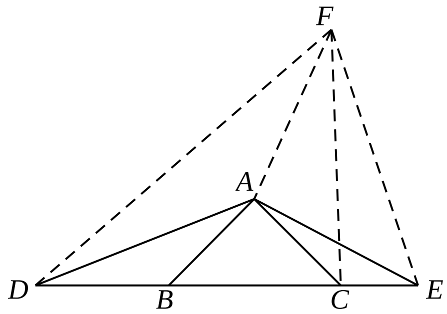
∵$\angle DAE=135°$ ∴$\angle DAF=360°-135°-90°=135°$ ∴$\angle DAE=\angle DAF$

△$DAE$ 与△$DAF$ 中有

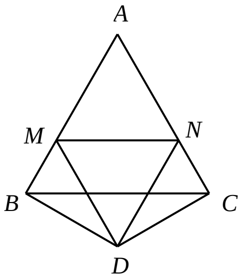
$DA=DA$, $\angle DAE=\angle DAF$, $AE=AF$

∴△$DAE$≌△$DAF$∴$DF=DE$

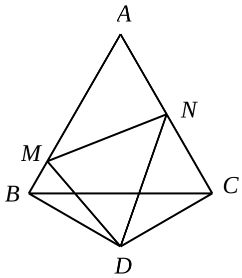
∵$\angle ACB=\angle ACF=45°$, ∴$\angle BCF=90°$, ∴$CD2+CF2=DF2$, ∴$CD2+BE2=DE2$



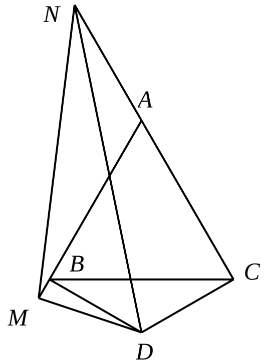
4.
在等边△$ABC$ 的两边 $AB$，$AC$ 所在直线上分别有两点 $M$，$N$，$D$ 为△$ABC$ 外一点，且$\angle MDN=60°$，$\angle BDC=120°$，$BD=CD$，探究：当点 $M$，$N$ 分别在直线 $AB$，$AC$ 上移动时，$BM$，$CN$，$MN$ 之间的数量关系及△$AMN$ 的周长 $Q$ 与等边△$ABC$ 的周长 $L$ 的关系。



图①



图②



图③

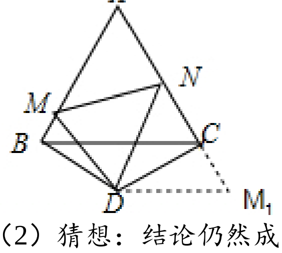
（1）如图①，当点 $M$，$N$ 在边 $AB$，$AC$ 上，且 $DM=DN$ 时，$BM$，$NC$，$MN$ 之间的数量关系式_________；此时 $\frac{Q}{L}=$__________

（2）如图②，当点 $M$，$N$ 在边 $AB$，$AC$ 上，且 $DM\neq DN$ 时，猜想（1）问的两个结论还成立吗？写出你的猜想并加以证明；

（3）如图③，当点 $M$，$N$ 分别在边 $AB$，$AC$ 的延长线上时，若 $AN=x$，则 $Q=$_________（用 $x$，$L$ 表示）。

【解析】（1）如图 1，$BM$、$NC$、$MN$ 之间的数量关系 $BM+NC=MN$，此时 $\frac{Q}{L}=\frac{2}{3}$

∵$DM=DN$，$\angle MDN=60°$，∴△$MDN$ 是等边三角形，
∵△$ABC$ 是等边三角形，∴$\angle A=60°$，
∵$BD=CD$，$\angle BDC=120°$，∴$\angle BDC=\angle DCB=30°$，∴$\angle MBD=\angle NCD=90°$，
∵$DM=DN$，$BD=CD$，∴$Rt$△$BDM$≌$Rt$△$CDN$，∴$\angle BDM=\angle CDN=30°$，$BM=CN$，
∴$DM=2BM$，$DN=2CN$，∴$MN=2BM=2CN=BM+CN$；
∴$AM=AN$，∴△$AMN$ 是等边三角形，∵$AB=AM+BM$，∴$AM$：$AB=2$：$3$，
∴ $\frac{Q}{L}=\frac{2}{3}$；




（2）猜想：结论仍然成立.
证明：在 $CN$ 的延长线上截取 $CM1=BM$，连接 $DM1$.
∵$\angle MBD=\angle M1CD=90°$，$BD=CD$，∴△$DBM$≌△$DCM1$，
∴$DM=DM1$，$\angle MBD=\angle M1CD$，$M1C=BM$，
∵$\angle MDN=60°$，$\angle BDC=120°$，∴$\angle M1DN=\angle MDN=60°$，∴△$MDN$≌△$M1DN$，
∴$MN=M1N=M1C+NC=BM+NC$，
∴△$AMN$ 的周长为：$AM+MN+AN=AM+BM+CN+AN=AB+AC$，
∴ $\frac{Q}{L}=\frac{2}{3}$

（3）证明：在 $CN$ 上截取 $CM1=BM$，连接 $DM1$.
可证△$DBM$≌△$DCM1$，∴$DM=DM1$，
可证$\angle M1DN=\angle MDN=60°$，∴△$MDN$≌△$M1DN$，∴$MN=M1N$，∴$NC-BM=MN$.

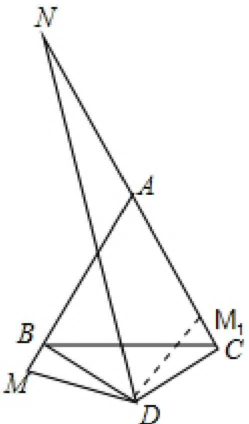


图3

# 第九讲、旋转（二）

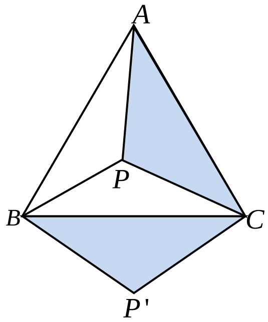
## 模块一、丫字型旋转

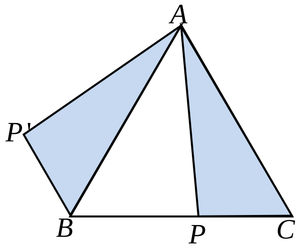
### 知识集锦

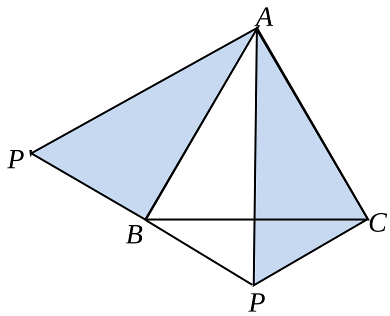
**“Y”字型旋转：**

**模型 *I*：等边三角形的“Y”字型旋转**

因为在旋转角为 $60°$ 的旋转变换下，任意一组对应点与旋转中心恰好构成一个正三角形的三个顶点，这样，对于条件中含有正三角形的平面几何问题，我们即可以考虑用旋转角为 $60°$ 的旋转变换处理．旋转中心可以选取正三角形的某个顶点。

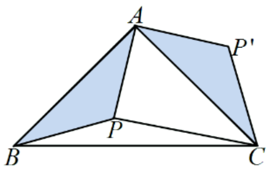


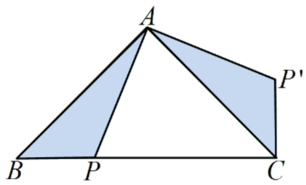



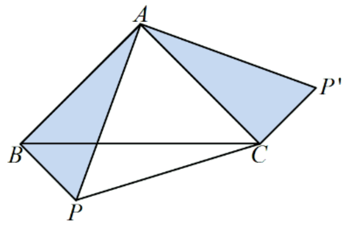




**模型 *II*：等腰直角三角形的“Y”字型旋转**

因为在旋转角为 $90°$ 的旋转变换下，任意一组对应点与旋转中心恰好构成一个等腰直角角形的三个顶点，这样，对于条件中含有等腰直角三角形的平面几何问题，我们即可以考虑用旋转角为 $90°$ 的旋转变换处理．旋转中心通常选取等腰直角三角形的直角顶点。

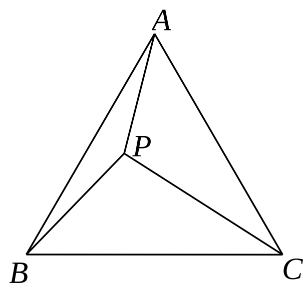


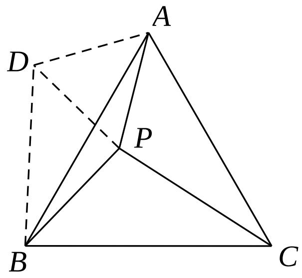

【例1】

（1）如图，等边三角形 $ABC$ 内有一点 $P$，$AP=3$，$BP=4$，$CP=5$，求 $\angle APB$ 的度数．



【解析】将△$ACP$ 绕着点 $A$ 顺时针旋转 60°至△$ABD$，连接 $DP$，

如图




∴△$ABD$≌△$ACP$，∠$DAP$=60°（旋转角为 60°）

$\therefore BD=PC=5$，$AD$=$AP$=3，∠$BAD$=∠$CAP$

∴△$APD$ 是等边三角形

∴$PD$=$AP$=$AD$=3，∠$APD$=60°

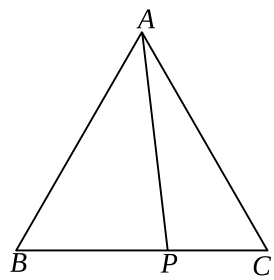
在△$BPD$ 中

∵ $BP^2+PD^2=4^2+3^2=25=BD^2$

$\therefore \angle BPD=90°$

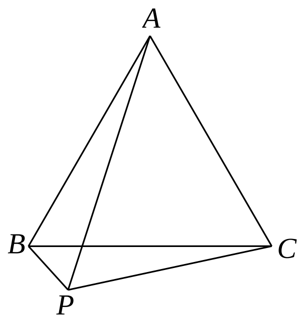
$\therefore \angle APB=\angle APD+\angle BPD=60°+90°=150°$.

（2）在等边$\Delta ABC$ 中，点 $P$ 为 $BC$ 边上的一点，且满足 $BP=2$，$CP=1$,求 $AP$ 的长？

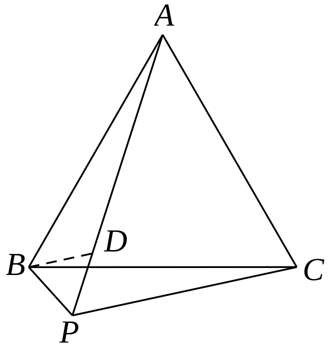



【解析】略

（3）在等边△$ABC$ 中，点 $P$ 是△$ABC$ 外的一点，连接 $AP$、$BP$、$CP$，若∠$BPC$=120°，证明：$AP$=$BP$+$CP$.




【解析】将△$BPC$ 绕点 $B$ 逆时针旋转 60°至△$BDA$，连接 $DP$（注意 $A$、$D$、$P$ 三点共线需要证明），如图




∴△$ABD$≌△$CBP$，∠$PBD$=60°（旋转角为 60°）

∴$BD$=$BP$，$AD$=$CP$，∠$ABD$=∠$CBP$，∠$ADB$=∠$CPB$=120°

∴△$BPD$ 是等边三角形

∴$DP$=$BP$，∠$BDP$=60°

∴∠$BDP$+∠$ADB$=180°

∴$A$、$D$、$P$ 三点共线

∴$AP$=$AD$+$PD$=$CP$+$BP$

【例2】

（1）如图 2-1，$P$ 是等边△$ABC$ 内部一点，$PC$=3，$PA$=4，$PB$=5，求∠APC 的度数和△$ABC$ 的边长。

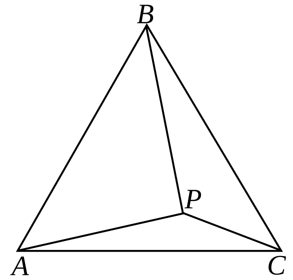



图 2-1

（2）如图 2-2，在等边△$ABC$ 中，$P$ 为 $BC$ 边上一点，则以 $AP$、$BP$、$CP$ 为边组成的新三角形的最大内角为$\theta$，则$\theta$为多少度？

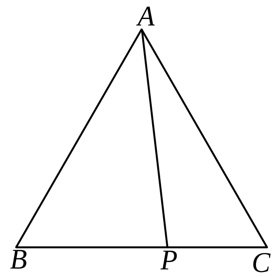



图 2-2

（3）如图 2-3，△$ABD$ 是等边三角形，在△$ABC$ 中，$BC=a$，$CA=b$，问：当∠$ACB$ 为何值时，$C$、$D$ 两点的距离最大？最大值是多少？

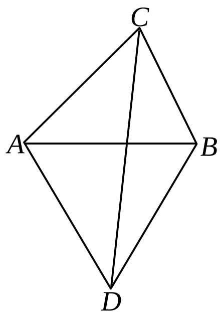



图 2-3

【例3】

（1）如图 3-1，在等腰直角三角形 $ABC$ 内有一点 $P$，且 $PA=\sqrt{5}$，$PB=\sqrt{2}$，$PC$=1。求∠$BPC$ 度数的大小和 $AB$ 的长。

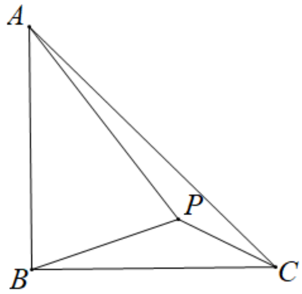



图 3-1

（2）如图 3-2，已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，点$D$是$BC$上的任意一点，探究：$BD$，$CD$与$AD$的关系，并证明你的结论。

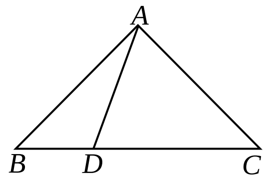



图 3-2

（3）如图 3-3，四边形$ABCD$被对角线$BD$分为等腰直角$\triangle ABD$和直角$\triangle CBD$，其中$\angle A$和$\angle C$都是直角，另一条对角线$AC$的长度为 2，求四边形$ABCD$的面积。

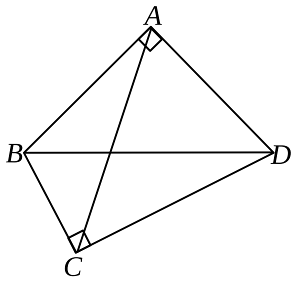
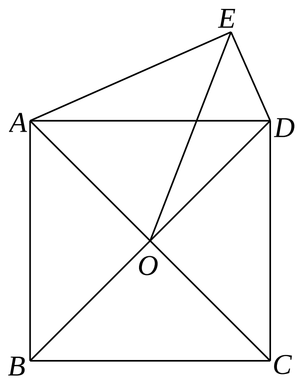


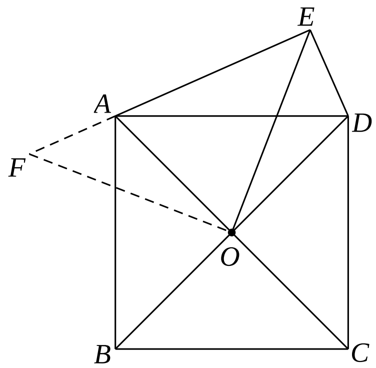

图 3-3

【例4】

如图，正方形$ABCD$的对角线交于点$O$，以$AD$为边向外作$\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{ADE}$，$\angle AED=90°$，连接$OE$，$DE=3$，$OE=4\sqrt{2}$，求$AE$的长．



【解析】延长 $EA$ 至点 $F$，使 $AF=DE$，连接 $OF$，如图




∵四边形 $ABCD$ 是正方形

∴△$OAD$ 是等腰直角三角形

∴$OA=OD$，$\angle AOD=90°$

∵$\angle AED=90°$

∴$\angle EAO+\angle EDO=180°$

∵$\angle EAO+\angle FAO=180°$

∴$\angle EDO=\angle FAO$

在△$EDO$ 和△$FAO$ 中

$$\begin{cases} ED=FA \\ \angle EDO=\angle FAO \\ DO=AO \end{cases}$$

∴△$EDO$≌△$FAO$（$SAS$）

∴$OE=OF$，$\angle AOF=\angle DOE$

∵$\angle DOE+\angle AOE=90°$

∴$\angle AOF+\angle AOE=90°$

∴$\angle EOF=90°$

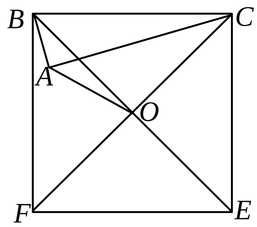
∴△$EOF$ 是等腰直角三角形

∴ $EF=\sqrt{2}OE=8$

∴$AE=EF-AF=EF-ED=8-3=5$

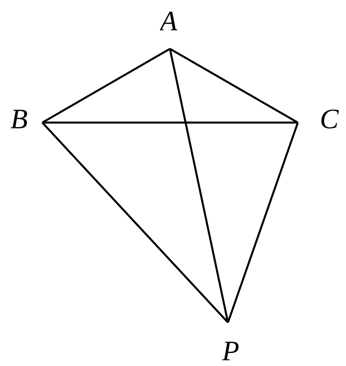
【例5】

如图，以 Rt△$ABC$ 的斜边 $BC$ 为一边在△$ABC$ 同侧作正方形 $BCEF$，设正方形的中心为 $O$，连接 $AO$，如果 $AB=4$，$AO=6\sqrt{2}$，求 $AC$ 的长。



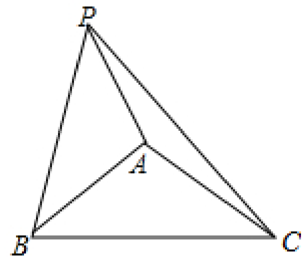
【例6】

如图在△$ABC$ 中，∠$BAC$=120°，$AB$=$AC$（三边之比$1:1:\sqrt{3}$），点 $P$ 在直线 $BC$ 下方，且∠$BPC$=60°，求证：$\sqrt{3}AP=BP+CP$



# 巅峰挑战

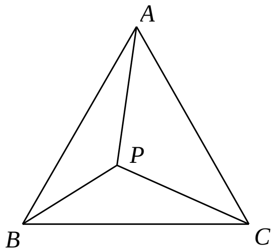
如图在△$ABC$ 中，∠$BAC$=120°，$AB$=$AC$，点 $P$ 在直线 $AB$ 上方，且∠$APB$=60°，满足$(kPA)^2+PB^2=PC^2$，请直接写出 $k$ 的值。



# 课后练习

1.

*P* 是等边△*ABC* 内一点，又∠*APB*、∠*BPC*、∠*CPA* 的大小之比是 5：6：7，则以 *PA*、*PB*、*PC* 为边的三角形的三个内角的大小之比是多少？




【解析】如图，将△*APB* 绕 *A* 点逆时针旋转 60°得△*AP*′*C*，显然有△*AP*′*C*≌△*APB*，连 *PP*′，

∵*AP*′=*AP*，∠*P*′*AP*=60°，∴△*AP*′*P* 是等边三角形，∴*PP*′=*AP*，

∵*P*′*C*=*PB*，∴△*P*′*CP* 的三边长分别为 *PA*，*PB*，*PC*，

∵∠*APB*+∠*BPC*+∠*CPA*=360°，∠*APB*：∠*BPC*：∠*CPA*=5：6：7，

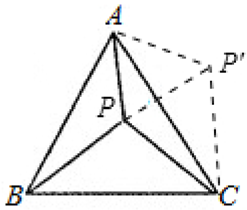
∴∠*APB*=100°，∠*BPC*=120°，∠*CPA*=140°，

∴∠*PP*′*C*=∠*AP*′*C*−∠*AP*′*P*=∠*APB*−∠*AP*′*P*=100°−60°=40°，

∠*P*′*PC*=∠*APC*−∠*APP*′=140°−60°=80°，

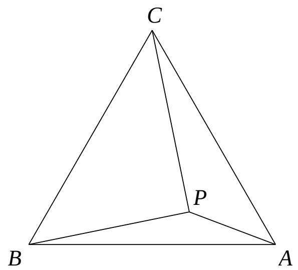
∠*PCP*′=180°−（40°+80°）=60°，

∴∠*PP*′*C*：∠*PCP*′：∠*P*′*PC*=2：3：4.




2.

如图所示，*P* 是等边△*ABC* 中的一点，$PA=2$，$PB=2\sqrt{3}$，$PC=4$，试求△*ABC* 的边长。




【解析】将△*BAP* 绕 *B* 点逆时针旋转 60°得△*BCM*，则 *BA* 与 *BC* 重合，如图，

∴*BM*=*BP*，*MC*=*PA*=2，∠*PBM*=60°．∴△*BPM* 是等边三角形，∴*PM*=*PB*=$2\sqrt{3}$，

在△*MCP* 中，*PC*=4，

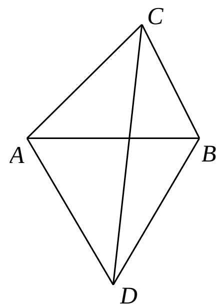
∴*PC*2=*PM*2+*MC*2 且 *PC*=2*MC*．∴△*PCM* 是直角三角形，且∠*CMP*=90°，∠*CPM*=30°．

又∵△*PBM* 是等边三角形，∠*BPM*=60°．∴∠*BPC*=90°，

∴*BC*2=*PB*2+*PC*2=（$2\sqrt{3}$）2+42=28，∴*BC*=$2\sqrt{7}$，故答案为 $2\sqrt{7}$

3.

如图所示，$\triangle ABD$ 是等边三角形，在$\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$CA=b$，问：当$\angle ACB$ 为何值时，$C$、$D$ 两点的距离最大？最大值是多少？




【解析】将 $\Delta DBC$ 绕 $D$ 点逆时针方向旋转 $60^o$，得 $\Delta DAE$，连接 $EC$，

则 $CD = ED$，且$\angle EDC = 60^o$

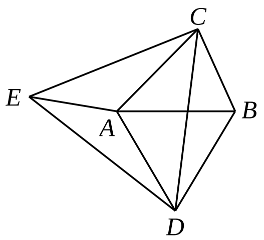
∴$\Delta EDC$ 是等边三角形，$EC = CD$

又 $AE = BC$，因此，由 $EC\leqslant AE+AC$，知 $CD\leqslant a+b$

当且仅当 $C$、$A$、$E$ 共线时，等号成立，这时 $CD$ 最大

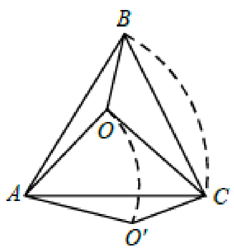
此时，$\angle DCB =\angle DEC =\angle DCE = 60^o$，而$\angle ACB =\angle DCB+\angle DCE$

∴$\angle ACB = 120^o$ 时，$CD$ 最大，且最大值为 $a+b$.




4.

如图所示，点$O$是等边$\triangle ABC$中一点，$OB=2$，$OA=3$，$\angle AOB=150°$，$\angle BOC=115°$，将$\triangle AOB$绕点$A$顺时针旋转$60°$至$\angle AO'C$，下列说法中：①$OC$的长度是$\sqrt{13}$；②以线段$OA$、$OB$、$OC$为边构成的三角形的各内角大小分别为$90°$，$60°$，$30°$，③$S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=3+\sqrt{3}$ ④$\Delta AOB$ 的面积为$\frac{9}{2}+3\sqrt{3}$,正确的有__________。




【解析】连结 $OO'$，

（1）易证$\triangle AOO'$是正三角形，$AO=AO'=OO'=3$，$OB=O'C=2$，$\angle CO'O=150°-60°=90°$，故 $OC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，正确。

（2）由（1）易得，$\triangle OO'C$ 即为由 $OA$、$OB$ 和 $OC$ 组成的三角形，所以明显易得，该三角形各内角不是 $90°$，$60°$，$30°$，错误。

（3）将$\triangle BOC$ 绕点 $B$ 顺时针旋转至$\triangle BO''C$ 处，连结 $OO''$，则四边形 $AOBO''$ 的面积即为两三角形面积之和。而四边形 $AOBO''$ 可以拆分成一个边长为 2 的正$\triangle BOO''$和一个底为 2，高为 3 的直角三角，得该项正确。

（4）由（3）得，$S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=3+\sqrt{3}\leq\frac{9}{2}+3\sqrt{3}$，错误。

# 第十讲、平面直角坐标系

## 模块一、平面直角坐标系基本概念

### 知识集锦

**1．有序数对**

有顺序的两个数 $a$ 与 $b$ 组成的数对叫做有序数对，记作$(a，b)$.

注意：当 $a\neq b$ 时，$(a，b)$和$(b，a)$是两个不同的有序实数对.

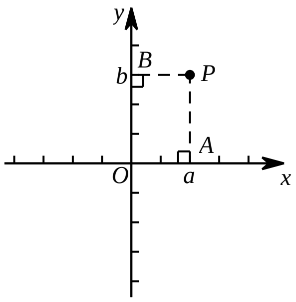
**2．平面直角坐标系**

由两条互相垂直的数轴组成，且两轴的交点是原点；同一数轴上的单位长度是一样的，一般情况下两轴上的单位长度也相同. 我们规定水平的数轴叫做横轴 $x$ 轴，取向右为正方向；另一数轴叫纵轴 $y$ 轴，取向上为正方向.

**3.点的坐标**

如下图，由点 $P$ 分别向 $x$ 轴和 $y$ 轴作垂线，垂足 $A$ 在 $x$ 轴上的坐标是 $a$，垂足 $B$ 在 $y$ 轴上的坐标是 $b$，则点 $P$ 的坐标为 $\left(a，b\right)$.

点的坐标是一对有序数对，横坐标写在纵坐标前面，中间用"，"号隔开，再用小括号括起来.




**4．象限和轴**

（1）$x$ 轴上的点 $(x, y)$ 的坐标满足： $y$=0；

（2）$y$ 轴上的点 $(x, y)$ 的坐标满足： $x$=0；

（3）第一象限内的点 $(x, y)$ 的坐标满足：$x>0$，$y>0$；

（4）第二象限内的点 $(x, y)$ 的坐标满足：$x<0$，$y>0$；

（5）第三象限内的点 $(x, y)$ 的坐标满足：$x<0$，$y<0$；

（6）第四象限内的点 $(x, y)$ 的坐标满足：$x>0$，$y<0$.

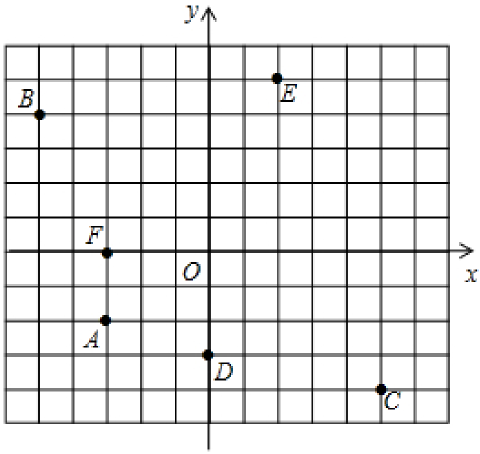
注意：原点在坐标轴上，两条坐标轴上的点不属于任何一个象限.

【例 1】

1．如图，小正方形边长为 1 个单位长度

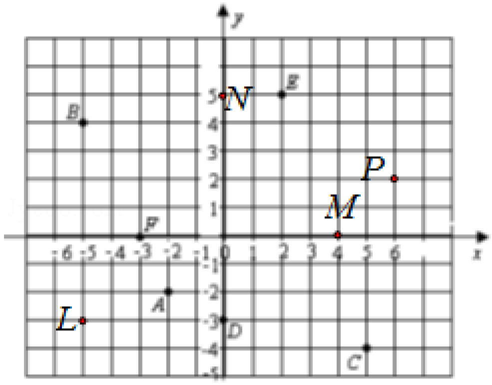
（1）写出图中点 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$ 的坐标.

（2）在上图中描出下列各点：$L$（−5，−3），$M$（4，0），$N$（0，5），$P$（6，2）.

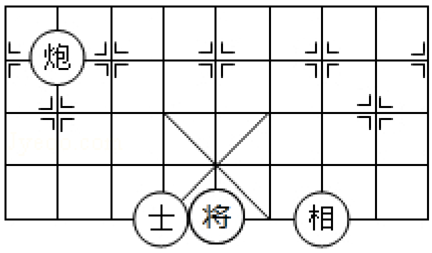



【答案】（1）$A$（－3，－2）、$B$（－5，4）、$C$（5，4）、$D$（0，－3）、$E$（2，5），$F$（－3，0）；

（2）如图所示，

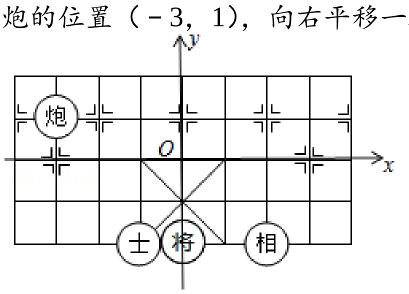



2．中国象棋在中国有着三千多年的历史，它难易适中，趣味性强，变化丰富细腻，棋盘棋子文字都体现了中国文化，如图，如果士所在位置的坐标为（－1，－2），相所在位置的坐标为（2，－2），那么将棋子炮右移一格后的位置的坐标为__________.



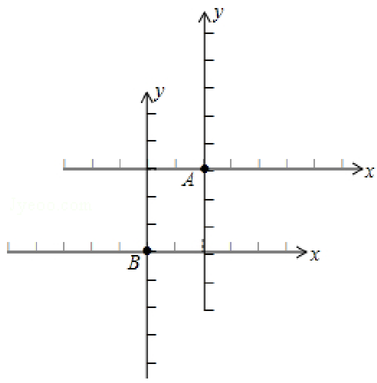

【答案】平面直角坐标系如图所示：

炮的位置（－3，1），向右平移一格后的坐标为（－2，1）



3. 在平面直角坐标系中有 $A$、$B$ 两点，若以 $B$ 点为原点，建立直角坐标系，则 $A$ 点的坐标为（2，3），若以 $A$ 点为原点建立直角坐标系，则 $B$ 点的坐标是______.

【答案】画出相关图形可得点 $B$ 的坐标为（－2，－3），




【例2】

1．若点 $A$ 的坐标（$x$，$y$）满足条件 $(x-3)^2+|y+2|=0$，则点 $A$ 在第_______象限.

【解析】∵ $(x-3)^2+|y+2|=0$，∴$x$=3，$y$=－2，∴$A$ 点的坐标为（3，－2），∴点 $A$ 在第四象限

2．若点 $P$（$a$－2，2$a$+3）在 $y$ 轴上，则 $a$=______，此时点 $P$ 的坐标是_______；如果点 $P$ 在 $x$ 轴上，那么 $a$=_____.

【答案】2；（0，7）；$-\dfrac{3}{2}$.

3．若点 $P$（$a$，$b$）在第二象限，则点 $Q$（2$a$－1，3$b$+2）一定在_______.

【答案】第二象限

【例3】

1．如果 $m$ 是任意实数，则点 $P$（$m$，1－2$m$）一定不在（　　）

$A$．第一象限　　　　$B$．第二象限　　　　$C$．第三象限　　　　$D$．第四象限

【答案】$C$

2．证明：①点 $\left(2m,\ n^2+2n+1\right)$ 不在第三、四象限；②点 $\left(2m+1,\quad 2m+2\right)$ 不在第四象限.

【解析】①∵ $n^2+2n+1=\left(n+1\right)^2\geq 0$，点 $\left(2m,\ n^2+2n+1\right)$ 不在第三、四象限；

②若 $\begin{cases}2m+1>0\\2m+2<0\end{cases}$，不等式组无解，∴点 $\left(2m+1,\quad 2m+2\right)$ 不在第四象限

# 模块二、特殊直线与点到特殊直线的距离

## 知识集锦

**1．平行于坐标轴的直线**

（1）与 $x$ 轴平行的直线：所有点的纵坐标都相等，即直线为 $y=m$；

平行于 $x$ 轴直线上的两点，其纵坐标相等，横坐标为两个不相等的实数；

（2）与 $y$ 轴平行的直线：所有点的横坐标都相等，即直线为 $x=n$.

平行于 $y$ 轴直线上的两点，其横坐标相等，纵坐标为两个不相等的实数.

**2．角平分线**

（1）一、三象限角平分线：横坐标与纵坐标相等，且直线为 $x=y$;

（2）二、四象限角平分线：横坐标与纵坐标互为相反数，且直线为 $x=-y$

**3．点到特殊直线的距离**

（1）点 $(a，b)$ 到 $x$ 轴的距离为 $|b|$；到直线 $y=m$（$m$ 为常数）的距离为 $|b-m|$；

（2）点 $(a，b)$ 到 $y$ 轴的距离为 $|a|$；到直线 $x=n$（$n$ 为常数）的距离为 $|a-n|$.

【例4】

1. 点 $A$ 的坐标为（3，﹣1），点 $B$ 的坐标为（3，3），则线段 $AB$ 所在的直线与 $x$ 轴的位置关系是_______.

【答案】垂直

2．在下列点中，与点 $A$（﹣2，﹣4）的连线平行于 $y$ 轴的是（　　）

$A$．（2，﹣4）　　　　$B$．（4，﹣2）　　　　$C$．（﹣2，4）　　　　$D$．（﹣4，2）

【答案】$C$

3．已知点 $P\left(2m+3,\ 3m-1\right)$ 在第一，三象限坐标轴夹角平分线上，则 $m$=_____.

【答案】4

4．若点 $M\left(2a-3,\ 6-a\right)$ 在坐标轴的夹角平分线上，则 $M$ 的坐标为_________.

【答案】（3，3）或（－9，9）.

【例5】

1．点 $M$（﹣8，12）到 $x$ 轴的距离是______，到 $y$ 轴的距离是_______.

【答案】12；8.

2．点 $A$ 到 $x$ 轴的距离为 4，到 $y$ 轴的距离为 2，该点坐标为__________.

【答案】（2，4），（−2，4），（2，−4），（−2，−4）

3．点（3，-2）到直线 $x$=-1 的距离为________，到直线 $y$=-1 的距离为________.

【答案】4；1

4．在平面直角坐标系中，点 $P(a，b)$ 到直线 $x$=-3 的距离为 3，则 $a$ 的值为________.

【答案】0 或−6

5. 若点 $P(2+a，3a+4)$ 到 $x$ 轴和 $y$ 轴的距离相等，则点 $P$ 的坐标为________.

【解析】$|2+a|=|3a+4|$ 解得 $a$=－1 或 $a$=－1.5，∴点 $P$ 的坐标为（1，1）或（0.5，－0.5）.

# 模块三、点的简单坐标交换

## 知识集锦

**1．坐标系中点的平移**

| | | |
|---|---|---|
| $(x，y)$ | 向左平移 $a$ 个单位 | $(x-a，y)$ |
| | 向右平移 $a$ 个单位 | $(x+a，y)$ |
| | 向上平移 $a$ 个单位 | $(x，y+a)$ |
| | 向下平移 $a$ 个单位 | $(x，y-a)$ |

**规律：左减右加，上加下减**

**2. 坐标系中点的轴对称**

（1）关于坐标轴的对称

①点 $P(a，b)$ 关于 $x$ 轴的对称点是 $P'(a，-b)$，即横坐标不变，纵坐标互为相反数

②点 $P(a，b)$ 关于 $y$ 轴的对称点是 $P'(-a，b)$，即纵坐标不变，横坐标互为相反数.

（2）关于特殊直线的对称

①点 $P(a，b)$ 关于直线 $x=m$ 的对称点是 $P'(2m-a，b)$

②点 $P(a，b)$ 关于直线 $y=n$ 的对称点是 $P'(a，2n-b)$

③点 $P(a，b)$ 关于一三象限的平分线的对称点为 $P'(b，a)$

④点 $P(a，b)$ 关于二四象限的平分线的对称点为 $P(-b,，-a)$

【例6】

1. 填空

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1，4)$ | 向左平移 3 个单位 | | $(-3，5)$ | 向上平移 2 个单位 | |
| | 向右平移 2 个单位 | | | 向右平移 3 个单位 | |
| | 向上平移 5 个单位 | | | 向左平移 5 个单位 | |
| | 向下平移 7 个单位 | | | 向下平移 1 个单位 | |

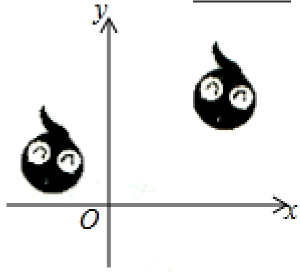
【答案】

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1，4)$ | 向左平移 3 个单位 | (−2，4) | $(-3,5)$ | 向上平移 2 个单位 | (−3，7) |
| | 向右平移 2 个单位 | (3，4) | | 向右平移 3 个单位 | (0，5) |
| | 向上平移 5 个单位 | (1，9) | | 向左平移 5 个单位 | (−8，5) |
| | 向下平移 7 个单位 | (1，−3) | | 向下平移 1 个单位 | (−3，4) |

2．在平面直角坐标系中，线段 $CF$ 是由线段 $AB$ 平移得到的；点 $A$（−1，4）的对应点为 $C$（4，1）；则点 $B$（$a$，$b$）的对应点 $F$ 的坐标为_______.

【解析】∵点 $A$（－1，4）的对应点为 $C$（4，1），由此可知线段 $AB$ 向右平移 5，向下平移 3
∴点 $B$（$a$，$b$）的对应点 $F$ 的坐标为：$(a+5,\ b-3)$．

3．如图，在平面直角坐标系中，右边的小蝌蚪是由左边的小蝌蚪平移以后得到的，左图案中左、右眼睛的坐标分别为（−4，3），（−3，2），右图案中左眼的坐标是（5，6），则右图案中右眼的坐标是_______.




【解析】因为右边的小蝌蚪是由左边的小蝌蚪平移以后得到的，又因为左图案中左、右眼睛的坐标分别为（－4，3），（－3，2），右图案中左眼的坐标是（5，6），属于右图案中右眼的坐标是（6，5）

【例7】
1．点（3，4）点关于 $x$ 轴对称的点的坐标为_______.
【答案】（3，−4）

2．（嘉祥半期）在平面直角坐标系中，点 $P\left(-3,\ \frac{3}{4}\right)$ 关于 $y$ 轴对称的点 $Q$ 的坐标为（　　）

*A*．$\left(-3,\ -\frac{3}{4}\right)$　　*B*．$\left(3,\ -\frac{3}{4}\right)$　　*C*．$\left(\frac{3}{4},\ -3\right)$　　*D*．$\left(3,\ \frac{3}{4}\right)$

【答案】*D*

3．（嘉祥月考）直角坐标系中，已知点 $P$（2，-5），点 $Q$ 是点 $P$ 关于 $x$ 轴的对称点，将点 $Q$ 向右平移 4 个单位得到点 $R$，则点 $R$ 的坐标是_________.

【答案】（6，5）

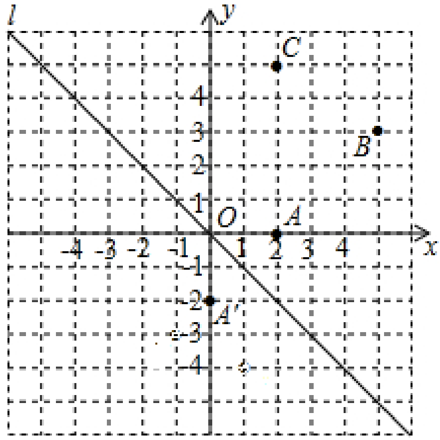
4．点 $Q$（-3，2）关于直线 $x$=-2 的对称点为_______，关于直线 $y$=-1 的对称点为_______.

【答案】$(-1, 2)$；$(-3, -4)$

5. 点（1，2）关于第一象限角平分线的对称点的坐标为_______.
【答案】（2，1）

# 巅峰挑战

如图，在平面直角坐标系中，直线 $l$ 是第二、四象限的角平分线．
（1）实验与探究：由图观察易知 $A$（2，0）关于直线 $l$ 的对称点 $A'$的坐标为（0，-2），请在图中分别标明 $B$、$C$ 关于直线 $l$ 的对称点 $B'$、$C'$的位置，并写出他们的坐标：$B'$________、$C'$________；
（2）归纳与发现：结合图观察以上三组点的坐标，你会发现坐标平面内任一点 $P$（$a$，$b$）关于第二、四象限的角平分线 $l$ 的对称点 $P'$的坐标为__________（不必证明）；




【答案】(1) 图略；$B'$（－3，5）、$C'$（－5，－2）；
（2）$P$（－$b$，－$a$）；

## 笔记整理

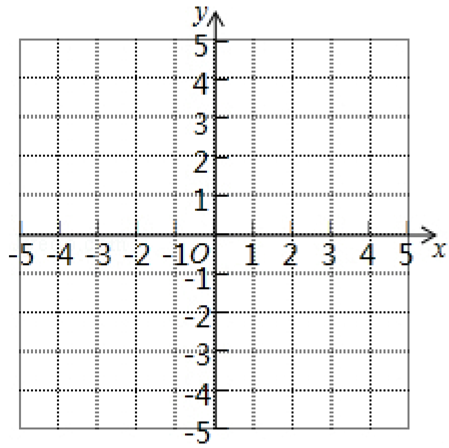
# 课后作业

1.

（1）方格纸中每个小方格都是边长为 1 个单位长度的正方形，在平面直角坐标系中，已知点 $A$（1，0），$B$（4，0），$C$（3，3），$D$（1，4）.

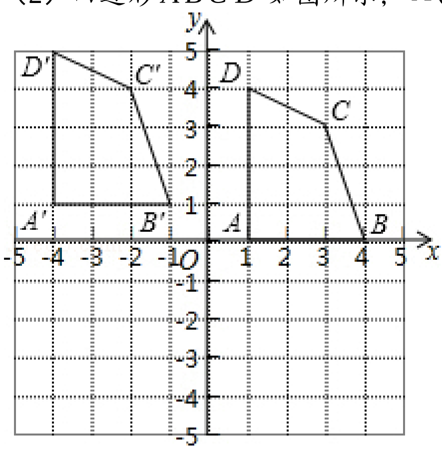
（1）描出 $A$、$B$、$C$、$D$、四点的位置，并顺次连结 $A$、$B$、$C$、$D$;

（2）把四边形 $ABCD$ 向左平移 5 个单位，再向上平移 1 个单位得到四边形 $A'B'C'D'$，在图中画出四边形 $A'B'C'D'$．并写出点 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$ 的坐标；



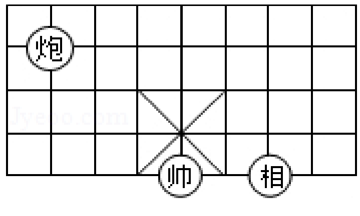

【解析】(1）四边形 $ABCD$ 如图所示；

（2）四边形 $A'B'C'D'$ 如图所示；$A'(-4,\ 1)$，$B'(-1,\ 1)$，$C'(-2,\ 4)$，$D'(-4,\ 5)$.




（2）如图 1 所示的象棋盘上，若帅位于点（1，-2）上，相位于点（3，-2）上，则炮位于点(　　)

$A$.（-1，1）　　$B$.（-1，2）　　$C$.（-2，1）　　$D$.（-2，2）




【答案】$C$

（3）知 $P$ 点坐标为 $(2a+3, 2a-4)$

①点 $P$ 在 $x$ 轴上， 则 $a$=______；

②点 $P$ 在 $y$ 轴上， 则 $a$=_______.

【答案】2 ； $-\dfrac{3}{2}$

（4）已知 $P$ 点坐标为（$2a$+1，$a$-3），①点 $P$ 在 $x$ 轴上，则 $a$=_____；②点 $P$ 在 $y$ 轴上，则 $a$=_____；③点 $P$ 在第三象限内，则 $a$ 的取值范围是_____.

【答案】3；$-\dfrac{1}{2}$； $a<-\dfrac{1}{2}$.

（5） 如果 $m$ 是任意实数， 则点 $P(m-4，m+1)$ 一定不在（　　）

*A*． 第一象限　　　　*B*． 第二象限　　　　*C*． 第三象限　　　　*D*． 第四象限

【答案】*D*

2.

（1）已知点 $P(7m+3, 2m-5)$ 在第一， 三象限坐标轴夹角平分线上， 则 $m$=_______.

【答案】$-\dfrac{8}{5}$

3.

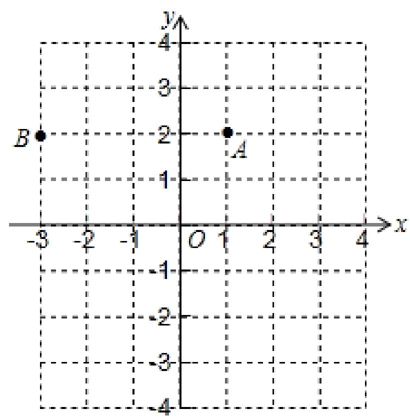
在平面直角坐标系中，*A*、*B* 点的位置如图所示，

（1）写出 *A*、*B* 两点的坐标

（2）若 *C*（-3，-4）、*D*（3，-3），请在图示坐标系中标出 *C*、*D* 两点；

（3）写出 *A*、*B*、*C*、*D* 四点到 $x$ 轴和 $y$ 轴的距离：*A* 到 $x$ 轴的距离为______，到 $y$ 轴的距离为______；*B* 到 $x$ 轴的距离为______，到 $y$ 轴的距离为______； *C*（-3，-4）到 $x$ 轴的距离为_____，到 $y$ 轴的距离为______；*D*（3，-3）到 $x$ 轴的距离为______，到 $y$ 轴的距离为_______.

（4）分析（3）中点的坐标与该点到坐标轴的距离的关系，利用你所发现的结论写出点 *P*（*m*，*n*）到 $x$ 轴的距离为_______，到 $y$ 轴的距离为________.




【解析】（1）如图：分别过 *A*、*B* 点作 $x$ 轴、$y$ 轴的垂线，可得 *A*、*B* 两点的坐标为（1，2）（−3，2）；

（2）如图：

（3）∵*A*、*B*、*C*、*D* 四点的坐标为（1，2）（−3，2），*C*（−3，−4）、*D*（3，−3），

∴点 *A* 到 $x$ 轴的距离为 2，到 $y$ 轴的距离为 1.

点 *B* 到 $x$ 轴的距离为 2，到 $y$ 轴的距离为 3.

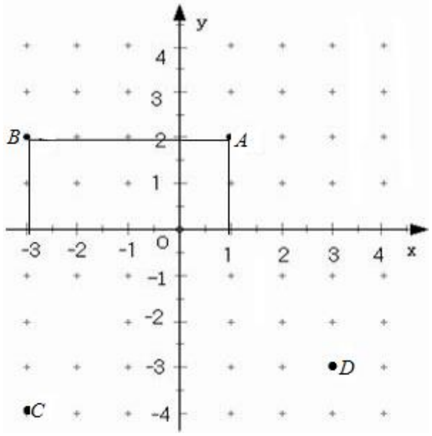
点 *C* 到 $x$ 轴的距离为 4，到 $y$ 轴的距离为 3.

点 *D* 到 $x$ 轴的距离为 3，到 $y$ 轴的距离为 3.

（4）根据（3）可知，横坐标的绝对值为点到 $y$ 轴的距离；纵坐标的绝对值为点到 $x$ 轴的距离.

于是可得点 $P$（$m$，$n$）到 $x$ 轴的距离为 $|n|$，到 $y$ 轴的距离为 $|m|$.

答案：(1，2)(−3，2)；2，1；2，3；4，3；3，3；$|n|$，$|m|$




4.

（1）已知点 $P(2-a,3a-2)$ 到两坐标轴的距离相等．则点 $P$ 的坐标为______________.

【答案】$(1,\ 1)$ 或 $(2,\ -2)$ .

（2）在平面直角坐标系中，点 $P(a,\ b)$ 到直线 $y=1$ 的距离为 3，则 $b$ 的值为__________.

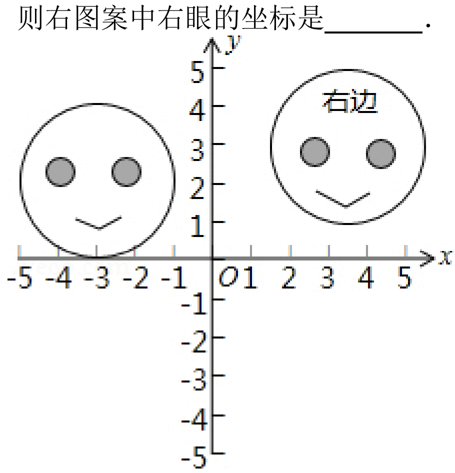
【答案】4 或−2

5.

（1）线段 $CD$ 是由线段 $AB$ 平移得到的，点 $A$（-1，4）的对应点为 $C$（4，7），则点 $B$（2，3）的对应点 $D$ 的坐标是__________.

【答案】$(7,\ 6)$

（2）如图在直角坐标系中，右边的图案是由左边的图案经过平移以后得到的．左图案中左右眼睛的坐标分别是（-4，2）、（-2，2），右图中左眼的坐标是（3，4），则右图案中右眼的坐标是________.




【答案】$(5,\ 4)$

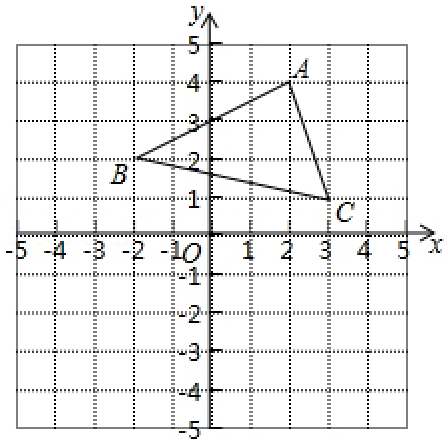
（3）已知点 $A$（$m$，$n$），把它向左平移 3 个单位后与点 $B$（4，-3）关于 $y$ 轴对称，求 $m$，$n$ 的值.

【答案】$m=-1$，$n=-3$

6.
如图，△*ABC* 的顶点分别为 *A*（2，4），*B*（-2，2），*C*（3，1），

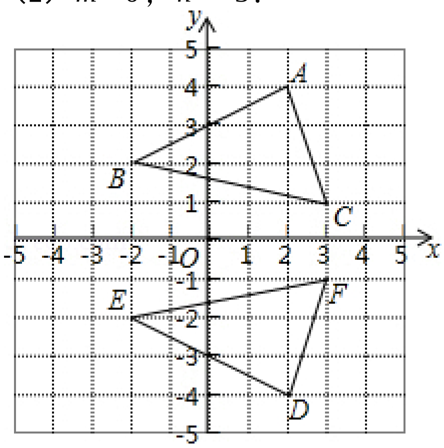
（1）作出△*ABC* 关于 *x* 轴对称的图形△*DEF*，写出顶点 *D*、*E*、*F* 的坐标．

（2）如果点 $H(3m-1,\ n-6)$ 与点 $H'(2n+7, 3m-9)$ 关于 *y* 轴对称，求 *m*，*n* 的值．



【答案】（1）所作图形如图所示：$D(2,\ -4)$，$E(-2,\ -2)$，$F(3,\ -1)$；

（2）$m=0$，$n=-3$．



7.
已知点 *A* 的坐标为（*m*，*n*），它关于 *x* 轴对称的点是 $A_1$，$A_1$ 关于 $y$ 轴对称的点是 $A_2$，而点 $A_2$ 的坐标是（-3，2），求 *m*、*n* 的值．

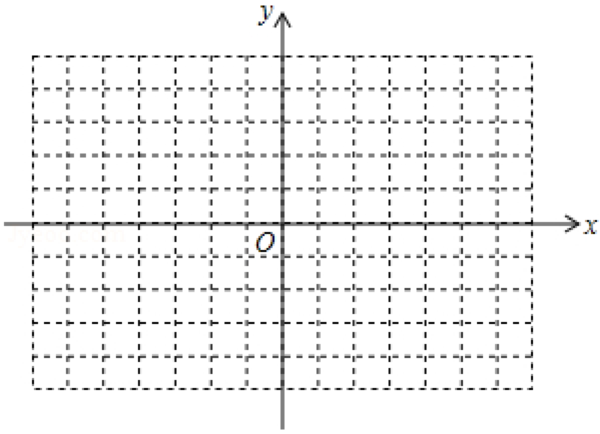
【答案】$m=3$，$n=-2$．

8.

探究：我们把过（1，0）且平行于 $y$ 轴的直线记为____，那么过（0，-1）且平行于 $x$ 轴的直线则记为_____；直线 $y$=2 在平面直角坐标系中的位置为_____；则直线 $x$=-3 在平面直角坐标系中的位置为_____．

（1）$M$（2，3）关于直线 $x$=1 的对称点的坐标为：_____；　关于直线 $y$=-2 的对称点的坐标为_____；　点 $N$（-2，3）关于直线 $x$=-1 的对称点的坐标为：_____；　关于直线 $y$=2 的对称点的坐标为_____；

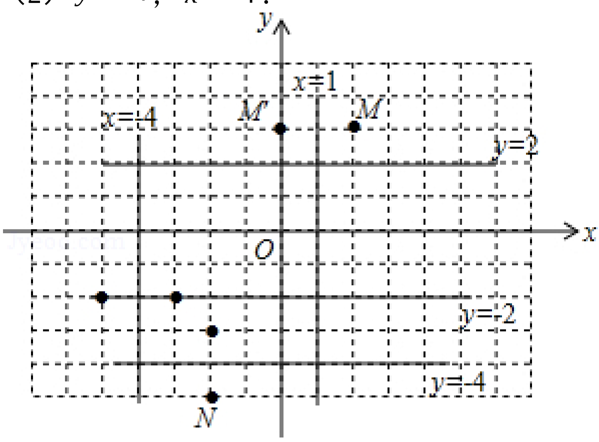
（2）点 $M$（-2，-3）与 $N$（-2，-5）关于直线_____对称．点 $M$（-3，-2）与 $N$（-5，-2）关于直线_____对称．




【答案】探究：$x=1$，$y=-1$，过 $(0,\ 2)$ 平行于 $x$ 轴的直线；过 $(-3,\ 0)$ 平行于 $y$ 轴的直线；

（1）$(0,\ 3)$，$(2,\ -7)$，$(0,\ 3)$，$(-2,\ 1)$；

（2）$y=-4$，$x=-4$．



# 第十一讲、函数初步与正比例函数

## 模块一、函数的基本概念

### 知识集锦

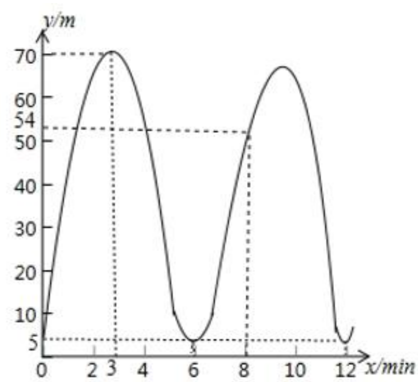
**1．常量与变量的概念**
在变化过程中数值始终不变的量为常量，数值发生变化的量叫做变量.

**2．函数的定义**
在某一变化过程中，有两个变量 $x$ 和 $y$，对于 $x$ 的每一个值，$y$ 都有唯一的值与之对应，其中 $x$ 是自变量，$y$ 是因变量，此时称 $y$ 是 $x$ 的函数.
例：正方形的周长 $L$ 与边长 $a$ 之间满足 $L=4a$，周长 $L$ 随着边长 $a$ 的变化而变化，$a$ 是自变量，$L$ 是因变量，在这个变化过程中两个变量之间的对应关系即为函数.

**3．判断变量之间是否存在函数关系——函数的唯一性**
“$y$ 有唯一值与 $x$ 对应”，即指在自变量的取值范围内，$x$ 每取一个确定值，$y$ 都有唯一确定的值与之相对应，否则 $y$ 不是 $x$ 的函数.

**4．初中常见自变量的取值范围**
（1）根号下含有自变量：当根指数为偶数时，被开方数为非负数；
（2）分母中含有自变量：分母不为 0；
（3）实际问题：符合实际意义.

【例1】
如图，当小明坐在摩天轮上，$y$ 表示小明离开地面的高度，$x$ 表示摩天轮旋转的时间：
（1）根据图像，摩天轮的高度为________；经过 8 分钟，离开地面的高度是________；
（2）从开始乘坐到第一次到达顶端用时________，旋转一圈用时________；
（3）自变量是________，因变量是________，称________是________的函数.

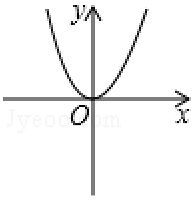
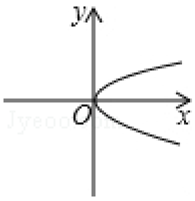
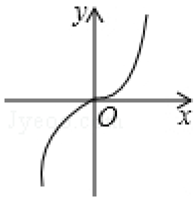
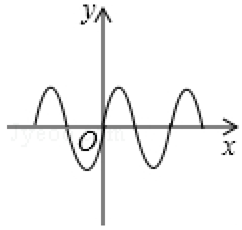



【答案】（1）70$m$；54$m$；（2）3$min$；6$min$；（3）$x$；$y$；$y$；$x$

【例2】
1．下列式子：① $y=3x-5$；② $y=\dfrac{1}{x}$；③ $y=\sqrt{x-1}$；④$y^2=x$；⑤$y=|x|$，其中 $y$ 是 $x$ 的函数是________.

【答案】①是②是；③是；④不是；⑤是.

2．下列各曲线中不能表示 $y$ 是 $x$ 的函数是（　　）

*A*.  *B*.  *C*.  *D*. 

【答案】$B$

3．直接写出自变量 $x$ 的取值范围

① $y=\dfrac{x+1}{x-3}$，____________；　　　　② $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-2}}$，____________；

③ $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$，____________；　　　　④ $y=\sqrt[3]{x}$，____________.

【答案】①$x\neq3$；②$x>2$；③$x\geqslant1$ 且 $x$ 不等于 2；④任意实数

## 模块二、函数的表示

## 知识集锦

**1．函数的表示方法**

（1）解析法：用数学式子表示函数的方法叫做解析法．如：$L=4a$，$S=\pi R^2$；

（2）列表法：通过列表表示函数的方法；

（3）图象法：用图象直观、形象地表示一个函数的方法.

**2．函数图像**

（1）一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的图象；

（2）函数图像的步骤：①列表；②描点；③连线；

**3．函数解析式与函数图像之间的关系**

（1）以满足函数解析式的有序实数对为坐标的点一定在函数图象上；

（2）函数图象上点的坐标一定满足函数解析式；

【例3】

1．汽车行驶前油箱中有汽油 52 公升，已知汽车每百公里耗油 8 公升，油箱中的余油量 $Q$（公升）（油箱中剩余的油量不能少于 4 公升）与它行驶的距离 $s$（百公里）之间的函数关系式为__________（注明 $s$ 的取值范围）.

【解析】∵每行驶百千米耗油 8 升，∴行驶 $s$ 百公里共耗油 $8s$，∴余量为 $Q=52-8s$；

$Q=52-8s$（$0\leqslant s\leqslant6$）.

2. 某长方形的周长为 $24cm$，其中一边长为 $xcm$（$x>0$），面积为 $ycm^2$，则 $y$ 与 $x$ 的关系式为______________，其中 $x$ 取值范围是_________.

【解析】长方形的一边是 $xcm$，则另一边长是 $(12-x)cm$.

则 $y$ 与 $x$ 的关系式为 $y=12x-x^2$.（$0<x<12$）

3．若等腰三角形的周长为 60$cm$，底边长为 $x$ $cm$，腰长为 $y$ $cm$，则 $y$ 与 $x$ 的函数关系式及自变量 $x$ 的取值范围是（　　）

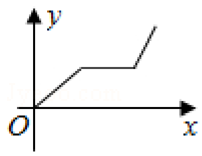
*A*．$y=60-2x$（$0<x<60$）　　　　*B*．$y=60-2x$（$0<x<30$）

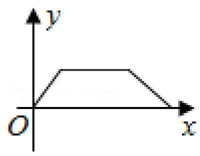
*C*．$y=\frac{1}{2}(60-x)$（$0<x<60$）　　　　*D*．$y=\frac{1}{2}(60-x)$（$0<x<30$）

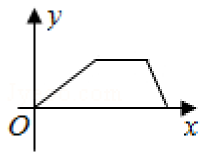
【答案】*D*

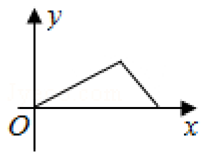
【例4】

1．小华周末坚持体育锻炼．某个周末他跑步到离家较远的和平公园，打了一会儿篮球后散步回家．下面能反映当天小华离家的距离 $y$ 与时间 $x$ 的函数关系的大致图象是（　　）

*A*． 

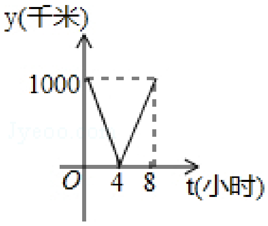

*B*． 

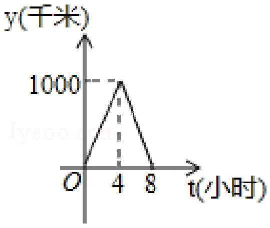

*C*． 

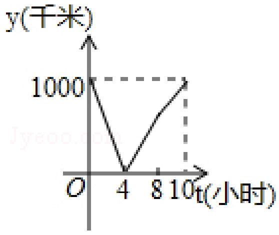

*D*． 

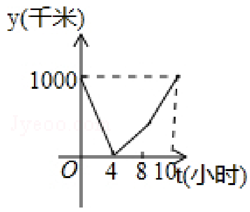

【答案】

2．一列快车以 100 千米/小时的速度从甲地驶往乙地，一列特快车以 150 千米/小时的速度从乙地驶往甲地，甲、乙两地之间的距离为 1000 千米．两车同时出发，则大致表示两车之间的距离 $y$（千米）与快车行驶时间 $t$（小时）之间的函数图象是（　　）

*A*． 


*B*． 


*C*． 


*D*． 


【答案】*C*

# 模块三、正比例函数

## 知识集锦

**1．正比例函数的定义**

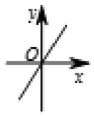
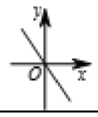
一般地，形如 $y=kx$（$k$、$b$ 为常数，$k\neq 0$）的函数，叫做正比例函数，其中 $k$ 叫做比例系数；

（正比例是指两个变量，如 $x$、$y$，它们的比值为一个非零的定值 $k$，即 $\frac{y}{x}=k$ 这两个变量就叫做成正比例的量，它们的关系叫做正比例关系.）

**2．正比例函数的图像**

正比例函数图象是一条经过原点的直线（不与坐标轴重合）.

**3．正比例函数的性质**

| $y=kx$ | 图像 | 图象位置 | 变化趋势 | 增减性 |
|---|---|---|---|---|
| $k>0$ |  | 经过原点和<br>第一、三象限 | 从左向右<br>上升 | $y$ 随 $x$ 的增大而增大<br>$y$ 随 $x$ 的减小而减小 |
| $k<0$ |  | 经过原点和<br>第二、四象限 | 从左向右<br>下降 | $y$ 随 $x$ 的增大而减小<br>$y$ 随 $x$ 的减小而增大 |

【例5】

1．下列说法不成立的是（　　）

$A$．在 $y=3x-1$ 中 $y+1$ 与 $x$ 成正比例　　　　$B$．在 $y=-\frac{1}{2}x$ 中 $y$ 与 $x$ 成正比例；

$C$．在 $y=4(x+1)$ 中 $y$ 与 $x+1$ 成正比例；　　$D$．在 $y=x+3$ 中 $y$ 与 $x$ 成正比例；

【答案】$D$

2.（天七半期）若 $y+3$ 与 $x$ 成正比例，且当 $x=2$ 时，$y=3$，则 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系是________.

【答案】 $y=3x-3$

3．若函数 $y=(m^2-1)x^2+(1-m)x$ 是正比例函数，则 $m$ 的值是_____.

【答案】$-1$

4．若 $x$，$y$ 是变量，且函数 $y=(k+1)x^{k^2}$ 是正比例函数，则 $k$=___________.

【答案】1

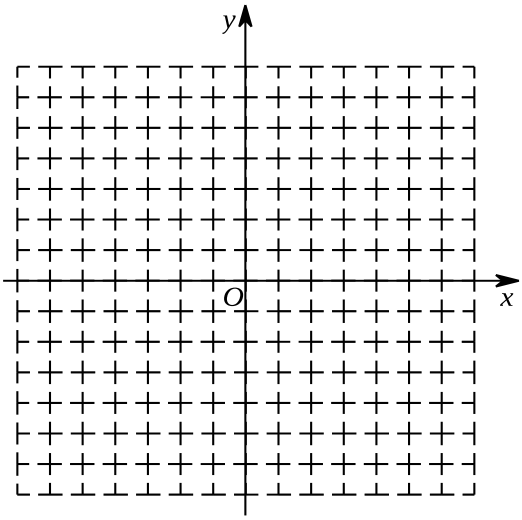
【例6】

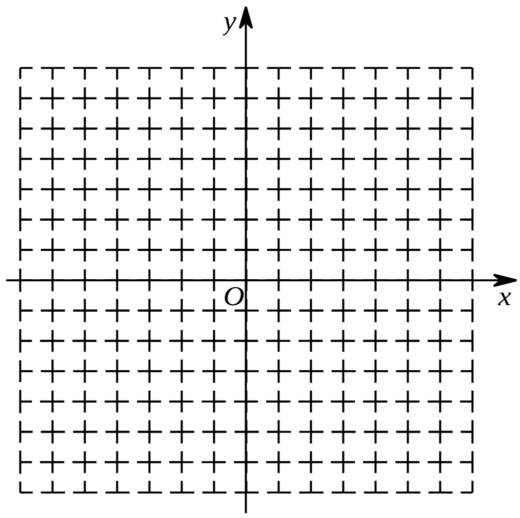
（1）完成表格并在左下图中画出 $y=3x$ 和 $y=\frac{1}{3}x$ 的函数图像：

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=3x$ | | | | | | | |
| $y=\frac{1}{3}x$ | | | | | | | |

完成表格并在右下图中画出 $y=-2x$ 和 $y=-\frac{1}{2}x$ 的函数图像

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-2x$ | | | | | | | |
| $y=-\frac{1}{2}x$ | | | | | | | |




（2）规律探究：

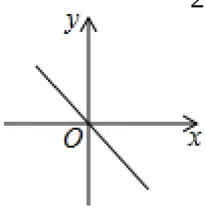
| $y=kx$ | *图像* | *图象位置* | *变化趋势* | *增减性* |
|---|---|---|---|---|
| $k>0$ | | | | |
| $k<0$ | | | | |

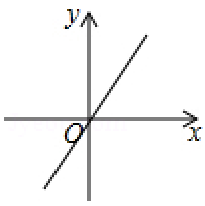
（3）$\lvert k\rvert$ 越大，函数图像越靠近___轴，$\lvert k\rvert$ 越小，函数图像越靠近________轴.

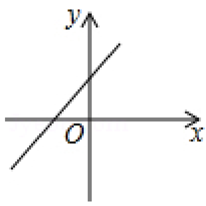
【答案】（1）略；（2）表格见知识点 3；（3）$y$；$x$

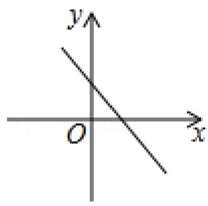
【例7】

1．正比例函数 $y=\frac{3}{2}x$ 的大致图象是（　　）

A. 

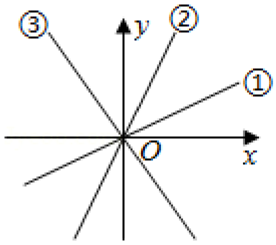

B. 


C. 


D. 


【答案】$B$

2．如图：三个正比例函数的图象分别对应的解析式是①$y=ax$，②$y=bx$，③$y=cx$，则 $a$、$b$、$c$ 的大小关系是__________.




【答案】$b>a>c$

3. 已知$\left(x_1, y_1\right)$和$\left(x_2, y_2\right)$是直线$y=-3x$上的两点，且$x_1>x_2$，则$y_1$与$y_2$的大小关系是(　　)

A．$y_1>y_2$　　B．$y_1<y_2$　　C．$y_1=y_2$　　D．以上都不可能

【答案】B

4．若正比例函数$y=\left(3m-1\right)x$的图像经过点$\left(x_1, y_1\right)$和$\left(x_2, y_2\right)$，当$x_1>x_2$时，$y_1<y_2$，则$m$的取值范围是________.

【答案】$m<\dfrac{1}{3}$

【例8】

1．若点 $A$（2，﹣12）在正比例函数的图象上，求正比例函数的解析式.

【解析】设正比例函数解析式为$y=kx$

把 $A$（2，﹣12）代入$y=kx$

得$2k=-12$，解得$k=-6$，

所以正比例函数解析式为$y=-6x$.

2．（嘉祥半期）已知 $y$ 与 $x$ 的部分对应关系如下表：

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | …… | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | …… |
| $y$ | …… | 3 | 0 | -3 | -6 | -9 | …… |

则可得 $y$ 与 $x$ 的一个关系式____________.

【答案】$y=-3x$

3. 已知正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的图象经过第一、三象限，且过点（$k$，$k+2$），求这个正比例函数的解析式.

【解析】∵正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的图象经过第一、三象限∴$k>0$，

把（$k$，$k+2$）代入 $y=kx$ 得 $k^2=k+2$，整理得$k^2-k-2=0$，解得 $k_1=2$，$k_2=-1$，

∴$k=2$，

∴这个正比例函数的解析式为 $y=2x$.

# 笔记整理

# 课后作业

1.

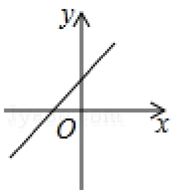
（1）下列两个变量之间不存在函数关系的是（　　）

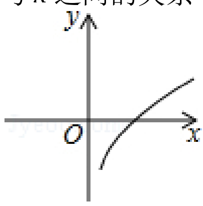
$A$．圆的面积 $S$ 和半径 $r$　　$B$．某地一天的温度 $T$ 与时间 $t$

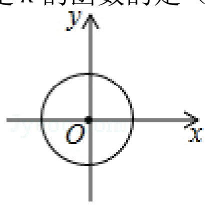
$C$．某班学生的身高 $y$ 与学生的学号 $x$　　$D$．正数 $b$ 和它的平方根 $a$

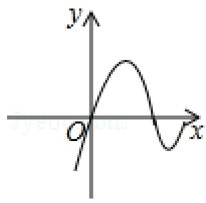
【答案】$D$

（2）下列各曲线表示的 $y$ 与 $x$ 之间的关系中，$y$ 不是 $x$ 的函数的是（　　）

$A$．


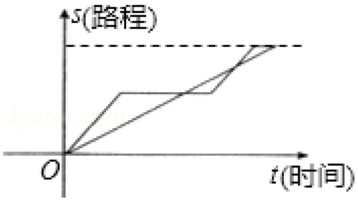

$B$．


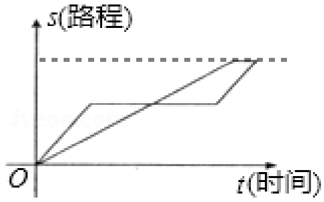

$C$．


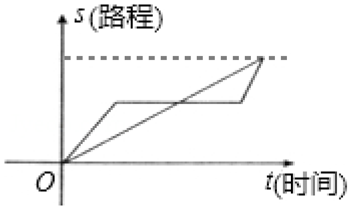

$D$．


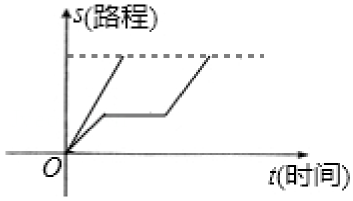

【答案】$C$

（3）“龟兔赛跑”这则寓言故事讲述的是比赛中兔子开始领先，但它因为骄傲在途中睡觉，而乌龟一直坚持爬行最终赢得比赛，下列函数图象可以体现这一故事过程的是(　　)

$A$．



$B$．



$C$．



$D$．



【答案】$B$

（4）下列：① $y=x^2$；② $y=2x+1$；③ $y^2=2x(x\geqslant 0)$；④ $y=\pm\sqrt{x}(x\geqslant 0)$，具有函数关系（自变量为 $x$ 的是___________.

【答案】①②

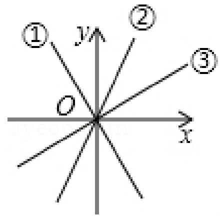
（5）小李从西安通过某快递公司给在南昌的外婆寄一盒樱桃快递时，他了解到这个公司除收取每次 6 元的包装费外，樱桃不超过 1$kg$ 收费 22 元，超过 1$kg$，则超出部分按每千克 10 元加收费用．试写出该公司从西安到南昌快递樱桃的费用 $y$（元）与所寄樱桃 $x$（$kg$）之间的函数关系式：______________.

【答案】 $y=\begin{cases}28(0<x\leqslant 1)\\10x+18(x>1)\end{cases}$

2.

（1）如图，三个正比例函数的图象分别对应函数关系式：① $y=ax$，② $y=bx$，③ $y=cx$，将 $a$，$b$，$c$ 从小到大排列并用“＜”连接为(　　)

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$　　C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$




【答案】$D$

（2）若正比例函数 $y=(1-4m)x$ 的图象经过点 $A\left(x_1,\ y_1\right)$ 和点 $B\left(x_2,\ y_2\right)$，当 $x_1<x_2$ 时，$y_1>y_2$，则 $m$ 的取值范围是（　　）

A．$m<0$　　B．$m>0$　　C．$m<\dfrac{1}{4}$　　D．$m>\dfrac{1}{4}$

【答案】$D$

（3）已知 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$ 是直线 $y=-4x$ 上的两点，且 $x_1>x_2$，则 $y_1$ 与 $y_2$ 的大小关系是 $y_1$_____ $y_2$．

【答案】＜

（4）已知函数 $y=(m+2)x^{m^2-3}$ 是正比例函数，则 $m$ 的值是(　　)

A．2　　B．-2　　C．$\pm2$　　D．$\dfrac{1}{2}$

【答案】$A$

3.

（1）已知 $y$+2 与 $x$ 成正比例，且当 $x=-1$ 时，$y$=2，则 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式为___________.

【答案】$y=-4x-2$

（2）已知 $y-1$ 与 $x$ 成正比例，当 $x$=2 时，$y$=9，那么 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式是____________.

【答案】$y=4x+1$

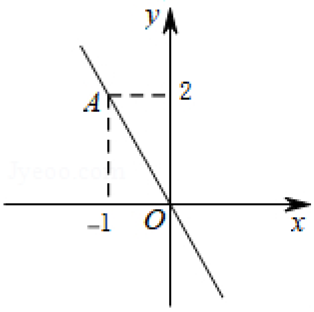
（3）已知函数 $y=(2-m)x+2m-3$．求当 $m$________时，此函数为正比例函数.

【答案】$=\dfrac{3}{2}$

（4）若 $y=(m-3)x+m^2-9$ 是正比例函数，则 $m$ 的值为___________.

【答案】$-3$

4.
已知：如图，正比例函数 $y=kx$ 的图象经过点 $A$，
（1）请你求出该正比例函数的解析式;
（2）若这个函数的图象还经过点 $B(m,\ m+3)$，请你求出 $m$ 的值;
（3）请你判断点 $P\left(-\frac{3}{2},1\right)$ 是否在这个函数的图象上，为什么？




【解析】(1) 由图可知点 $A(-1,\ 2)$，代入 $y=kx$ 得：$-k=2$，$k=-2$，则正比例函数解析式为 $y=-2x$；
(2) 将点 $B(m,\ m+3)$ 代入 $y=-2x$，得：$-2m=m+3$，解得：$m=-1$；
(3) 当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$y=-2\times(-\frac{3}{2})=3\neq1$，所以点 $P$ 不在这个函数图象上.

# 第十二讲、一次函数（一）

## 模块一、一次函数的定义与性质

### 知识集锦

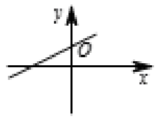
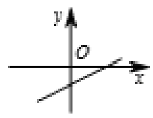
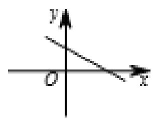
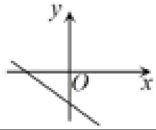
**1．一次函数的定义**

形如 $y=kx+b$（$k$、$b$ 为常数，$k\neq 0$）的函数，叫做一次函数；
特别地，当 $b=0$ 时，称 $y$ 是 $x$ 的正比例函数.

**2．一次函数的图像**

一次函数图象是坐标系内的一条直线（不与坐标轴平行或重合）.

**3．一次函数的性质**

| $y=kx+b$ | 与 $x$ 轴交点 | 与 $y$ 轴交点 | $b$ | 图像 | 图像位置 | 变化趋势 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k>0$ | $\left(-\frac{b}{k},0\right)$ | $(0,b)$ | $b>0$ |  | 经过一、二、三象限 | 从左向右上升 |
| | | | $b<0$ |  | 经过一、三、四象限 | |
| $k<0$ | $\left(-\frac{b}{k},0\right)$ | $(0,b)$ | $b>0$ |  | 经过一、二、四象限 | 从左向右下降 |
| | | | $b<0$ |  | 经过二、三、四象限 | |

【例1】

1．下列函数解析式中，表示是一次函数有__________个.

（1）$y=5x+1$，（2）$y=kx+b$，（3）$y=3(x-1)-3x$，（4）$y$=9，（5）$y=4+\frac{x}{2}$.

【答案】2

2．下列说法正确的是（　　）

*A*．不是正比例函数就不是一次函数　　*B*．一次函数是正比例函数

*C*．正比例函数不是一次函数　　*D*．正比例函数是一次函数

【答案】*D*

3．已知函数 $y=(m+3)x^{m^2-8}-5$ 是一次函数，则 $m$ 的值是__________.

【答案】3

【例2】

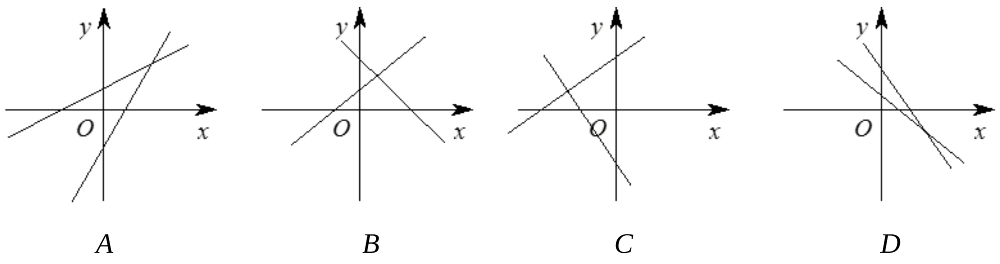
1．（棕北半期）若 $ab>0$，$bc<0$，则 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{a}{c}$ 经过（　　）

*A*．第一、二、三象限　　*B*．第一、三、四象限

*C*．第一、二、四象限　　*D*．第二、三、四象限

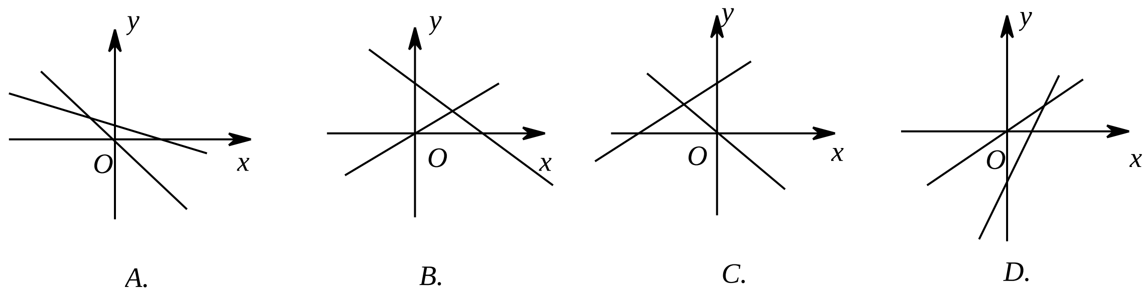
【答案】*D*

2．若 $ac<0$，$bd>0$，则函数 $y=ax+b$ 与函数 $y=cx+d$ 的图象的大致位置可能是（　　）




【答案】*B*

3. （嘉祥月考）下列表示一次函数 $y=mx-n$ 与正比例函数 $y=mnx$（$m$、$n$ 为常数且 $mn\neq0$）图象中，一定不正确的是（　　）




【答案】*A*

4．已知一次函数 $y=kx+b$，其中 $kb>0$.则所有符合条件的一次函数的图象一定通过（　　）

*A*．第一、二象限　　*B*．第二、三象限

*C*．第三、四象限　　*D*．第一、四象限

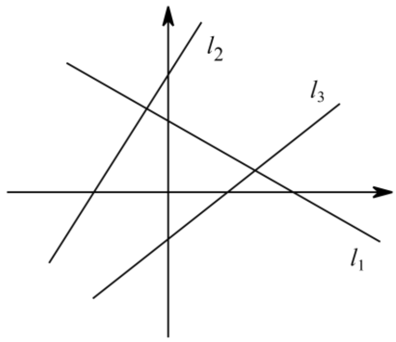
【答案】*B*

5．（棕北半期）已知一次函数 $y=(1-m)x+m-2$ 图像不经过第一象限，求 $m$ 的取值范围是________.

【答案】$1<m\leqslant2$

【例3】

三个一次函数 $y=k_1x+b_1$、$y=k_2x+b_2$、$y=k_3x+b_3$ 在同一直角坐标系中的图象如图所示，分别为直线 $l_1$、$l_2$、$l_3$，则 $k_1$、$k_2$、$k_3$ 的大小关系是____________.




【答案】$k_2>k_3>k_1$

【例4】

1．（树德半期）已知 $A$（-2，$a$），$B$（1，$b$）是一次函数 $y=-2x+3$ 的图像上的两个点，则 $a$ 与 $b$ 的大小关系是（　　）

A．$a>b$　　B．$a<b$　　C．$a=b$　　D．不能确定

【答案】A

2．（天府七中半期）已知点 $A(-3,\ y_1)$ 和 $B(-2,\ y_2)$ 都在直线 $y=-\dfrac{1}{2}x-b$ 上，则 $y_1$，$y_2$ 的大小关系是（　　）

A．$y_1>y_2$　　B．$y_1<y_2$　　C．$y_1=y_2$　　D．大小不确定

【答案】A

3．一次函数 $y=(1-2m)x+m-2$，$y$ 随着 $x$ 的增大而减小，且其图像不经过第一象限，则 $m$ 的取值范围是_______.

【答案】$\dfrac{1}{2}<m\le 2$

【例5】

1．直线 $y=-\dfrac{2}{3}x+1$ 与 $x$ 轴交点坐标为________，与 $y$ 轴交点坐标为________.

【答案】$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$；（0，1）

2．一次函数 $y=(k+2)x+k+2$ 图像与 $x$ 轴交点坐标为________，与 $y$ 轴交点坐标为________.

【答案】（－1，0）；（0，$k$+2）

# 模块二、确定一次函数解析式

## 知识集锦

**1．求一次函数解析式的常用方法：**

①“两点式”：已知 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

第一步：设一次函数解析式为 $y=kx+b$，

第二步：代入两点坐标，得 $\begin{cases} y_1=kx_1+b \\ y_2=kx_2+b \end{cases}$，

第三步：解二元一次方程组得 $k$、$b$.

②“点斜式”：已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

第一步：设一次函数解析式为 $y=kx+b$

第二步：斜率公式得 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

第三步：直线 $AB$ 解析式为 $y=k(x-x_1)+y_1$（或 $y=k(x-x_2)+y_2$）并化简

**2．斜率关系与两直线位置关系的联系**

已知一次函数 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$：

（1）若 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$，则 $l_1 // l_2$；

（2）若 $k_1\cdot k_2=-1$，则 $l_1\perp l_2$；

（3）若 $k_1+k_2=0$，则 $l_1$ 和 $l_2$ 关于过 $l_1$ 与 $l_2$ 交点的水平线或者竖直线轴对称.

【例6】

1．求下列一次函数解析式：

（1）已知一次函数的图象经过（-1，2）和（2，4）两点．求此一次函数解析式.

（2）已知直线经过（3，5$a$）和（-4，-9$a$）两点，求直线解析式.

【答案】（1）$y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$　（2）$y=2ax-a$

2．（实外半期）在平面直角坐标系中，已知一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像过点 $P$（1，1），与 $x$ 轴交于点 $A$，与 $y$ 轴交于点 $B$，且 $OB:OA=3$，那么函数解析式为____________.

【答案】$y=3x-2$ 或 $y=-3x+4$

3．已知直线过（6，2）和（-1，9）两点，则此直线的斜率为_________，解析式为__________

【答案】$-1$；$y=-x+8$

4．已知直线过（-7，-18）和（-17，-23）两点，则此直线的斜率为________，解析式为__________

【答案】$\dfrac{1}{2}$；$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{29}{2}$

【例7】

1.（嘉祥半期）$y$ 关于 $x$ 的函数 $y=\left(2m-1\right)x-3m+2$ 的图像经过一个定点，这个点的坐标是（　　）

*A*.（3，1）　　*B*.（0，2）　　*C*. $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$　　*D*. $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

【解析】因为 $y=\left(2m-1\right)x-3m+2$，整理得 $y=\left(2x-3\right)m-x+2$；过定点即取值与 $m$ 无关，所以当 $x=\frac{3}{2}$ 时 $y=\frac{1}{2}$，过定点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，故选 $C$

2.（西川半期）一次函数 $y=ax+b$，若 $a+b=1$，则它的图像必经过点__________.

【答案】（1，1）

【例8】

1．已知直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-2x$ 平行，且与 $y$ 轴交点纵坐标为-3，则直线的解析式为________.

【答案】$y=-2x-3$

2.（嘉祥月考）若直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-2x$ 平行，且过点（1，3），则该直线的解析式为_______.

【答案】$y=-2x+5$

3．与直线 $y=2x+5$ 垂直，且过点 $M$（-2，4）的直线的解析式为__________.

【答案】$y=-\frac{1}{2}x+3$

4．已知 $A$ 的坐标为（2，0），点 $B$ 在直线 $y=3x$ 上运动，当线段 $AB$ 长度最短时，直线 $AB$ 的解析式为____________

【答案】$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

## 巅峰挑战

（嘉祥半期）在同一直角坐标系中，作出函数$y=1-2x$与$y=2x+1$的图像，说明它们的图像有怎样的位置关系？一般地，你有怎样的猜想？说明理由.

【解析】①图略（作图提示：作图时，要列表，描点，画图）

②图像位置关系：关于$y$轴轴对称，关于$y=1$轴对称

③一般猜想：已知一次函数$l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$，其中$k_1k_2\neq 0$

若$k_1+k_2=0$，则$l_1$和$l_2$必然相交，设交点为$(m,n)$

则$l_1$与$l_2$关于直线$x=m$轴对称.，关于直线$y=n$轴对称

④证明略

## 笔记整理

# 课后练习

1.

（1）若函数 $y=(m-3)x^{m-1}+x+3$ 是一次函数，且 $x\neq 0$，则 $m$ 的值为_______.

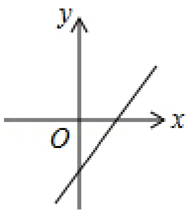
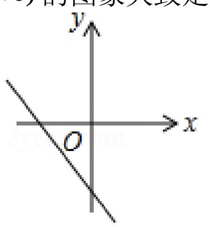
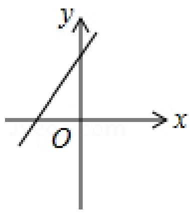
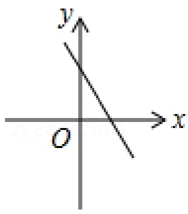
【答案】1 或 3

（2）当 $x=$_____时，函数 $y=(m-2)x^{m^2-3}+(m-2)x+1$ 是一次函数.

【答案】$-2$ 或 $\pm\sqrt{3}$

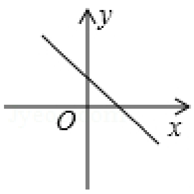
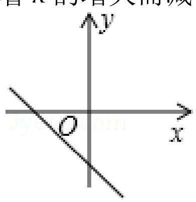
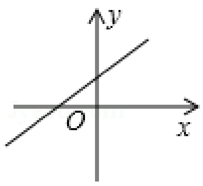
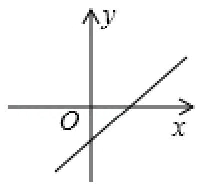
2.

（1）一次函数 $y=kx-k(k<0)$ 的图象大致是(　　)

A.  B.  C.  D. 

【答案】$D$

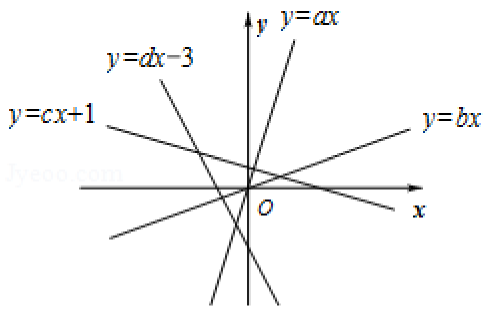
2．已知一次函数 $y=kx+b$ 随着 $x$ 的增大而减小，且 $kb<0$，则在直角坐标系内它的大致图象是（　　）

A.  B.  C.  D. 

【答案】$A$

3．如图，四个一次函数 $y=ax$，$y=bx$，$y=cx+1$，$y=dx-3$ 的图象如图所示，则 $a$，$b$，$c$，$d$ 的大小关系是（　　）

A．$b>a>d>c$　　B．$a>b>c>d$　　C．$a>b>d>c$　　D．$b>a>c>d$




【答案】$B$

4．已知一次函数 $y=(m+4)x-5+2m$，当 $m$_______时，图象不经过第一象限.

【答案】$<-4$

5．已知一次函数 $y=(2m+1)x+m-3$ 的图象不经过第二象限，则 $m$ 的取值范围为_______.

【答案】$-\frac{1}{2}<m\leqslant 3$

3.
（1）判断下列各点是否在直线 $y=2x+6$ 上．（是的打“√”，不是的打“×” ）
（-5，-4），_____；（-7，20），_____；$\left(-\frac{7}{2},1\right)$，_____；$\left(\frac{2}{3},7\frac{1}{3}\right)$，_____．

（2）这条直线与 $x$ 轴的交点坐标是_____，与 $y$ 轴的交点坐标是_____．
【答案】√，×，×，√；$(-3,\ 0)$，$(0,\ 6)$

4.
函数 $y=-2x-1$ 的图象与 $x$ 轴的交点坐标是________，与 $y$ 轴的交点坐标是________，直线与两坐标轴所围成的三角形的面积是________．
【答案】$(-0.5,\ 0)$；$(0,\ -1)$；$\frac{1}{4}$

5.
已知直线 $AB$ 的解析式为：$y=kx+m$，且经过点 $A(a,\ a)$，$B(b,\ 8b)$，$(a>0,\ b>0)$．当 $\frac{b}{a}$ 是整数时，满足条件的整数 $k$ 的值为_________．

【答案】9 或 15

6.
如果三个数 $a$、$b$、$c$ 满足其中一个数的两倍等于另外两个数的和，我们称这三个数 $a$、$b$、$c$ 是“等差数”若正比例函数 $y=2x$ 的图象上有三点 $A\left(\frac{1}{2}m-1,\ y_1\right)$、$B(m,\ y_2)$、$C(2m+1,\ y_3)$，且这三点的纵坐标 $y_1$、$y_2$、$y_3$ 是“等差数”，则 $m=$__________．
【答案】$-\frac{3}{2}$ 或 0 或 $-\frac{6}{5}$

7.
$y$ 关于 $x$ 的函数 $y=x^2+kx+k$，无论 $k$ 如何变化，图象总经过一个定点，这个定点是________．
【答案】$(-1,\ 1)$

8.
关于 $x$ 的一次函数 $y=3kx+k-1$ 的图象无论 $k$ 怎样变化，总经过一个定点，这个定点的坐标是_______．
【答案】$(-\frac{1}{3},\ -1)$

9.
（1）已知一次函数的图象经过两点 $A$（1，1），$B$（3，-1），则这个函数的解析式是_____________．
【答案】$y=-x+2$

（2）已知直线 $m$ 与直线 $y=-0.5x+2$ 平行，且与 $y$ 轴交点的纵坐标为 8，求直线 $m$ 的解析式是__________．
【答案】$y=-0.5x+8$

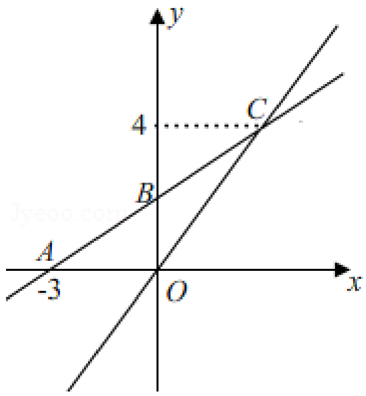
（3）一直线过点 $A(2,\ 3)$，且与直线 $y=-\frac{1}{3}x+3$ 互相垂直， 则这个函数的解析式是__________．
【答案】$y=3x-3$

10.

如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 $x$ 轴交点为 $A(-3,\ 0)$，与 $y$ 轴交点为 $B$，且与正比例函数 $y=\frac{4}{3}x$ 的图象的交于点 $C$（$m$，4）.

（1）求点 $C$ 的坐标；

（2）求一次函数 $y=kx+b$ 的表达式；




【答案】（1）$(3,\ 4)$　　（2）$y=\frac{2}{3}x+2$

# 第十三讲、一次函数（二）

## 模块一、一次函数图像的交点

**一次函数图像求交点：**

1．已知一次函数 $y=k_1x+b_1$ 和 $y=k_2x+b_2$，若 $k_1\neq k_2$，则两直线有交点.

2．交点坐标同时满足两条直线解析式，则交点坐标为方程组 $\begin{cases}y=k_1x+b_1\\y=k_2x+b_2\end{cases}$ 的解.

【例1】

1. （实外半期） 若点（$a$，$b$）在一次函数 $y=2x-3$ 的图像上，则代数式 $4b-8a+2$ 的值是（　　）

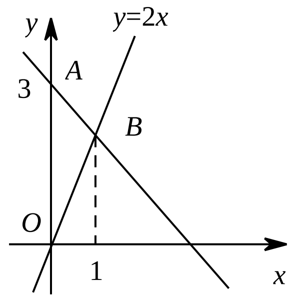
$A$．−10　　　$B$．−6　　　$C$．10　　　$D$．14

【答案】$A$

2.（育才半期）两个关于 $x$、$y$ 的一次函数 $y=5ax-2b$ 和 $y=3ax+2b$ 的图象的交点坐标为（1，-4），则 $a$=_____，$b$=________.

【答案】$a=-1,\ b=-\dfrac{1}{2}$

3．如图，过 $A$ 点的一次函数的图象与正比例函数 $y$=2$x$ 的图象相交于点 $B$，则这个一次函数的解析式是__________.




【答案】 $y=-x+3$

【例2】

1．已知一次函数 $y=2x-1$ 和 $y=-3x+9$，两直线交于点 $M$，试求 $M$ 点坐标.

【答案】$(2,\ 3)$

2. 已知一次函数 $y=x-1$ 与 $y=7x+5$ 交点为 $A$，求 $A$ 的坐标为________.

【答案】$(-1,\ -2)$

【例3】

1．如果一次函数 $y$=2$x$ 和 $y=x+k$ 的图象的交点在第一象限，则 $k$ 的取值范围是_________.

【答案】$k>0$

2. 已知一次函数 $y=\dfrac{3}{7}x+\dfrac{19k-73}{14}$ 和 $y=-2x+\dfrac{13k-41}{6}$ 图象的交点在第四象限且 $k$ 为整数，求 $k$ 的取值.

【解析】$2<k<\dfrac{187}{51}$，则 $k$ 的整数值是 3.

# 模块二、一次函数图像变换

## 知识集锦

**一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 图象的平移、对称和旋转：**

1．平移

利用平移前后 $k$ 值不变，选择一个点进行平移，再确定新的解析式

平移规律：$k$ 值不变，$x$，$y$ 满足“左加右减，上加下减”；

2．对称：

（1）关于 $x$ 轴对称：$k$、$b$ 均变为相反数；

（2）关于 $y$ 轴对称：$k$ 变为相反数，$b$ 不变.

（3）一般对称：找两个点，进行对称变换，再确定新的解析式

3．旋转：选择旋转图象上的两个点，由旋转后得到的两点的对应点坐标确定解析式.

★三大变换通解方法：找两个点（通常是与坐标轴的两个交点），进行相应变化后，确定新的直线解析式.

【例4】

1．在表格中写出平移后的直线解析式

| | | |
|---|---|---|
| $y=-2x+4$ | 向左平移 3 个单位 | |
| | 向右平移 5 个单位 | |
| | 向上平移 2 个单位 | |
| | 向下平移 4 个单位 | |
| | 向左平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位 | |

【答案】$y=-2x-2$；$y=-2x+14$；$y=-2x+6$；$y=-2x$；$y=-2x-4$

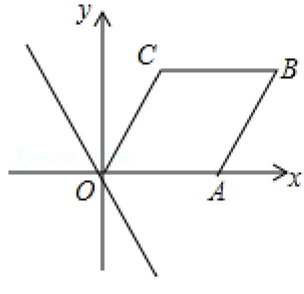
2. 若将直线 $y=kx+b$ 向右平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位，得到直线 $y=2x-1$，写出这个直线的解析式____________.

【答案】$y=2x+3$

3．若将直线 $y=kx+2(k\neq 0)$ 的图象向右平移 3 个单位长度后经过点（2，7），则平移后直线的解析式为____________.

【答案】$y=-5x+17$

4.（嘉祥期末）在平面直角坐标系中， 平行四边形 $OABC$ 的边 $OA$ 在 $x$ 的正半轴上， $B$、$C$ 两点的坐标分别是（3，2）、（1，2），将直线 $y=-2x$ 沿 $y$ 轴向上平移 $m(m>0)$ 个单位， 若平移后的直线与边 $BC$ 有交点， 则 $m$ 的取值范围是_______.




【答案】4⩽$m$⩽8

【例5】

1．已知直线 $y=4x+3$，它关于 $x$ 轴对称的函数关系式为____________；关于 $y$ 轴对称的函数关系式为____________；

【答案】$y=-4x-3$；$y=-4x+3$

2．在平面直角坐标系中，将直线 $y=-3x+4$ 先关于 $x$ 轴作轴对称变换，再将所得直线关于 $y$ 轴作轴对称变换，则经两次变换后所得直线的表达式是（　　）

*A*．$y=4x-3$　　*B*．$y=-4x+3$　　*C*．$y=3x+4$　　*D*．$y=-3x-4$

【答案】*D*

【例6】

1．在平面直角坐标系中，把直线 $y=2x+4$ 绕着原点 $O$ 顺时针旋转 90° 后，所得的直线一定经过下列各点中的（　　）

*A*．（2，0）　　*B*．（4，2）　　*C*．（6，﹣1）　　*D*．（8，﹣1）

【答案】*C*

2．在直角坐标系中，一直线 $a$ 向下平移 3 个单位后所得直线 $b$ 经过点 $A$（0，3），将直线 $b$ 绕点 $A$ 顺时针旋转 60° 后所得直线经过点 $B\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$，则直线 $a$ 的函数关系式为（　　）

*A*．$y=-\sqrt{3}x$　　*B*．$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　*C*．$y=-\sqrt{3}x+6$　　*D*．$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+6$

【答案】*C*

# 模块三、特殊斜率与特殊角

## 知识集锦

**一次函数特殊斜率与特殊角度的关系**

一次函数 $y=kx+b$ 与 $x$ 正半轴夹角为 $\alpha$，斜率 $k$ 与夹角 $\alpha$ 有唯一的对应关系：

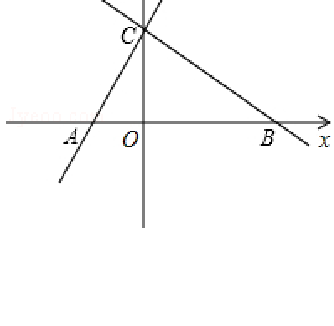
$$\alpha=30°\Leftrightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad \alpha=150°\Leftrightarrow k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha=45°\Leftrightarrow k=1\qquad \alpha=135°\Leftrightarrow k=-1$$

$$\alpha=60°\Leftrightarrow k=\sqrt{3}\qquad \alpha=120°\Leftrightarrow k=-\sqrt{3}$$

【例7】

1．直线 $y=-\frac{\sqrt{a}}{a}x+3$ 和 $x$ 轴、$y$ 轴的交点分别为 $B$、$C$，点 $A$ 的坐标是 $\left(-\sqrt{3},0\right)$，另一条直线经过点 $A$、$C$，求直线 $AC$ 所对应的函数表达式和∠$ACB$ 的度数.

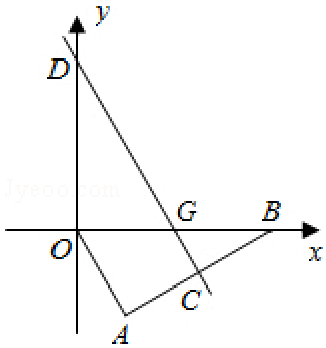



【答案】$y=\sqrt{3}x+3$；$\angle ACB=90°$

2. 如图，在 $Rt\triangle OAB$ 中，$\angle A=90°$，$\angle ABO=30°$，$OB=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，边 $AB$ 的垂直平分线 $CD$ 分别与 $AB$、$x$ 轴、$y$ 轴交于点 $C$、$G$、$D$.

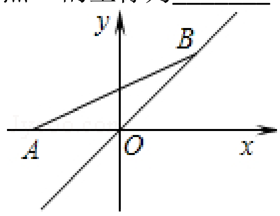
（1）求点 $G$ 的坐标；

（2）求直线 $CD$ 的解析式；




【答案】（1）$G\left(\frac{4}{3}\sqrt{3},0\right)$；（2）$y=-\sqrt{3}x+4$

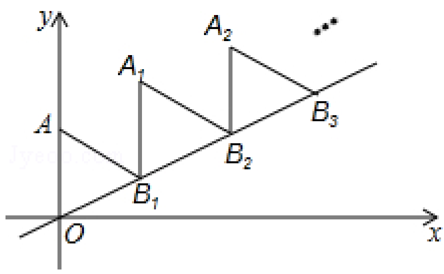
3. 如图，点 $A$ 的坐标为（－2，0），点 $B$ 在直线 $y=x$ 上运动，当线段 $AB$ 最短时点 $B$ 的坐标为_______.




【答案】$(-1,\ -1)$

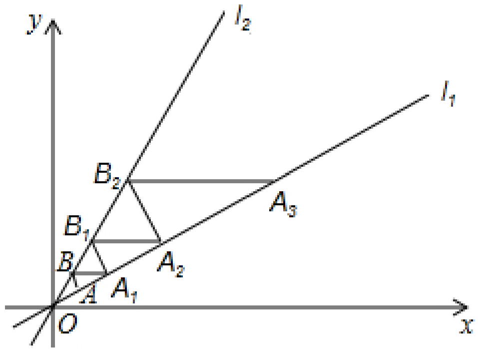
【例8】

1.（成外半期）如图，放置的△$OAB$，△$BA_1B$，△$BAB$，…都是边长为 2 的等边三角形，边 $AO$ 在 $y$ 轴上，点 $B$，$B$…都在直线 $OB$ 上，则 $A_{2017}$ 的坐标是________.




【答案】$A_{2017}\left(2017\sqrt{3},\ 2019\right)$

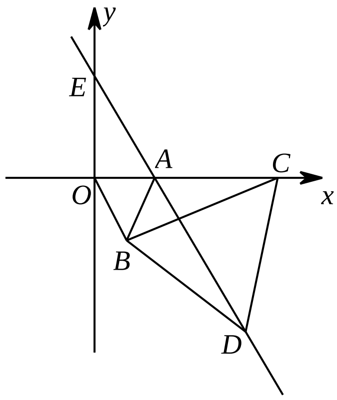
2．（石室联中半期）如图，直线$l_1$与 $x$ 轴夹角为 30°，直线$l_2$与 $y$ 轴夹角为 30°，$B$ 为$l_2$上一点，且 $OB$=2， $BA\perp l_1$于点 $A$，作直线$BA_1$∥$x$轴，交直线$l_1$于点$A_1$，再作$B_1A_1\perp l_1$于点$A_1$，交直线$l_2$于点$B_1$，作$B_1A_2$∥$x$轴，交直线$l_1$于点$A_2$，再作$B_2A_2\perp l_2$于点$B_2$，作$B_2A_3$∥$x$轴交$l_1$于点$A_3$…按此作法继续作下去，则 $An$ 的坐标为________.




【答案】$A_n\left(3\times 2^{n-1}，\ \sqrt{3}\times 2^{n-1}\right)$

# 巅峰挑战

（嘉祥 24 班半期）如图，直角坐标系中，点 $A$ 的坐标为（1，0），以线段 $OA$ 为边在第四象限内作等边△$AOB$， 点 $C$ 为 $x$ 正半轴上一动点（$OC$＞1），连接 $BC$，以线段 $BC$ 为边在第四象限内作等边△$CBD$，直线 $DA$ 交 $y$ 轴于点 $E$，随着点 $C$ 位置的变化，点 $E$ 的位置是否会发生变化？若没有变化，求出点 $E$ 的坐标；若有变化，请说明理由.




【解析】点 $E$ 位置不变.

易证$\triangle OBC\cong\triangle ABD$，$\therefore \angle BAD=\angle BOC=60^\circ$，$\therefore \angle OAE=60^\circ$

在 $Rt\triangle EOA$ 中，$EO=\sqrt{3}$，$\therefore$点 $E$ 的坐标为$\left(0,\ \sqrt{3}\right)$；

# 笔记整理

# 课后练习

1.

（1）若一次函数图象经过点（0，5），（2，-1），则该一次函数与正比例函数 $y=2x$ 的图象交点坐标是_______.

【答案】$(1,\ \ 2)$

（2）两个一次函数 $y=-x+5$ 和 $y=-2x+8$ 的图象的交点坐标是________.

【答案】$(3,\ \ 2)$

（3）如果正比例函数 $y=3x$ 和一次函数 $y=2x+k$ 的图象的交点在第三象限，则 $k$ 的取值范围是_______.

【答案】$k<0$

（4）已知两直线 $y=3x+1$ 与直线 $y=x-2k$ 图象的交点在第三象限内，则 $k$ 的取值范围为________.

【答案】$k>-\dfrac{1}{6}$

（5）若点 $A$（$a$，$b$）在一次函数 $y=2x-1$ 的图象上，则代数式 $4a-2b+3$ 的值为(　　)

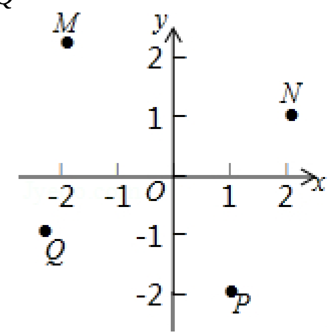
*A*．1　　*B*．2　　*C*．4　　*D*．5

【答案】*D*

2.

（1）如图，在点 $M$，$N$，$P$，$Q$ 中，一次函数 $y=kx+2(k<0)$ 的图象不可能经过的点是（　　）

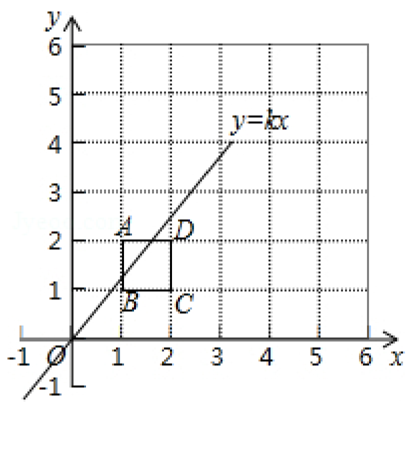
*A*．*M*　　*B*．*N*　　*C*．*P*　　*D*．*Q*




【答案】*D*

（2）如图 2×2 的正方形网格放置在平面直角坐标系中，每个小正方形的顶点称为格点．每个小正方向的边长都是 1，正方形 *ABCD* 的顶点都在格点上，若直线 $y=kx(k\neq 0)$ 与正方形 *ABCD* 有公共点，则 $k$ 不可能是（　　）

*A*．1　　*B*．$\dfrac{1}{2}$　　*C*．3　　*D*．2




【答案】*C*

3.

（1）将一次函数 $y=kx+5(k\neq 0)$ 的图象向下平移 5 个单位后，所得直线的解析式为_________，平移后的直线经过点（5，-10），则平移后的解析式为__________.

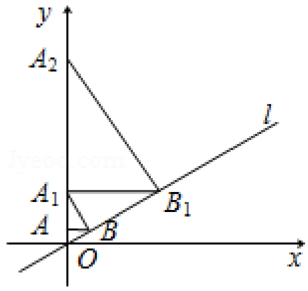
【答案】 $y=kx$； $y=-2x$

（2）直线 $y=3x+2$ 关于 $x$ 轴对称的函数关系式为_________.

【答案】 $y=-3x-2$

4.

如图，已知直线 $l: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，过点 $A$（0，1）作 $Y$ 轴的垂线交直线 $l$ 于点 $B$，过点 $B$ 作直线 $l$ 的垂线交 $Y$ 轴于点 $A_1$；过点 $A_1$ 作 $y$ 轴的垂线交直线 $l$ 于点 $B_1$，过点 $B_1$ 作直线 $l$ 的垂线交 $y$ 轴于点 $A_2$；…；按此作法继续下去，则点 $A_5$ 的坐标为__________.




【答案】 $(0,\ 2^{10})$

【解析】∵点 $A$ 的坐标是 $(0,\ 1)$，∴ $OA=1$，∵点 $B$ 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上，∴ $OB=2$，

∴ $OA_1=4$，∴ $OA_2=16$，得出 $OA_3=64$，∴ $OA_5=4^5$，∴ $A_5$ 的坐标是 $(0,\ 2^{10})$

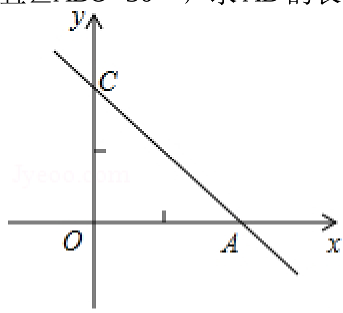
5.

如图，已知一次函数 $y=-x+2$ 的图象与 $x$ 轴交于点 $A$，与 $y$ 轴交于点 $C$.

（1）求∠$CAO$ 的度数；

（2）若将直线 $y=-x+2$ 沿 $x$ 轴向右平移两个单位，试求出平移后的直线的解析式；

（3）若正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的图象与 $y=-x+2$ 的图象交于点 $B$，且∠$ABO$=30°，求 $AB$ 的长




【解析】（1）对于一次函数 $y=-x+2$，令 $x=0$，求出 $y=2$；令 $y=0$，求出 $x=2$，

$\therefore A(2,\ 0)$，$C(0,\ 2)$，即 $OA=OC=2$，∴ $\triangle AOC$ 为等腰直角三角形，∴ $\angle CAO=45°$；

（2）平移后的直线解析式为 $y=-(x-2)+2=-x+4$；

（3）根据题意画出相应的图形，过 $O$ 作 $OD\perp AB$，于点 $D$,

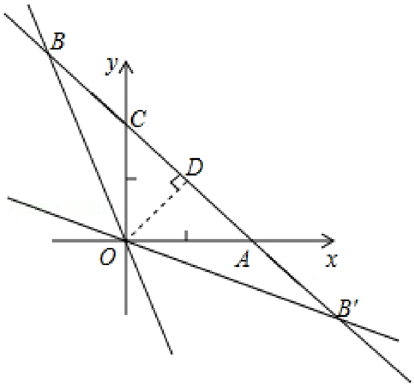
∵一次函数 $y=-x+2$ 的图象与 $x$ 轴交于点 $A$, 与 $y$ 轴交于点 $C$, ∴可求出 $A(2,\ 0)$，$C(0,\ 2)$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 是等腰直角三角形，∴ $DO=CD=AD$，∵ $CO=OA=2$，∴ $CD=DO=AD=\sqrt{2}$，

在 $\triangle DOB$ 中，$\angle DBO=30°$，∴ $BO=2\sqrt{2}$，∴ $BD=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，∴ $AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

当 $B$ 位于 $B'$ 时同理可得 $AB=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

综上所述，$AB=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

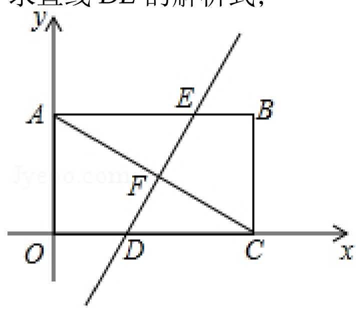



6.

如图，平面直角坐标系中，矩形 *OABC* 的对角线 *AC*=12，∠*ACO*=30°，

（1）求 *B*、*C* 两点的坐标；

（2）把矩形沿直线 *DE* 对折使点 *C* 落在点 *A* 处，*DE* 与 *AC* 相交于点 *F*，求直线 *DE* 的解析式；




【解析】（1）在直角 $\triangle OAC$ 中，$\angle ACO=30^\circ$，$\therefore$ 设 $OA=\sqrt{3}x$，则 $OC=3x$，

根据勾股定理得：$(3x)^2+(\sqrt{3}x)^2=AC^2$，即 $9x^2+3x^2=144$，解得：$x=2\sqrt{3}$.

故 $C$ 的坐标是：$(6\sqrt{3},\ 0)$，$B$ 的坐标是 $(6\sqrt{3},\ 6)$，；

（2）直线 $AC$ 的斜率是：$-\dfrac{6}{6\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则直线 $DE$ 的斜率是：$\sqrt{3}$.

$F$ 是 $AC$ 的中点，则 $F$ 的坐标是 $(3\sqrt{3},\ 3)$，设直线 $DE$ 的解析式是 $y=\sqrt{3}x+b$，

则 $9+b=3$，解得：$b=-6$，则直线 $DE$ 的解析式是：$y=\sqrt{3}x-6$；

# 第十四讲、一次函数与代数综合

## 模块一、一次函数与方程（组）

### 知识集锦

**1．一次函数与一元一次方程的关系**

对于任意的一元一次方程，都可以变形为 $ax+b=0\ (a\neq 0)$ 的形式.

从“数”的角度看：解一元一次方程相当于在一次函数 $y=ax+b\ (a\neq 0)$ 的函数值 $y$ 为 0 时，求自变量 $x$ 的值；

从“形”的角度看：解一元一次方程相当于求直线 $y=ax+b$ 与 $x$ 轴交点的横坐标.

| **从数的角度看** | **从形的角度看** |
| --- | --- |
| 求 $ax+b=0$（$a\neq 0$）的解 | 求 $ax+b=0$（$a\neq 0$）的解 |
| $\Updownarrow$ | $\Updownarrow$ |
| $x$ 为何值时，$y=ax+b$ 的值为0 | 确定直线 $y=ax+b$ 与x轴交点的横坐标 |

**2．一次函数与二元一次方程组的关系**

一般的，每个二元一次方程组都对应两个一次函数，于是也对应两条直线.

从“数”的角度看：解方程组相当于考虑自变量为何值时两个函数的值相等，以及这个函数值是何值；

从“形”的角度看：解方程组相当于确定两条直线交点的坐标.

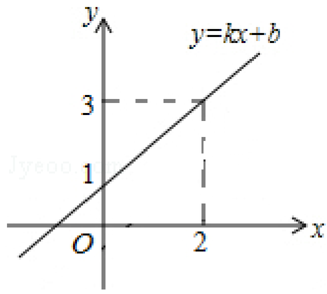
| **从数的角度看** | **从形的角度看** |
| --- | --- |
| 求方程组的解 | 求方程组的解 |
| $\Updownarrow$ | $\Updownarrow$ |
| $x$ 为何值时，两个函数值相等 | 确定两条直线交点的坐标 |

【例1】

1. 已知直线 $y=mx+n$（$m$，$n$ 为常数）经过点（0，−2）和（3，0），则关于 $x$ 的方程 $mx+n=0$ 的解为____________.

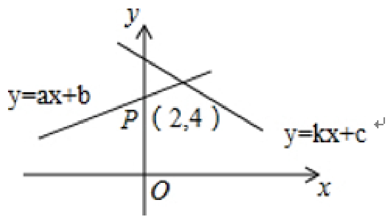
【答案】$x$=3

2. 一次函数 $y=kx+b$（$k,b$ 为常数，$k\neq0$）的图象如图所示，根据图象信息可求得关于 $x$ 的方程 $kx+b=3$ 的解为________.




【答案】$x$=2

3. 如图，一次函数 $y=ax+b$ 和 $y=kx+c$ 交于点 $P$（2，4），则关于 $x$ 的一元一次方程 $ax+b=kx+c$ 的解是____________.




【答案】$x$=2

【例2】

1．已知关于 $x$ 的方程 $ax-b=1$ 的解为 $x=-1$，则一次函数 $y=ax-b-1$ 的图象与 $x$ 轴交点的坐标为____________.

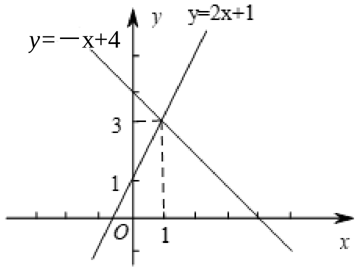
【答案】（−1，0）

2．关于 $x$ 的方程 $kx+b=3$ 的解为 $x$=7，则直线 $y=kx+b$ 的图象一定过点____________.

【答案】（7，3）

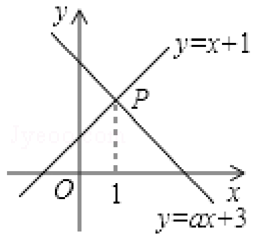
【例3】

1.（师大一中半期）如图，二元一次方程组 $\begin{cases}y=-x+4\\y=2x+1\end{cases}$ 的解是___________.




【答案】$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$

2.（成外半期）如图，已知函数 $y=x+1$ 和 $y=ax+3$ 图象交于点 $P$，点 $P$ 的横坐标为 1，则关于 $x$，$y$ 的方程组 $\begin{cases}x-y=-1\\ax-y=-3\end{cases}$ 的解是______.



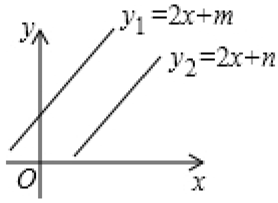

【答案】$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

3．已知关于 $x$，$y$ 的方程组 $\begin{cases}x+y=1\\ax+3y=8\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$，写出一次函数 $y=-x+1$ 和 $y=-\frac{a}{3}x+\frac{8}{3}$ 的图象交点 $P$ 的坐标是______.

【答案】（-1，2）

【例4】

1．已知一次函数 $y_1=2x+m$ 与 $y_2=2x+n\left(m\neq n\right)$ 的图象如图所示，则关于 $x$ 与 $y$ 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x-y=-m\\2x-y=-n\end{cases}$ 的解的个数为________.




【答案】0 个

2．如果方程组 $\begin{cases}y=-x+1\\y=\left(2k+1\right)x-3\end{cases}$ 无解，那么直线 $y=\left(-k+1\right)x-3$ 不经过第________象限.

【解析】∵方程组 $\begin{cases}y=-x+1\\y=\left(2k+1\right)x-3\end{cases}$ 无解，∴直线 $y=-x+1$ 与 $y=\left(2k+1\right)x-3$ 平行，

∴ $-1=2k+1$，解得 $k=-1$，在直线 $y=2x-3$ 中，∵2＞0，－3＜0，

∴直线 $y=2x-3$ 经过第一、三、四象限，不经过第二象限.

# 模块二、一次函数与不等式

## 知识集锦

**一次函数与一元一次不等式的关系**

从“数”的角度看：

解不等式$ax+b>0$相当于求自变量$x$在什么范围内，$y=ax+b$的值大于0；

解不等式$ax+b<0$相当于求自变量$x$在什么范围内，$y=ax+b$的值小于0.

从“形”的角度看：

只需找到直线与$x$轴的交点，

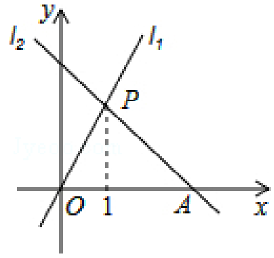
当$x>$交点横坐标，$ax+b>0$或$ax+b<0$

当$x<$交点横坐标，$ax+b>0$或$ax+b<0$

【例5】

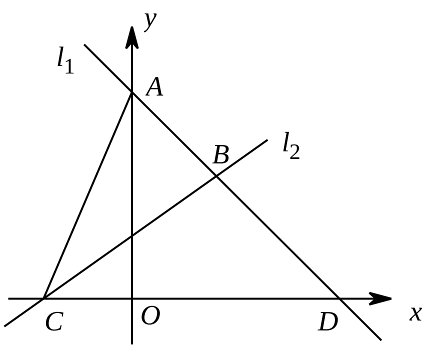
1．如图所示，直线$l_1$：$y_1=2x$与直线$l_2$：$y_2=-x+4$交于点$P$，

当$x$______时，$y_1=0$；当$x$______时，$y_1<0$；当$x$______时，$y_2\geq0$；当$x$______时，$y_1>y_2$.



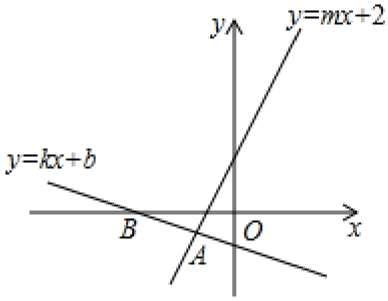

【答案】$=0$；$<0$；$\leqslant4$；$>1$

2．（七中万达半期）如图，直线$l_1:y=kx+b$过点$A$（0，3），点$D$（3，0），直线$l_2:y=\frac{1}{2}x+1$与$x$轴交于点$C$，两直线$l_1$，$l_2$相交于点$B$，当$kx+b>\frac{1}{2}x+1$时，求$x$的取值范围.




【答案】 $x<\frac{4}{3}$

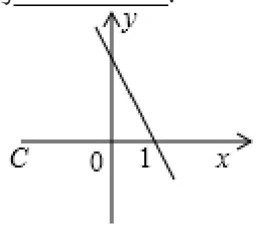
3. 如图，平面直角坐标系中，经过点 $B(-4,0)$ 的直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=mx+2$ 相交于点 $A\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ 则不等式 $mx+2<kx+b<0$ 的解集为___________.




【答案】$-4<x<-\frac{3}{2}$

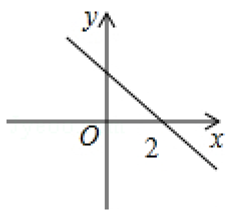
【例6】

1. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示，则关于 $x$ 的不等式 $kx-2b>0$ 的解集为___________.



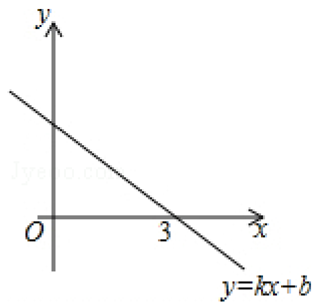

【答案】$x<-2$

2．若函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示，则关于 $x$ 的不等式 $k(x-1)+b<0$ 的解集为_______.




【答案】$x>3$

3．若一次函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示，则关于 $x$ 的不等式 $k(x-4)-2b\geqslant 0$ 的解集为_______.




【解析】把（3，0）代入 $y=kx+b$ 得 $3k+b=0$，则 $b=-3k$，

$\therefore k(x-4)-2b\geq 0$ 化为 $k(x-4)+6k\geq 0$，$\because k<0$，

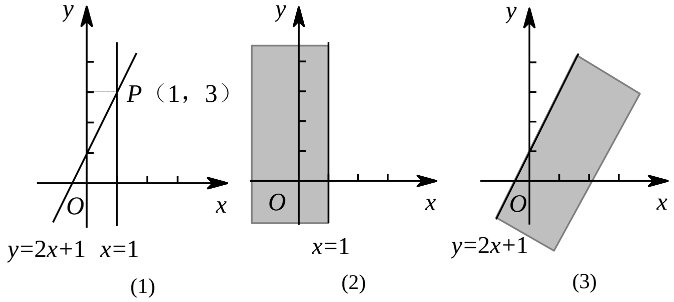
$\therefore x-4+6\leq 0$，$\therefore x\leqslant -2$.

【例7】

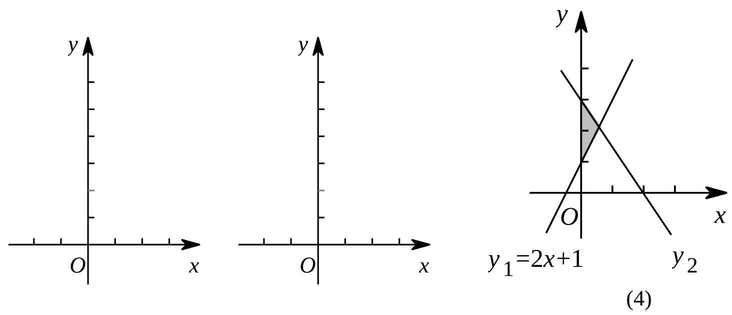
1. 阅读：我们知道，在数轴上，$x=1$表示一个点，而在平面直角坐标系中，$x=1$表示一条直线；我们还知道，以二元一次方程$2x-y+1=0$的所有解为坐标的点组成的图形就是一次函数$y=2x+1$的图象，它也是一条直线，如图（1）.

观察图（1）可以得出：直线$x=1$与直线$y=2x+1$的交点$P$的坐标（1，3）就是方程组$\begin{cases}x=1\\2x-y+1=0\end{cases}$的解，所以这个方程组的解为$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$；

在直角坐标系中，$x\le 1$表示一个平面区域，即直线$x=1$以及它左侧的部分，如图（2）；$y\le 2x+1$也表示一个平面区域，即直线$y=2x+1$以及它下方的部分，如图（3）.




（1）在下面的直角坐标系中，用作图象的方法求出方程组$\begin{cases}x=-1\\y=-2x+2\end{cases}$的解；

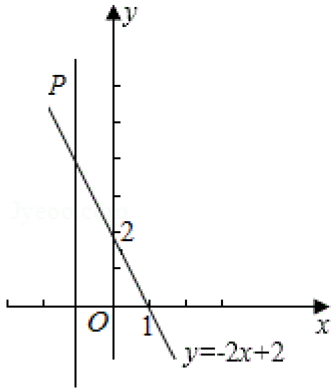



（2）在上面的直角坐标系中，用阴影表示$\begin{cases}x\ge -2\\y\le -2x+2\\y\ge 0\end{cases}$所围成的区域.

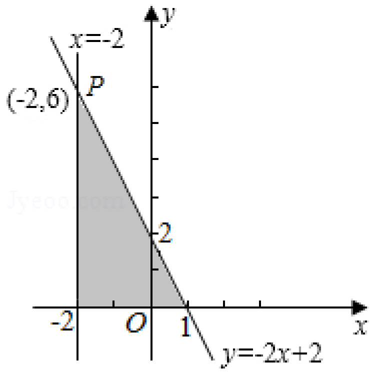
（3）如图（4），表示阴影区域的不等式组为：____________________________.

【解析】（1）如图所示，在坐标系中分别作出直线$x=-1$和直线$y=-2x+2$，这两条直线的交点是$P(-1,\ 4)$.

则$\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$是方程组$\begin{cases}x=-1\\y=-2x+2\end{cases}$的解．故答案为：$\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$.



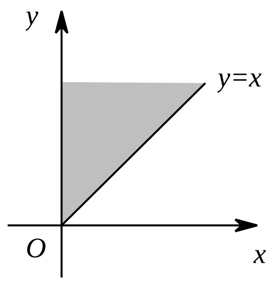

（2）如阴影所示．




（3）由图象可知：$x\geqslant 0$，$y\leqslant y_2$，$y\geqslant y_1$，表示阴影区域的不等式组为$\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 2x+1\\ y\leqslant y_2\end{cases}$．

2.（嘉祥半期）如图，平面直角坐标系 $xOy$ 中，阴影部分（射线 $y=x$，$x>0$ 与 $y$ 正半轴之间，不含边界）的点的坐标（$x$，$y$）满足（　　）

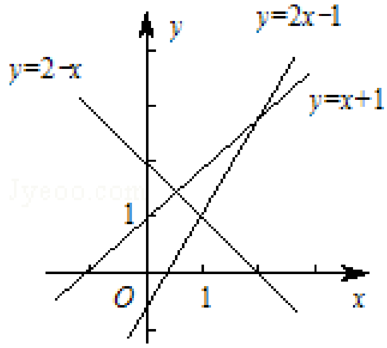
A．$x>0$，$y>0$　　B．$x>y>0$　　C．$y>x>0$　　D．$y=x>0$




【答案】$C$

# 巅峰挑战

对于三个数 $a$、$b$、$c$，用 $min\{a，b，c\}$表示这三个数中最小的数，例如，$min\{5，2，3\}=2$，$min\{-1,2,a\}=\begin{cases}a(a\le -1)\\-1(a>-1)\end{cases}$．那么观察图象，可得到$min\{x+1,\ 2-x,\ 2x-1\}$ 的最大值为________．




【解析】当 $x>2$ 时，$min\{x+1,\ 2-x,\ 2x-1\}=2-x<0$，

当 $1<x<2$ 时，$min\{x+1,\ 2-x,\ 2x-1\}=2-x<1$，

当 $1=x$ 时，$min\{x+1,\ 2-x,\ 2x-1\}=1$，

当 $1>x$ 时，$min\{x+1,\ 2-x,\ 2x-1\}=2x-1<0$，

综上所述：当 $1=x$ 时，

$min\{x+1,\ 2-x,\ 2x-1\}=1$，最大为 1．

# 笔记整理

## 课后练习

1.

（1）直线 $y=kx+b$ 与 $x$ 轴交于点 $A$（－4，0），则 $kx+b=0$ 的解为（　　）

$A$．$x=-4$　　$B$．$x=0$　　$C$．$x=b$　　$D$．无解

【答案】$A$

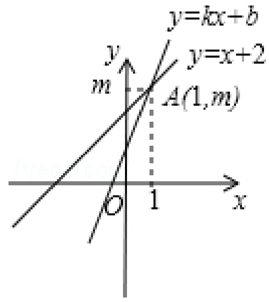
【解答】∵直线 $y=kx+b$ 与 $x$ 轴交于点（－4，0），

∴当 $x=-4$ 时，$y=kx+b=0$；

∴关于 $x$ 的方程 $kx+b=0$ 的解为：$x=-4$．

（2）用图象法解二元一次方程组 $\begin{cases}kx-y+b=0\\x-y+2=0\end{cases}$ 时，小英所画图象如图所示，则方程组的解为（　　）

$A$．$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$　　$B$．$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$　　$C$．$\begin{cases}x=1\\y=2.5\end{cases}$　　$D$．$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$



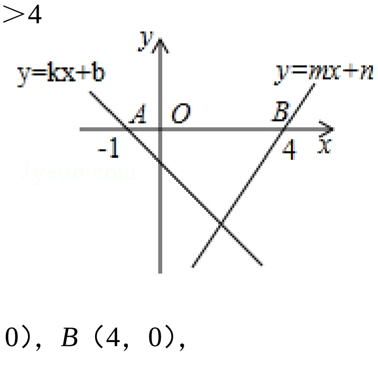

【答案】$D$

【解答】∵直线 $y=kx+b$ 与 $y=x+2$ 的交点坐标为（1，3），

∴二元一次方程组 $\begin{cases}kx-y+b=0\\x-y+2=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$

（3）如图，直线 $y=kx+b$ 与 $y=mx+n$ 分别交 $x$ 轴于点 $A$（－1，0），$B$（4，0），则不等式 $(kx+b)(mx+n)>0$ 的解集为（　　）

$A$．$x>2$　　$B$．$0<x<4$　　$C$．$-1<x<4$　　$D$．$x<-1$ 或 $x>4$



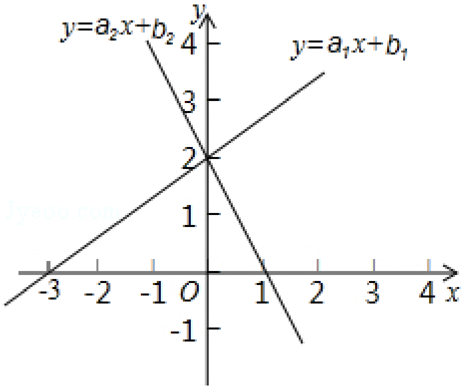

【答案】$C$

【解答】∵直线 $y_1=kx+b$ 与直线 $y_2=mx+n$ 分别交 $x$ 轴于点 $A$（－1，0），$B$（4，0），

∴不等式 $(kx+b)(mx+n)>0$ 的解集为 $-1<x<4$，

（4）如图，图中是 $y=a_1x+b_1$ 和 $y=a_2x+b_2$ 的图象，根据图象填空.

$\begin{cases}a_1x+b_1>0\\a_2x+b_2>0\end{cases}$ 的解集是__________；$\begin{cases}a_1x+b_1<0\\a_2x+b_2>0\end{cases}$ 的解集是__________；$\begin{cases}a_1x+b_1<0\\a_2x+b_2<0\end{cases}$ 的解集是__________.




【答案】－3＜$x$＜1；$x$＜－3；无解

【解答】由题意 $\begin{cases}a_1x+b_1>0\\a_2x+b_2>0\end{cases}$ 知：由图象知 $y=a_1x+b_1>0$ 时有 $x>-3$，函数 $y=a_2x+b_2>0$ 时有 $x<1$，

∴不等式组 $\begin{cases}a_1x+b_1>0\\a_2x+b_2>0\end{cases}$ 的解集的解集为：$-3<x<1$；

由题 $\begin{cases}a_1x+b_1<0\\a_2x+b_2>0\end{cases}$ 知：由图象知 $y=a_1x+b_1<0$ 时有 $x<-3$，

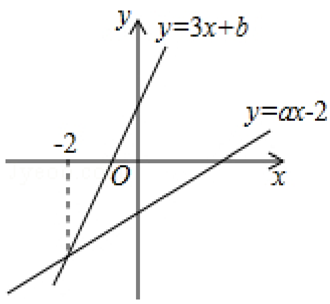
根据函数图象知 $y=a_2x+b_2>0$ 时有 $x<1$，∴不等式组 $\begin{cases}a_1x+b_1<0\\a_2x+b_2>0\end{cases}$ 的解集为：$x<-3$；

由题意. . 知：根据函数图象知 $y=a_1x+b_1<0$ 时有 $x<-3$，

根据函数图象知 $y=a_2x+b_2<0$ 时有 $x>1$，∴不等式组 $\begin{cases}a_1x+b_1<0\\a_2x+b_2<0\end{cases}$ 的解集是空集；

2.

（1）如图，已知直线 $y=3x+b$ 与 $y=ax-2$ 的交点的横坐标为－2，则关于 $x$ 的方程 $3x+b=ax-2$ 的解为 $x$=_______.



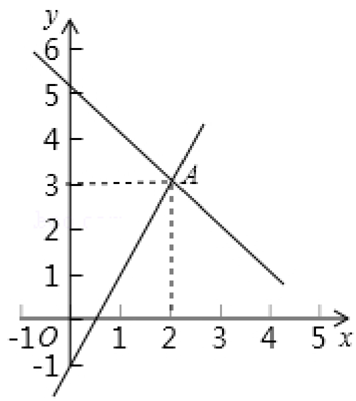

【答案】−2

【解答】∵直线 $y=3x+b$ 与 $y=ax-2$ 的交点的横坐标为－2，

∴当 $x$=－2 时，$3x+b=ax-2$，

∴关于 $x$ 的方程 $3x+b=ax-2$ 的解为 $x$=－2.

（2）如图，点 $A$ 的坐标可以看成是方程组_______的解.




【答案】$\begin{cases} y=-x+5 \\ y=2x-1 \end{cases}$

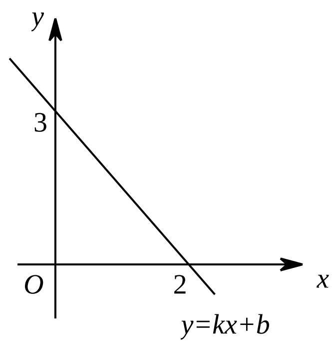
【解答】设过点（0，5）和点（2，3）的解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases} b=5 \\ 2k+b=3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k=-1 \\ b=5 \end{cases}$，所以该一次函数解析式为 $y=-x+5$；

设过点（0，－1）和点（2，3）的解析式为 $y=mx+n$，则 $\begin{cases} n=-1 \\ 2m+n=3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}$，所以该一次函数解析式为 $y=2x-1$，

所以点 $A$ 的坐标可以看成是方程组 $\begin{cases} y=-x+5 \\ y=2x-1 \end{cases}$ 解.

（3）如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 $x$ 轴，$y$ 轴分别交于点（2，0），点（0，3）．有下列结论：①关于 $x$ 的方程 $kx+b=0$ 的解为 $x=2$；②关于 $x$ 的方程 $kx+b=3$ 的解为 $x=0$；③当 $x>2$ 时，$y<0$；④当 $x<0$ 时，$y<3$．其中正确的是（　　）

*A*．①②③　*B*．①③④　*C*．②③④　*D*．①②④




【答案】*A*

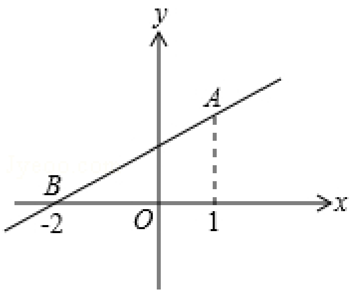
【解答】由图象得：①关于 $x$ 的方程 $kx+b=0$ 的解为 $x=2$，正确；

②关于 $x$ 的方程 $kx+b=3$ 的解为 $x=0$，正确；

③当 $x>2$ 时，$y<0$，正确；

④当 $x<0$ 时，$y>3$，错误；

（4）如图，直线 $y=kx+b$ 经过 $A$（1，2）和 $B$（－2，0）两点，则不等式组 $-x+3\geq kx+b>0$ 的解集为_________.




【答案】$-2<x\leqslant 1$

【解答】直线 $y=kx+b$ 经过 $A$（1，2）和 $B$（－2，0）两点，

可得：$\begin{cases} k+b=2 \\ -2k+b=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ b=\dfrac{4}{3} \end{cases}$；

则不等式组 $-x+3\geq kx+b>0$ 可化为 $-x+3\geq \dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}>0$，

解得 $-2<x\leqslant 1$

3.

已知函数 $y_1=x$，$y_2=2x+3$，$y_3=-x+4$，若无论 $x$ 取何值，$y$ 总取 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 中的最小值，则 $y$ 的最大值为多少？

【解答】分别联立 $y_1$、$y_2$，$y_1$、$y_3$，$y_2$、$y_3$，可知 $y_1$、$y_2$ 的交点 $A$（－3，－3）；$y_1$、$y_3$ 的交点 $B$（2，2）；$y_2$、$y_3$ 的交点 $C\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$，

∵$y_1$ 与 $y_3$ 的交点最高，

∴$y_1=x$，与 $y_3=-x+4$ 的交点的 $y$ 值最大，

∴ $\begin{cases} y=x \\ y=-x+4 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

∴$y$ 的最大值为 2.