目录

第一讲 计算综合（二）

例题精讲

【例 1】$(\frac{2008}{2007}\times 2008)+(\frac{2008}{2007}\times 2006)+(\frac{2008}{2007}\times 2004)+\cdots+(\frac{2008}{2007}\times 4)+(\frac{2008}{2007}\times 2)$ 的结果为 x，$(\frac{2008}{2007}\times 1)+(\frac{2008}{2007}\times 3)+(\frac{2008}{2007}\times 5)+\cdots+(\frac{2008}{2007}\times 2005)+(\frac{2008}{2007}\times 2007)$ 的结果为 y，那么与 $x-y$ 最接近的整数是多少?

【解析】$x-y=\frac{2008}{2007}\times(2008-2007+2006-2005+\cdots+2-1)=(1+\frac{1}{2007})\times 1004=1004+\frac{1004}{2007}$

而 $\frac{1004}{2007}>\frac{1}{2}$，所以与 $x-y$ 最接近的整数是 1005.

【答案】1005

【例 2】计算：$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}-\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=$________.

【解析】原式$=\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$．注意每个繁分数中分子和分母的关系.

【答案】$\frac{1}{4}$

【例 3】计算：$\dfrac{19\frac{5}{9}+3\frac{9}{10}-5.22}{19\frac{5}{9}-6\frac{27}{50}+5.22}\div\left(\dfrac{1993\times 0.4}{1995\times 0.5}+\dfrac{1.6}{1995}\right)$.

【解析】原式$=\dfrac{19\frac{5}{9}-1.32}{19\frac{5}{9}-1.32}\div\left(\dfrac{1993\times 0.4\times 2}{1995\times 0.5\times 2}+\dfrac{1.6}{1995}\right)=\dfrac{5}{4}$.

【例 4】定义新运算"*"：对任意正整数 m、n，$\frac{1}{m*n}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$．已知 $m*n=6$，

$\left(\frac{1}{m}\right)*\left(\frac{1}{n}\right)=25$

那么 m 和 n 的差是多少?

【解析】容易算出 $m\times n=25,\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{6}$，因此 m 和 n 分别为 10 和 15，差为 5.

【例 5】已知 $333\frac{111}{112}:\square=37:\dfrac{54+55+56+57+58}{4+5+6+7+8}$，那么□所代表的数是________.

【解析】首先计算 $333\frac{111}{112}\div 37=333\div 37+\frac{111}{112}\div 37=3\times 3+\frac{3}{112}$，而

$\dfrac{54+55+56+57+58}{4+5+6+7+8}=\dfrac{5\times 56}{5\times 6}=\dfrac{28}{3}$，□代表的数为

$\left(9+\frac{3}{112}\right)\times\frac{28}{3}=9\times\frac{28}{3}+\frac{3}{112}\times\frac{28}{3}=3\times 28+\frac{1}{4}=84\frac{1}{4}$.

【例 6】计算：$\dfrac{3.75\times\frac{8}{15}+15\frac{2}{5}\div 1.1}{1.37+2.68+0.63+3.32}=$________.

【解析】$\dfrac{3.75\times\frac{8}{15}+15\frac{2}{5}\div 1.1}{1.37+2.68+0.63+3.32}$

$=\dfrac{2+\frac{70}{5}}{(1.37+0.63)+(2.68+3.32)}$

$=\dfrac{16}{8}=2$.

【例 7】计算：$\dfrac{1}{0.\dot{6}+\dfrac{1}{0.\dot{7}+\dfrac{1}{0.\dot{8}+\dfrac{1}{0.\dot{9}}}}}=$__________.

【解析】$\dfrac{600}{859}$

【例 8】计算：$\dfrac{(3.4-1.275)\times\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\times\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0.5\times\left(2+\dfrac{12.5}{5.75+\frac{1}{2}}\right)=$________.

【解析】原式$=\dfrac{2.125\times\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\times 7\frac{17}{85}}+0.5\times\left(2+\dfrac{12.5}{6.25}\right)$

$=\dfrac{\frac{17}{8}\times\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\times\frac{36}{5}}+0.5\times(2+2)$

$=\dfrac{2}{2}+0.5\times 4=1+2=3$.

【例 9】乘积$\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\times\left(2+\dfrac{4}{5}\right)\times\cdots\times\left(8+\dfrac{16}{17}\right)\times\left(9+\dfrac{18}{19}\right)$的计算结果的个位数字是________，十位数字是________.

【解析】

原式$=\left(1+\dfrac{1\times 2}{3}\right)\times\left(2+\dfrac{2\times 2}{5}\right)\times\cdots\times\left(8+\dfrac{8\times 2}{17}\right)\times\left(9+\dfrac{9\times 2}{19}\right)$

$=(1\times 2\times\cdots\times 9)\times\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\times\left(1+\dfrac{2}{5}\right)\times\cdots\times\left(1+\dfrac{2}{19}\right)$

$=(1\times 2\times\cdots\times 9)\times\left(\dfrac{5}{3}\times\dfrac{7}{5}\times\cdots\times\dfrac{21}{19}\right)$

$=(2\cdot 5)\cdot(3\cdot 4\cdot 6\cdot 7^2\cdot 8\cdot 9)$ ，

因此该式的个位数字为 0，十位数字为积$3\cdot 4\cdot 6\cdot 7^2\cdot 8\cdot 9$的个位数字 6.

【例 10】 今有算式$\{[0.7\times(0.1+0.5)+0.8]\div 0.4\}\div[0.6+0.9\div(0.3+0.2)]$若把其中的各种括号只理解为表示运算顺序，则可以得到一个结果，而如果将其中的[]和{}还分别视作取一个数的整数部分和小数部分，则能得到另一个结果．那么这两个计算结果的和

是________.

【解析】按通常的方式理解有

原式$=\{[0.7\times0.6+0.8]\div0.4\}\div[0.6+0.9\div0.5]$

$=\{[0.42+0.8]\div0.4\}\div[0.6+1.8]=\{1.22\div0.4\}\div2.4$

$=3.05\div2.4=1\frac{13}{48}$.

如果“[]”和“{}”还分别看作取整数部分与小数部分，则有

原式$=\{[0.42+0.8]\div0.4\}\div[0.6+1.8]=\{1\div0.4\}\div2$

$=0.5\div2=\frac{1}{4}$.

两个结果之和是$1\frac{13}{48}+\frac{1}{4}=1\frac{25}{48}$.

【例 11】 化简$11\frac{7}{13}\div\frac{1995^2-1995+1}{1995^2-1995\times1994+1994^2}=$________.

【解析】$11\frac{7}{13}$

【例 12】 巧算$1\frac{1}{1024}+2\frac{1}{512}+4\frac{1}{256}+\cdots+256\frac{1}{4}+512\frac{1}{2}=$________.

【解析】$1023\frac{1023}{1024}$

巅峰挑战

1. 定义：$a_n=\dfrac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{1})\times(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{n})}$

（1）求出a_1、a_2、a_{100}、a_{200}的大小；

（2）计算：$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\frac{4}{a_4}+\cdots+\frac{100}{a_{100}}$

【解析】（1）先化简

$a_n=\dfrac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{1})\times(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{n})}=\dfrac{\frac{1}{n}}{2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，所以直接代入

通项公式可得$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{6}$，$a_{100}=\frac{1}{10100}$，$a_{200}=\frac{1}{40200}$

（2）通项归纳$\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{n}{\frac{1}{n(n+1)}}=n\times n\times(n+1)=n^3+n^2$，所以原式

$=(1^3+2^3+\cdots+100^3)+(1^2+2^2+\cdots+100^2)$

$=\dfrac{100^2\times101^2}{4}+\dfrac{100\times101\times201}{6}$

$=25840850$

【答案】（1）$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{6}$，$a_{100}=\frac{1}{10100}$，$a_{200}=\frac{1}{40200}$（2）25840850

2. 巧算 $(\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\cdots+\frac{201}{2^{100}})+\frac{205}{2^{100}}=$________.

【答案】6

登峰造极

1.所有分母小于 30 并且分母是质数的真分数相加，和是________.

【答案】$59\frac{1}{2}$

将 2006 个分数 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{2007}$ 化为小数，那么其中纯循环小数有多少个?

【答案】802

笔记整理

第二讲 从反面情况考虑

走出考场，同学们放松心情.

邹大胖就问马大胖：“你做题咋就那么快，我们时间都不够，你为什么时间不到一半就交卷了?”

“很简单啊！”

“你做了几面?”

“三面啊！”

“不对，是六面！”

“啊！反面还有题目啊！”

知识点拨

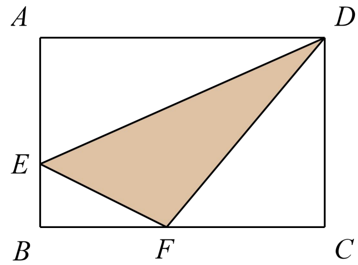
对于很多数学问题,通常采用正面求解的思路,即从条件出发,求得结论.但是,如果直接从正面不易找到解题思路时,则可改变思维的方向,从结论入手或从条件及结论的反面进行思考,从而使问题得到解决．即：正难则反.

本讲主要学习“从反面思考”在几何、计数及求最值中的应用.

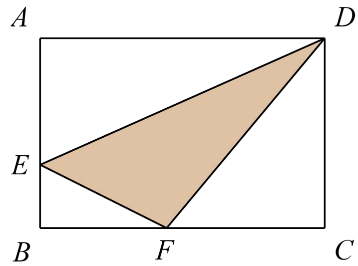
例题精讲

模块一 几何中的反面考虑

【例 1】(1)如图长方形 $ABCD$ 的长 AD 为 $9cm$,宽 AB 为 $6cm$,AE=4cm,FC=$5cm$,则阴影部分的面积是多少?



(2)如图长方形 $ABCD$ 的长 AD 为 9cm,宽 AB 为 6cm,△ADE、四边形 $DEBF$ 及△CDF 的面积相等,则阴影部分的面积是多少?

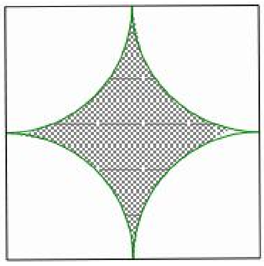


【解析】(1)阴影部分是一个三角形,要求面积必须先找底和高,但是发现不管以哪条边为底,底和高都很难求,所以我们从反面考虑,先求出空白部分面积,再用长方形面积减掉空余部分面积．在未来几何图形的学习中这种方法会频繁出现．

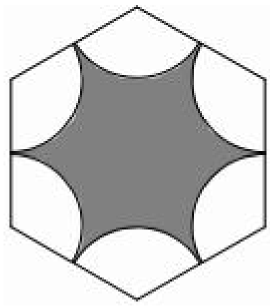
三角形 $ABCD$ 的面积为 9×6=54 平方厘米,△ADE 的面积为 9×4÷2=18 平方厘米、△CDF 的面积为 6×5÷2=15 平方厘米,△BEF 的面积为 2×4÷2=4 平方厘米,所以△DEF 的面积为 54-18-15-4=17 平方厘米．

(2)长方形 $ABCD$ 的面积：9×6=54 平方厘米,△ADE、四边形 $DEBF$ 及△CDF 的面积相等,所以每一块的面积为 54÷3=18 平方厘米．那么 AE 的长度为 18×2÷9=4 厘米,CF 的长度为 18×2÷6=6 厘米,所以 BE=6－4=2 厘米,BF=9－6=3 厘米,所以△BEF 的面积为 2×3÷2=3 平方厘米,所以阴影部分面积为 18－3=15 平方厘米．

【例 2】(1)如图,已知正方形的边长为 10 厘米,则阴影部分的面积为________平方厘米．（圆周率取 3.14）



(2)如图所示,图中是一个正六边形,面积为 1040 平方厘米,空白部分是 6 个半径为 10 厘米的小扇形,则阴影的面积为________平方厘米．(圆周率取 3.14)



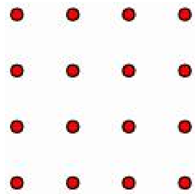
答案：21．5；412

模块二 计数中的反面考虑

【例 3】10 个人围成一圈，从中选出两个不相邻的人，共有多少种不同选法?

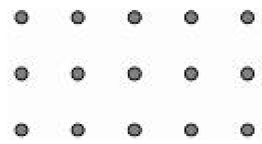
【解析】从所有的两人组合中排除相邻的情况，总的组合数为 $C_{10}^{2}=45$，而被选的两个人相邻的情况有 10 种，所以共有 45-10=35 种．

【例 4】下图为 4×4 的点阵,取不同的三个点可能组合一个三角形,问总共可以组成________个三角形．



【解析】反面考虑，可以从总数中去掉不能组成三角形的点：$C_{16}^{3}-8C_{4}^{3}-2C_{4}^{3}-4C_{3}^{3}=516$．

【巩固】如图，有 5×3 个点，取不同的三个点可以组合一个三角形，问总共可以组成________个三角形.



【解析】选出任意 3 点有 $C_{15}^{3}=455$ 种宣选法，其中三个点在一条直线上的有 $3C_5^3+5+6+2=43$ 种，其中 $3C_5^3$ 表示三条横直线上的 5 个点任取 3 个点，5 表示 5 条竖直线段上的 3 个点，6 表示田字格对角线，2 表示大长方形的 2 条对角线，所以，可以组成的三角形有 455-43=412 个.

【例 4】（1）所有三位数中,与 456 相加至少产生一次进位的数有多少个?

（2）所有三位数中,与 456 相加产生的进位次数少于三次的数有多少个?

（3）所有三位数中,与 456 相加至少产生一次进位且不出现数字 6 的数有多少个?

【解析】（1）与 456 相加产生进位在个位、十位、百位都有可能,所以采用从所有三位数中减去与 456 相加不产生进位的数的方法更来得方便,所有的三位数一共有 999-99=900 个,其中与 456 相加不产生进位的数,它的百位可能取 1、2、3、4、5 共 5 种可能,十位数可取 0、1、2、3、4 共 5 种可能,个位数可以取 0、1、2、3 共 4 种可能,根据乘法原理,一共有 $5\times5\times4=100$ 个数,所以与 456 相加产生进位的数一共有 900-100=800 个数.

（2）所有三位数排除与 456 相加在个位、十位、百位都产生进位的数,所有的三位数一共有 999-99=900 个,其中与 456 相加进位三次,个位可取 4、5、6、7、8、9 共 6 种可能,十位可取 4、5、6、7、8、9 共 6 种可能,百位可取 5、6、7、8、9 共 5 种可能,根据乘法原理,一共有 $6\times6\times5=180$ 个数,少于三次进位的数 900-180=720 个.

（3）所有三位数中与 456 相加产生进位的数一共有 800 个,三位数含有字 6 与 456 相加一定进位,三位数中含有数字 6 的数有 $900-8\times9\times9=252$ 个,与 456 相加至少产生一次进位且不出现数字 6 的数有 800-252=548 个.

【巩固】在三位数中，至少出现一个 6 的偶数有多少个?

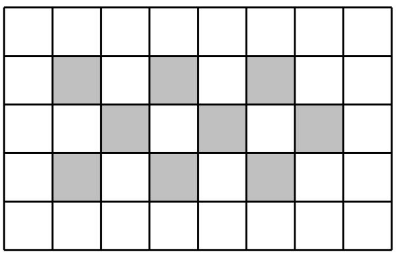
【解析】三位偶数共有 $9\times10\times5=450$ 个，不含 6 的偶数共有 $8\times9\times4=288$ 个，则不含 6 的三位偶数有 450-288=162 个.

模块三 最值中的反面考虑

【例 5】现在我们有若干个边长为 1 的小正方形框架，要摆成一个 18×15 的网格，至少需要多少个小正方形框架?

【答案】166.

【解析】



如图（下图画的是一个8×5的网格的例子），除第一行、最后一行、最左一列和最右一列外，中间部分可以隔一个放一个框架（灰色格子可以不放框架）.在18×15的网络中，中间部分每行有$(18-8)\div2=8$个格子可以不放框架，共有$8\times(15-2)=104$个格子可以不放框架，需要放的框架至少有$18\times15-104=166$(个)

【例 6】一次考试有 4 道题，100 人参加了考试，考试结果，第一题有 91 人答对，第二题有 83 人答对，第三题有 89 人答对，第四题有 95 人答对，请问四道题全答对的至少有多少人？

【解析】从反面考虑问题，题目要我们求全答对的人数至少是多少，我们考虑每个题目分别有几人答错，第一题有 9 人答错，第二题 17 人答错，第三题 11 人答错，第四题 5 人答错．所以所有人错的题目之和为 9+17+11+5=42 题，要使得全答对的人最少，那么应该尽量让每人错 1 题，42 个错题最多可以使 42 个人无法全对，因此四道题全答对的至少有$100-42$=58 人.

巅峰挑战

1. 有一个 1000 位的数，它由 888 个 1 和 112 个 0 组成，这个数是否可能是一个平方数?

【解析】假设这个数为 A，它是自然数 a 的平方.

因为 A 的各位数字之和 888 是 3 的倍数，所以 a 也应是 3 的倍数．于是 a 的平方是 9 的倍数，但 888 不是 9 的倍数，这样就产生了矛盾，从而 A 不可能是平方数.

2. 能被 3 整除且至少有一个数字 6 的四位数有________个.

【解析】考虑反面，即“能被 3 整除但所有位都不是 6 的四位数有多少个”．因为所有位都不是 6，所以千位、百位、十位依次有 8 种、9 种、9 种选择.

下面对千位、百位、十的数字和和除以 3 的余数分情况讨论：

如果除以 3 余 0，那么个位除以 3 余 0，可以是 0、3、9．如果除以 3 余 1，那么个位除以 3 余 2，可以是 2、5、8．如果除以 3 余 2，那么个位除以 3 余 1，可以是 1、4、7．可见，只要前三位确定，个位总有 3 种选择.

所以能被 3 整除但所有位都不是 6 的四位数有$8\times9\times9\times3$=1944 个.而能被 3 整除的四位数有 9000$\div$3=3000 个．所以满足题意的四位数有 3000-1944=1056 个.

登峰造极

1.有 13 个不同的自然数,它们的和是 100．问其中偶数最多有多少个?最少有多少个?

【解析】13 个不同的自然数,他们的和是 100,其中奇数的个数一定是偶数,偶数的个数一定是奇数．如果有 11 个或 11 个以上偶数,他们的和至少是

(0+2+4+．．．+20)+(1+3)=114>100,

不符合要求.

另一方面,(0+2+4+．．．+16)+(1+3+5+19)=100,

所以,偶数最多有 9 个.

偶数最少的反面是奇数最多.

如果有 10 个或 10 个以上奇数,他们的和至少是(1+3+5+．．．+19)+(0+2+4)=106>100,不符合要求．另一方面,(1+3+5+．．．+15)+(2+4+6+8+16)=1

笔记整理

第三讲 公式类行程综合（1）教师版

知识点拨

流水行船，扶梯问题，发车问题

例题精讲

模块一 流水行船

【例 1】船往返于相距 180 千米的两港之间，顺水而下需用 10 小时，逆水而上需用 15 小时．由于暴雨后水速增加，该船顺水而行只需 9 小时，那么逆水而行需要几小时?

【解析】本题中船在顺水、逆水、静水中的速度以及水流的速度都可以求出．但是由于暴雨的影响，水速发生变化，要求船逆水而行要几小时，必须要先求出水速增加后的逆水速度．

船在静水中的速度是：（180÷10+180÷15）÷2=15（千米/小时）．

暴雨前水流的速度是：（180÷10-180÷15）÷2=3（千米/小时）．

暴雨后水流的速度是：180÷9-15=5（千米/小时）．

暴雨后船逆水而上需用的时间为：180÷（15-5）=18（小时）．

【巩固】某船从甲地顺流而下，6 天到达乙地；该船从乙地返回甲地用了 9 天．问水从甲地流到乙地用了多少时间?

【解析】水流的时间＝甲乙两地间的距离÷水速，而此题并未告诉我们“甲乙两地间的距离”，且根据已知条件，顺水时间及逆水时间也无法求出，而它又是解决此题顺水速度、逆水速度和水速的关键．将甲、乙两地距离看成单位“1”，则顺水每天走全程的$\frac{1}{6}$，逆水每天走全程的$\frac{1}{9}$．水速$=(顺水速度-逆水速度)\div 2=(\frac{1}{6}-\frac{1}{9})\div 2=\frac{1}{36}$，所以水从甲地流到乙地需：$1\div\frac{1}{36}=36(天)$．

【例 2】一条小河过 A、B、C 三镇．A、B 两镇之间有汽船来往，汽船在静水中的速度为每小时 11 千米．B、C 两镇之间有木船摆渡，木船在静水中的速度为每小时 3.5 千米．已知 A、C 两镇水路相距 50 千米，水流速度为每小时 1.5 千米．某人从 A 镇上船顺流而下到 B 镇，吃午饭用去 1 小时，接着乘木船又顺流而下到 C 镇，共用 8 小时．那么 A，B 两镇间的距离是多少千米?

【解析】设 A 到 B 用时为 t，则 B 到 C 用时为（7-t）则有 $12.5t+5\times(7-t)=50$

解得 $t=2h$，所以 AB 距离为 $25km$

模块二 扶梯问题

【例 3】自动扶梯以均匀的速度由下往上行驶着，两位性急的孩子要从扶梯上楼，已知男孩每分走 20 级，女孩每分走 15 级，结果男孩用了 5 分到达楼上，女孩用了 6 分到达楼上．问该扶梯露在外面的部分共有多少级?

【解析】男孩每分钟比女孩每分钟多行扶梯级数的$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$，相差 $20-15=5$ 级，因此自动扶梯露在外面的部分共有 $5\div\frac{1}{30}=150$ 级．

【巩固】在地铁车站中，从站台到地面架设有向上的自动扶梯．小强想逆行从上到下，如果每秒向下迈两级台阶，那么他走过100级台阶后到达站台；如果每秒向下迈三级台阶，那么走过75级台阶到达站台．自动扶梯有多少级台阶？

【解析】设50秒扶梯向上走x级，则25秒走$\frac{x}{2}$级．由扶梯长度可得$100-x=75-\frac{x}{2}$．

解得$x=50$．扶梯长$100-50=50$(级)．

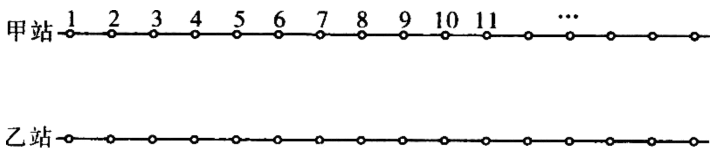
模块三 发车问题

【例4】一条电车线路的起点站和终点站分别是甲站和乙站，每隔6分钟有一辆电车从甲站发出开往乙站，全程要走18分钟．有一个人从乙站出发沿电车线路骑车前往甲站．他出发的时候，恰好有一辆电车到达乙站．在路上他又遇到了10辆迎面开来的电车．到达甲站时，恰好又有一辆电车从甲站开出．问他从乙站到甲站用了多少分钟？

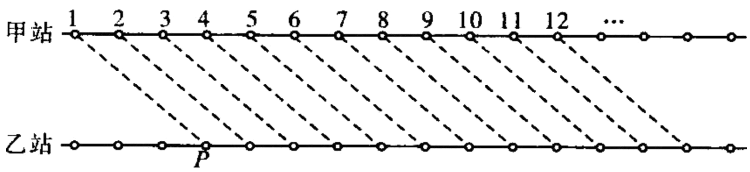
【解析】方法一：骑车人一共看到12辆车，他出发时看到的是18分钟前发的车，此时第4辆车正从甲发出．骑车中，甲站发出第4到第12辆车，共9辆，有8个6分钟的间隔，时间是$6\times8=48$（分钟）．

方法二：引导学生用柳卡图的方式来解析：

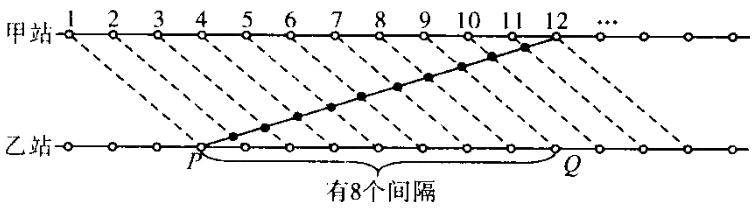
第一步：在平面上画两条平行线分别表示甲站与乙站．由于每隔6分钟有一辆电车从甲站出发，所以把表示甲站与乙站的直线等距离划分，每一小段表示6分钟．



第二步：因为电车走完全程要18分钟，所以连接图中的1号点与P点（注意：这两点在水平方向上正好有3个间隔，这表示从甲站到乙站的电车走完全程要18分钟），然后再分别过等分点作一簇与它平行的平行线表示从甲站开往乙站的电车．



第三步：从图中可以看出，要想使乙站出发的骑车人在途中遇到十辆迎面开来的电车，那么从P点引出的粗线必须和10条平行线相交，这正好是图中从2号点至12号点引出的平行线．



从图中可以看出，骑车人正好经历了从P点到Q点这段时间，因此自行车从乙站到甲站用了$6\times8=48$（分钟）．

【例 5】从电车总站每隔一定时间开出一辆电车．甲与乙两人在一条街上沿着同一方向行走．甲每隔10 分钟遇上一辆迎面开来的电车；乙每隔15 分钟遇上迎面开来的一辆电车．且甲的速度是乙的速度的3 倍，那么电车总站每隔多少分钟开出一辆电车？

【解析】设乙速度为 V，则甲速度为 $3V$,车速为 V 车．设车间距离为 L．依题意得

$L=(V$ 车$+V)\times15L=(V$ 车$+3V)\times10$ 得 V 车$=3V$

$$t=\frac{L}{V_{车}}=\frac{(V_{车}+V)\times15}{V_{车}}=\frac{(3V+V)\times15}{3V}=20\ （分）$$

【例 6】在一条马路上，小明骑车与小光同向而行，小明骑车速度是小光速度的 3 倍，每隔 10 分有一辆公共汽车超过小光，每隔 20 分有一辆公共汽车超过小明．已知公共汽车从始发站每次间隔同样的时间发一辆车，问：相邻两车间隔几分？

【解析】解：设车速为 a，小光的速度为 b，则小明骑车的速度为 $3b$．根据追及问题“追及时间×速度差＝追及距离”，可列方程

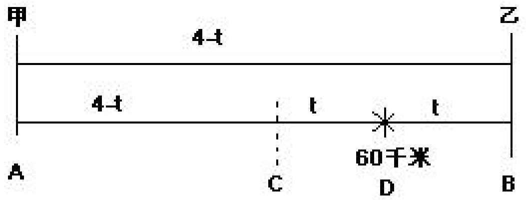
10（a－b）＝20（a－$3b$），

解得 a＝$5b$，即车速是小光速度的 5 倍．小光走 10 分相当于车行 2 分，由每隔 10 分有一辆车超过小光知，每隔 8 分发一辆车．

巅峰挑战

1. 一只轮船从甲港顺水而下到乙港，马上又从乙港逆水航行回甲港，共用了 8 小时． 已知顺水每小时比逆水多行 20 千米，又知前 4 小时比后 4 小时多行 60 千米．那么， 甲、乙两港相距多少千米？

【解析】



顺水速度比逆水速度大，所以从甲到乙时间肯定小于 4 小时．设顺水到乙后又行了 t 小时到 D 点，恰为 4 小时，则如图，再过 t 小时到 C 点，两段均为逆水，路程一样，

所以前 4 小时行 $AB+BD$,后 4 小时走 $DC+CA$，所以路程差为 $AB-AC=BC$．可见 BC 为 60 千米，且为顺水、逆水行驶的路程差．

20×（4-t）=60km．所以 t=1（小时）

逆水航行 2 小时走了 60 千米，则走 5 小时即全程为 150 千米

2. 李白沿江乘船顺流而下前往 A 港口，途中不慎将一袋宝石（宝石会沉入水中）和一个空酒葫芦（葫芦会随水漂流）掉入江中，到达 A 港时，他将草帽丢入江中（草帽也会随水漂流），并下船去了集市，返回船上时正好中午 12 点．他立刻乘船沿江向下航行，并于 13 点追上之前掉入江中的酒葫芦．14 点时又追上自己的草帽，于是立刻返航，回到 A 港时是 17 点．那么，（1）船的静水速度和水速的比是多少?（2）之前他在 A 港停泊了多少小时?（3）他再向上游航行多少小时就到达宝石丢失点?

【答案】（1）5：1

登峰造极

1. 某商场一楼和二楼之间安装了一自动扶梯,以均匀的速度向上行驶,一男孩和一女孩同时从自动扶梯走到二楼(扶梯行驶,两人也走梯),如果两人上梯的速度都是匀速,每次只跨 1 级,且男孩每分钟走动的级数是女孩的 2 倍,已知男孩走了 27 级到达扶梯顶部,而女孩走了 18 级到达扶梯顶部.现扶梯近旁有一个从二楼下到一楼的楼梯道,台阶的级数与自动扶梯级数相等,两个孩子各自到扶梯的顶部后按原速度再下扶梯,到楼梯底部再乘自动扶梯上楼(不考虑扶梯与楼梯之间的距离).求男孩第一次追上女孩时走了多少级台阶?

【答案】198

笔记整理

第四讲 公式类行程综合（2）

知识点拨

时钟问题、火车过桥

例题精讲

模块一 时钟问题

【例 1】 有一座时钟现在显示 10 时整．那么，经过多少分钟，分针与时针第一次垂直；经过多少分钟，分针与时针第一次重合；经过多少分钟，分针与时针第一次成一条直线?

【解析】 $5\frac{5}{11}$、$21\frac{9}{11}$、$54\frac{6}{11}$．

【巩固】从三点钟开始，分针与时针第二次形成 30 度角的时间是几点几分?

【解析】过 $120\div(6-0.5)=\frac{240}{11}=21\frac{9}{11}$ 分钟第二次形成 30 度角，所以是 3 点 $21\frac{9}{11}$ 分

【例 2】小春有一块手表，这块表每小时比标准时间慢 2 分钟．某天晚上 9 点整，小春将手表对准，到第二天上午手表上显示的时间是 7 点 38 分的时候，标准时间是______．

【解析】从晚上 9 点到第二天 7:38，分针一共划过 60×10+38=638，而这块表每小时比标准时间慢 2 分钟，即每转 58 格，标准钟转 60 格，所以标准钟分针转了 638÷58×60=660，所以此时是 8 点．

【巩固】帅气叶有一个闹钟，每时比标准时间快 2 分。星期天上午 9 点整，帅气叶对准了闹钟，然后定上铃，想让闹钟在 11 点半闹铃，提醒他帮助妈妈做饭。帅气叶应当将闹钟的铃定在几点几分上？

【解析】11 点 35 分

【例 3】小明家有两个旧挂钟，一个每天快 20 分，另一个每天慢 30 分．现在将这两个旧挂钟同时调到标准时间，它们至少要经过多少天才能再次同时显示标准时间?

【解析】快的挂钟与标准时间的速度差是 20 分/天,慢的挂钟与标准时间的速度差是 30 分/天,慢的每标准一次需要 12×60÷30=24(天),快的每标准一次需要 12×60÷20=36(天),24 与 36 的最小公倍数是 72,所以它们至少要经过 72 天才能再次同时显示标准时间.

模块二 火车过桥

【例 4】一列火车通过 530 米的桥需 40 秒钟，以同样的速度穿过 380 米的山洞需 30 秒钟。求这列火车的速度是每秒多少米?车长多少米?

【解析】（1）火车速度：（530-380）÷（40-30）=150÷10=15（米/秒）

（2）火车长度： 15×40-530=70（米）

答：这列火车的速度是每秒 15 米，车长 70 米。

【例 5】两列在各自轨道上相向而行的火车恰好在某道口相遇，如果甲列车长 225 米，每秒钟行驶 25 米，乙列车每秒行驶 20 米，甲、乙两列车错车时间是 9 秒，求：

⑴乙列车长多少米?

⑵甲列车通过这个道口用多少秒?

⑶坐在甲列车上的小明看到乙列车通过用了多少秒?

【解析】⑴这是一个典型的相遇问题，根据前面的解析，已知两车的速度和相遇的时间，可以求出两车的长度和，为：$(25+20)\times9=405$（米），那么乙列车的长度为：

$405-225=180$(米).

⑵把道口看作是没有速度没有长度的火车，那么甲车通过道口的路程也就是甲列车的长，所以甲列车通过道口的时间为：$225\div 25=9$(秒).

⑶小明坐在甲车上，实际上是以甲车的速度和乙车相遇，路程和是乙车的车长，所以小明看到乙列车通过用了：$180\div(25+20)=4$(秒).

【答案】4秒

【例6】铁路旁边有一条小路，一列长为110米的火车以30千米/时的速度向南驶去，8点时追上向南行走的一名军人，15秒后离他而去，8点6分迎面遇到一个向北行走的农民，12秒后离开这个农民．问军人与农民何时相遇?

【解析】8点30分．火车每分行$30\times 1000\div 60=500$（米），

军人每分行$\left(500\times\frac{1}{4}-110\right)\div\frac{1}{4}=60$（米），

农民每分行$\left(110-500\times\frac{1}{5}\right)\div\frac{1}{5}=50$（米）．

8点时军人与农民相距（500＋50）×6＝3300（米），两人相遇还需

3300÷（60＋50）=30（分），

即8点30分两人相遇．

【答案】8点30分

巅峰挑战

1. 甲、乙两辆汽车在与铁路并行的道路上相向而行，一列长180米的火车以60千米/时的速度与甲车同向前进，火车从追上甲车到遇到乙车，相隔5分钟，若火车从追上到超过甲车用时30秒．从与乙车相遇到离开用时6秒，求乙车遇到火车后再过多少分钟与甲车相遇?

【解析】 由火车与甲、乙两车的错车时间可知，甲车速度为$60-180\div 30\times 3.6=38.4$千米/时．乙车速度为$180\div 6\times 3.6-60=48$千米/时，火车追上甲车时，甲、乙两车相距$(60+48)\times\frac{5}{60}=9$千米．经过$9\div(38.4+48)\times 60=6.25$分钟相遇，那么乙车遇到火车后1.25分钟与甲车相遇

【答案】1.25分钟

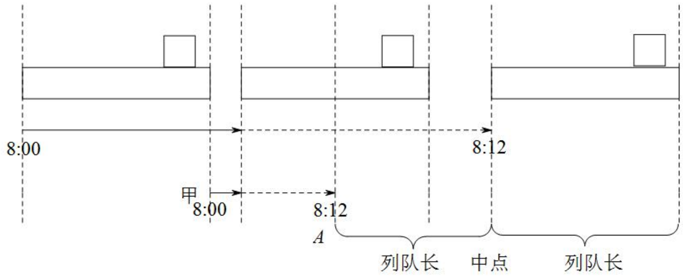
2. 家里有4块表，一块每小时慢2分钟，一块每小时快3分钟，一块是准的，一块是坏的．小明将三块表（坏的除外）同时对准．在晚上某时刻四块表分别显示8:08，8:20,8:24.8:48.此时的准确时间是多少?

【答案】8:24

登峰造极

1.甲、乙两人在一条马路旁相向而行，甲由南向北，乙由北向南，在 8：00 时，有一列南向北的队列刚好追上甲，过了一会儿，这个队列刚好超过甲，与此同时，乙刚好遇到这个队列，在 8：12 时，甲、乙正好相遇于 A 点，此时队列的队尾正好处于 A 点与队列的队头的中点，在 8：21 时，队列的队尾已经距离乙 600 米，那么这个队列长多少米?

【答案】150.



【解析】如图所示，先看甲和队列，从追上到刚超过，队列和甲的路程差是一个队列长，从刚超过甲到甲、乙相遇，路程差也是一个队列长，所以两段时间相等，乙和队列相遇时是 8：06.再看甲和乙，从 8：06 到 8：12 两人恰好合走了一个队列长，也就是 6 分钟，甲、乙路程和是一个全长.

接下来从 8：12 到 8：21，经过 9 分钟，9 分钟是 6 分钟的 1.5 倍，所以甲、乙合走了 1.5 个队列长.从 8：06 到 8：12，甲与队列的路程差为 1 个队列长；则从 8：12 到 8:21，甲与队列的路程差为 1.5 个队列长.所以 600 = “1.5” + “1” + “1.5” = 4 个队列长，队列长 = 600 ÷ 4 = 150 米.

笔记整理

第五讲　公式类行程综合（3）

知识点拨

走停问题、接送问题

例题精讲

模块一 走停问题

【例 1】甲、乙两车分别同时从 A，B 两城相向行驶，6 时后可在途中某处相遇．甲车因途中发生故障抛描，修理 2.5 时后才继续行驶，因此从出发到相遇经过 7.5 时．甲车继续前进，那么甲车从 A 城到 B 城共用多长时间?

【解析】12.5 时．由题意推知，两车相遇时，甲车实际行驶 5 时，乙车实际行驶 7.5 时．与计划的 6 时相遇比较，甲车少行 1 时，乙车多行 1.5 时．也就是说甲车行 1 时的路程，乙车需行 1.5 时．进一步推知，乙车行 7.5 时的路程，甲车需行 5 时．所以，甲车从 A 城到 B 城共用 7.5＋5＝12.5（时）．

【答案】12.5 时

【例 2】一辆汽车从甲地开往乙地，每分钟行 750 米，预计 50 分钟到达．但汽车行驶到路程的 3/5 时，出了故障，用 5 分钟修理完毕，如果仍需在预定时间内到达乙地，汽车行驶余下的路程时，每分钟必须比原来快多少米?

【解析】当以原速行驶到全程的 3/5 时，总时间也用了 3/5，所以还剩下 50×(1－3/5)=20 分钟的路程；修理完毕时还剩下 20－5=15 分钟，在剩下的这段路程上，预计时间与实际时间之比为 20:15=4:3,根据路程一定，速度比等于时间的反比，实际的速度与预定的速度之比也为 4:3，因此每分钟应比原来快 750×4/3－750=250 米．

【答案】250 米

【例 3】某人上山时每走 30 分休息 10 分，下山每走 30 分休息 5 分．已知下山的速度是上山速度的 1.5 倍，如果上山用了 3 时 50 分，那么下山用多少时间?

【解析】2 时 15 分

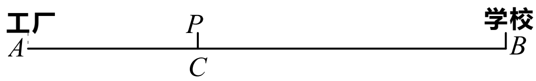
【例 4】甲、乙两人分别从相距 35.8 千米的两地出发，相向而行．甲每小时行 4 千米，但每行 30 分钟就休息 5 分钟；乙每小时行 12 千米，则经过________小时________分的时候两人相遇．

【解析】经过 2 小时 15 分钟的时候，甲实际行了 2 小时，行了 4×2=8 千米，乙则行了 $12\times 2\frac{1}{4}=27$ 千米，两人还相距 35.8－27－8=0.8 千米，此时甲开始休息，乙再行 0.8÷12×60=4 分钟就能与甲相遇．所以经过 2 小时 19 分的时候两人相遇．

模块二 接送问题

【例 5】某校和顺为工厂之间有一条公路，该校下午 2 时派车去该厂接聂劳模来做报告，往返需用 1 小时.这位劳模在下午 1 时便离厂步行向学校走来，途中遇到接他的汽车，便立刻上车驶向学校，在下午 2 时 40 分到达．问：汽车速度是劳模步行速度的几倍?

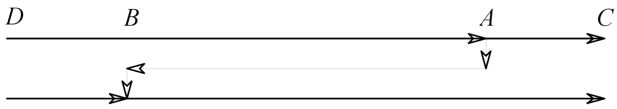
【解析】车下午 2 时从学校出发，如图，



在 C 点与劳模相遇，再返回 B 点，共用时 40 分钟，由此可知，在从 B 到 C 用了 $40\div2=20$ 分钟，也就是 2 时 20 分在 C 点与劳模相遇．此时劳模走了 1 小时 20 分，也就是 80 分钟．

另一方面，汽车走两个 AB 需要 1 小时，也就是从 B 点走到 A 点需要 30 分钟，而前面说走完 BC 需要 20 分钟，所以走完 AC 要 10 分钟，也就是说 $BC=2AC$．走完 AC，劳模用了 80 分钟；走完 BC，汽车用了 20 分钟．劳模用时是汽车的 4 倍，而汽车行驶距离是劳模的 2 倍，所以汽车的速度是劳模速度的 $4\times2=8$ 倍．

【例 6】 超班与尖子班学生同时从学校出发去公园，两班的步行速度相等都是 4 千米/小时，学校有一辆汽车，它的速度是每小时 48 千米，这辆汽车恰好能坐一个班的学生．为了使两班学生在最短时间内到达公园，设两地相距150千米，那么各个班的步行距离是多少?



【解析】由于汽车速度是甲乙两班步行速度的12倍，设乙班步行1份，汽车载甲班到 A 点开始返回到 B 点相遇，这样得出 $BD:BA=1:[(12-1)\div2]=1:5.5$，汽车从 A 点返回最终与乙班同时到达 C 点，汽车又行走了12份，所以总路程分成 $1+5.5+1=7.5$ 份，所以每份 $=150\div7.5=20$ 千米，所以各个班的步行距离为 20 千米．

【答案】 20 千米

【巩固】A、B 两个连队同时分别从两个营地出发前往一个目的地进行演习，A 连有卡车可以装载正好一个连的人员，为了让两个连队的士兵同时尽快到达目的地，A 连士兵坐车出发一定时间后下车让卡车回去接 B 连的士兵，两营的士兵恰好同时到达目的地，已知营地与目的地之间的距离为 32 千米，士兵行军速度为 8 千米/小时，卡车行驶速度为 40 千米每小时，求两营士兵到达目的地一共要多少时间？

【解析】1.6 小时

巅峰挑战

1. 甲、乙两人同时从 A 地到 B 地去．甲骑车每分行 250 米，每行驶 10 分后休息 20 分；乙不间歇地步行，每分行 100 米．结果在甲即将休息的时刻两人同时到达 B 地．问：A，B 两地相距多远?

【解析】10000 米．出发后 10 分，甲、乙相距（250－100）×10＝1500（米）．以后甲平均每分行 $\frac{250}{3}$ 米，乙要追上甲1500 醚，需要 $1500\div\left(100-\frac{250}{3}\right)=90$（分）．乙从出发共行了 100 分，所以 A，B 两地相距 100×100＝10000（米）．

【答案】10000 米

2. 甲班与乙班学生同时从学校出发去公园，甲班步行的速度是每小时 4 千米，乙班步行的速度是每小时 3 千米．学校有一辆汽车，它的速度是每小时 48 千米，这辆汽车恰好能坐一个班的学生．为了使两班学生在最短时间内到达公园，那么甲班学生与乙班学生需要步行的距离之比是多少?

【解析】方法一：不妨设乙班学生先步行，汽车将甲班学生送至 A 地后返回，在 B 处接到乙班学生，最后汽车与乙班学生同时到达公园，如图：

$V_{甲}$：$V_{车}$=1：12，$V_{乙}$：$V_{车}$=1：16．乙班从 C 至 B 时，汽车从 C~A~B，则两者路程之比为 1：16，不妨设 CB=1，则 C~A~B=16，CA=（1＋16）÷2=8.5，则有 CB：BA=1：7.5；类似设 AD=1，解析可得 AD：BA=1：5.5，综合得 CB：BA：AD=22：165：30，说明甲乙两班步行的距离之比是 15：11．

方法二：如图，假设实线代表汽车行驶的路线，虚线代表甲班和乙班行走的路线，假设乙班行驶1份到达C点，则汽车行驶16份到达E点，汽车与乙班共行驶15份在D点相遇，其中乙班步行了$15\times\frac{1}{1+16}=\frac{15}{17}$份，同时甲班步行了$\frac{15}{17}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{17}$份，此时汽车与甲班相差$16-1-\frac{15}{17}+\frac{20}{17}=15\frac{5}{17}$份，这样甲班还需步行

$15\frac{5}{17}\div(48-4)\times4=(15+\frac{5}{17})\times\frac{1}{11}$份，所以甲班与乙班步行的路程比为

$$\frac{\frac{20}{17}+(15+\frac{5}{17})\times\frac{1}{11}}{1+\frac{15}{17}}=\frac{20\times11+15\times17+5}{11\times17+15\times11}=\frac{15}{11}$$

方法三：由于汽车速度是甲班速度的12倍，是乙班速度的16倍，设乙班步行1份，则汽车载甲班学生到E点返回与乙班相遇，共行16份，所以

$AD:DE=1:[(16-1)\div2]=1:7.5=2:15$，类似的设甲班步行$1$份，则汽车从$E$点返回到$D$点又与甲班同时到达$B$点，所以,$DE:EB=[(12-1)\div2]:1=5.5:1=11:2$，所以$AD:DE:EB=22:(15\times11):30$,所以甲班与乙班步行的路程比为$30:22=15:11$

登峰造极

1.顺为学校学生计划乘坐旅行社的大巴前往郊外游玩，按照计划，旅行社的大巴准时从车站出发后能在约定时间到达学校，搭载满学生在预定时间到达目的地，已知学校的位置在车站和目的地之间，大巴车空载的时候的速度为60千米/小时，满载的时候速度为40千米/小时，由于某种原因大巴车晚出发了56分钟，学生在约定时间没有等到大巴车的情况下，步行前往目的地，在途中搭载上赶上来的大巴车，最后比预定时间晚了54分钟到达目的地，求学生们的步行速度．

【解析】大巴车空载的路程每多60千米，满载的路程就会少60千米，全程所花的时间就会少$\frac{60}{40}-\frac{60}{60}=0.5$小时$=30$分钟，现在大巴车比原计划全程所花时间少了$56-54=2$分钟，所以，所以大巴车空载的路程比原计划多了$60\times\frac{2}{30}=4$千米，也就是说，大巴车抵达学校后又行驶了4千米才接到学生，此时学生们已经出发了$56+\frac{4}{60}\times60=60$分钟即$1$小时，所以学生们的步行速度为$4$千米/小时．

【答案】4千米/小时

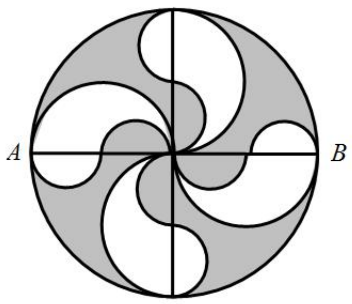
2.甲乙两人同时从 A 地出发，以相同的速度向 B 地前进．甲每行 5 分钟休息 2 分钟；乙每行 210 米休息 3 分钟．甲出发后 50 分钟到达 B 地，乙到达 B 地比甲迟了 10 分钟．已知两人最后一次的休息地点相距 70 米，两人的速度是每分钟行多少米?

【解析】50

笔记整理

第六讲 曲线几何综合训练（1）

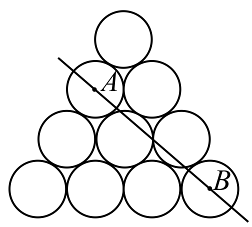
1. 如图，已知 $AB = 40\ cm$，图中的曲线是由半径不同的三种半圆弧平滑连接而成，那么阴影部分的面积是________cm^2.（π取 3.14）



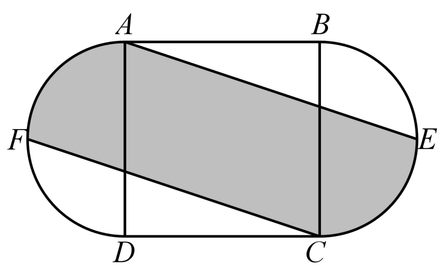
【解析】转化，拼接成 1 个大圆减去 2 个小圆. $40 \div 2 = 20(cm), 20 \div 2 = 10(cm)$.
$\pi \times 20^2 - \pi \times 10^2 \times 2 = 200\pi = 628(cm^2)$.

2. 10 个一样大的圆摆成如图所示的形状.过图中所示两个圆心 A，B 作直线，那么直线右上方圆内图形面积总和与直线左下侧圆内图形面积总和的比是多少?

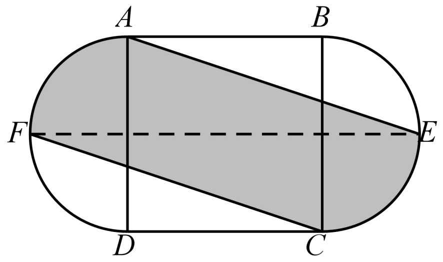
【解析】2：3



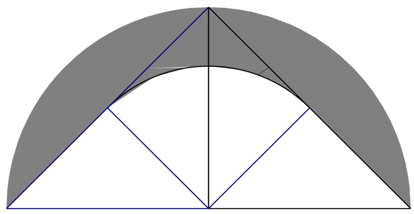
3. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4 厘米，AD 和 BC 分别为两个圆的直径，E 和 F 分别为两个半圆弧的中点，那么图中阴影部分的面积是________平方厘米(π取 3.14)



【答案】18.28.
【分析】如图，连接 EF，则 EF 将阴影部分分成相同的两部分,上半部分可以分割成一个直角扇形和一个直角三角形’其中直角扇形的面积为 $\frac{1}{4}$创p　$2^2 = p = 3.14$ (平方厘米)，直角三角形的面积为 2锤6　2 = 6 (平方厘米). 因此，阴影部分的面积为
(6 + 3.14)´ 2 = 18.28 (平方厘米).

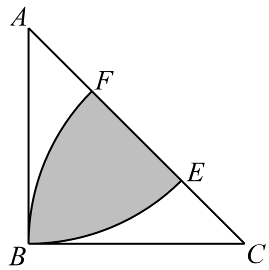


4. 把一个等腰直角三角形绕直角顶点逆时针旋转 90 度.如果它的直角边长为 10，求它的斜边扫过的面积.（π 取 3.14）



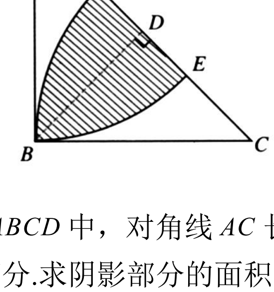
【解析】根据题意，$S_{阴}=\frac{1}{2}\pi\times10^2-\frac{1}{2}\times10^2-\frac{1}{4}\pi\times50=67.75$

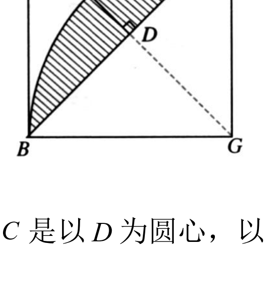
5. 三角形 ABC 是等腰直角三角形，直角边长为 2 厘米.分别以 A 和 C 为圆心，以 2 厘米为半径，画出弧 BE 和弧 BF，求阴影部分面积.



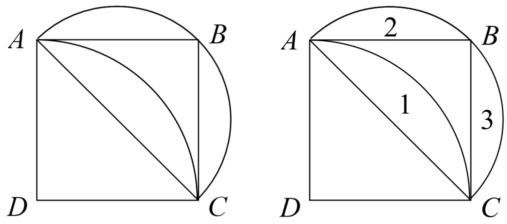
【解析】在左下图中，作 BD 垂直 AC 于 D 点，将 ΔBDC 以 D 点为轴，逆时针旋转 180°,点 C 与点 A 重合，得到右下图.两图中阴影部分面积相等.而右下图中阴影面积等于扇形 GBH 与直角三角形 GBH 的面积之差.

$$\frac{1}{4}\pi\times2^2-\frac{1}{2}\times2\times2=\pi-2$$





6. 在下图所示的正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 长 2 厘米.扇形 ADC 是以 D 为圆心，以 AD 为半径的圆的一部分.求阴影部分的面积.（π 取 3.14）



【答案】1.14

【解析】如右图所示，$S_1=\frac{\pi}{4}\times AD^2-\frac{1}{2}AD^2$，

$S_2+S_3=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{AC}{2}\right)^2-\frac{1}{2}AD^2=\frac{1}{8}\pi\times AC^2-\frac{1}{2}AD^2$.

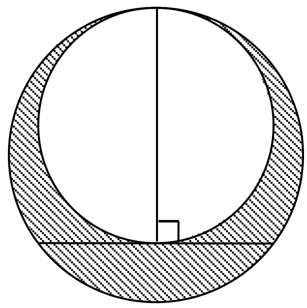
因为 $AC^2=2AD^2=4$，

所以阴影部分的面积为：

$\frac{\pi}{4}\times AD^2-\frac{1}{2}AD^2+\frac{1}{8}\pi\times AC^2-\frac{1}{2}AD^2=\frac{1}{4}\pi\times AC^2-\frac{1}{2}AC^2=\pi-2=1.14$ (平方厘米).

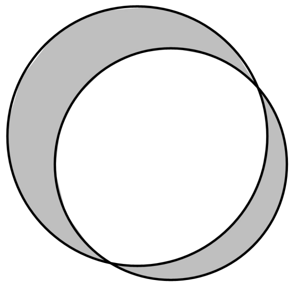
另解：观察可知阴影部分面积等于半圆面积与扇形 ADC 面积之和减去正方形 $ABCD$ 的面积，所以阴影部分的面积为 $\frac{\pi}{4}\times AD^2+\frac{1}{8}\pi\times AC^2-AD^2=1.14$ (平方厘米).

7. 如图，一个直径为 2 的小圆与一个大圆相切，图中的那条切线段长度也是 2，求阴影部分的面积.



【解析】$\frac{9\pi}{16}$.

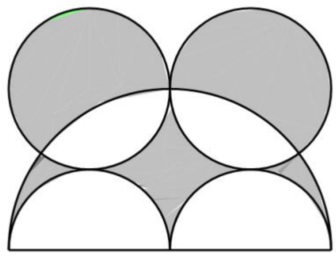
8. 题图是果果观测到的日偏食照片，已知两圆的半径分别是 50 厘米和 40 厘米，那么图中两个阴影部分的面积差为________平方厘米．(π取 3.14)



【答案】2826

【解析】将两个月牙阴影同时加上两圆重合的部分，根据“差不变原理“知，两个月牙的面积差就是两个圆的面积差.$\pi\times50^2-\pi\times40^2=900\pi=2826$.

9. 三个半圆、两个圆如图摆放，两个小半圆和两个小圆的半径都是 10 厘米，大半圆外的阴影面积比大半圆内的阴影面积大________cm^2 （π取 3.14）



【解析】：利用差不变原理.

大半圆外阴影面积−大半圆内阴影面积

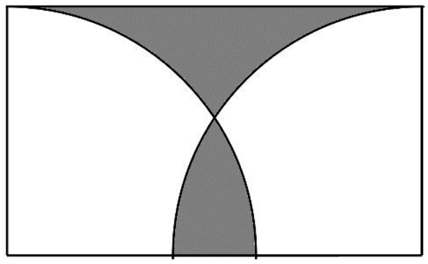
=（大半圆外阴影面积+A+B)−(大半圆内阴影面积+A +B)

=两个小圆−(大半圆−两个小半圆）

=两个小圆−(两个小圆−一个小圆）

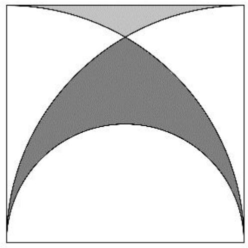
=一个小圆=$\pi\times10^2$=314

10. 如图，分别以长方形的一条长边的两个顶点为圆心，以长方形的宽为半径作$\frac{1}{4}$圆，若图中的两个阴影部分的面积相等，则此长方形的长与宽的比值是______________.



【解析】$\frac{\pi}{2}$.

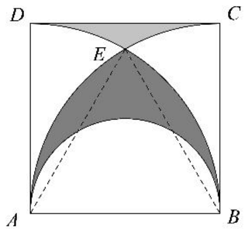
11. 在边长为300厘米的正方形中，如图放置了两个直角扇形和一个半圆，那么两块阴影部分的周长差是_____________厘米.（π取3.14.）



【解析】因为ΔABE为等边三角形，所以$\angle EAB=\angle EBA=60°$,从而$\angle DAE=\angle CBE=30^{\circ}$ 阴影CDE的周长=弧CE+弧DE+CD=$2\pi\times300\div12\times2+300=100\pi+300$；

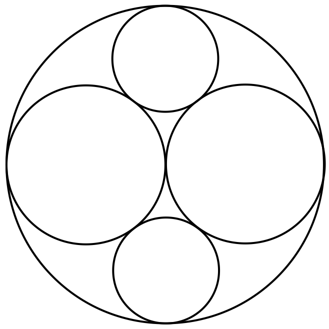
阴影ABE的周长=弧AE+弧BE+弧AB=$2\pi\times300\div6\times2+\pi\times300\div2=350\pi$；

所以，周长差=$350\pi-\left(100\pi+300\right)=250\pi-300=485$.

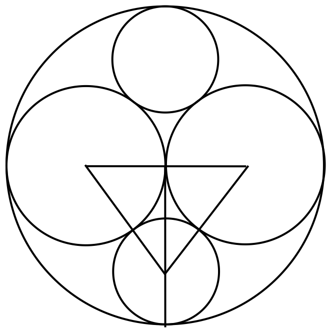


巅峰挑战

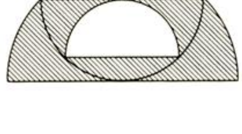
1. 在一张半径为 1 的圆形纸片上剪下两个半径为0.5 的圆，剩下的纸片分成两块相同的部分，那么每块上能够剪下的最大的圆半径是多少?



【解析】如图，设小圆半径为 x，则可以画出一个直角三角形，两条直角边的长分别为0.5 和 $1-x$，斜边长为 $x+0.5$ ，利用勾股定理列出方程，可解得 $x=\frac{1}{3}$.



2. 如图中阴影部分为一个空心零件的设计图，该零件由三个半圆套成，其中最大半圆的直径为 12 厘米.该零件的面积为多少平方厘米?（π 取 3.14）



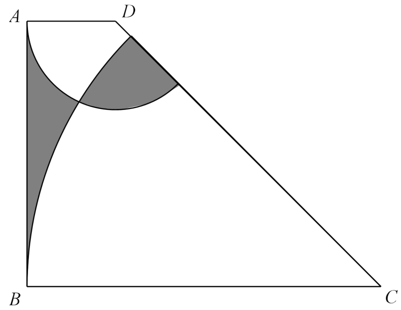
【解析】令大、中、小圆的半径分别为：R 、r_1、r_2，则可知：

$\begin{cases}2r^2=r_1^2\\=R^2=2r_1^2=4r^2=9\end{cases}$ $\begin{cases}2r^2=r_1^2\\2r_1^2=R^2\end{cases}$，所以有：$R^2=2r_1^2=4r^2$，则 $r^2=9$.

所以 $S_{阴}=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi\left(R^2-r^2\right)=\frac{27}{2}\pi=42.39(cm^2)$

登峰造极

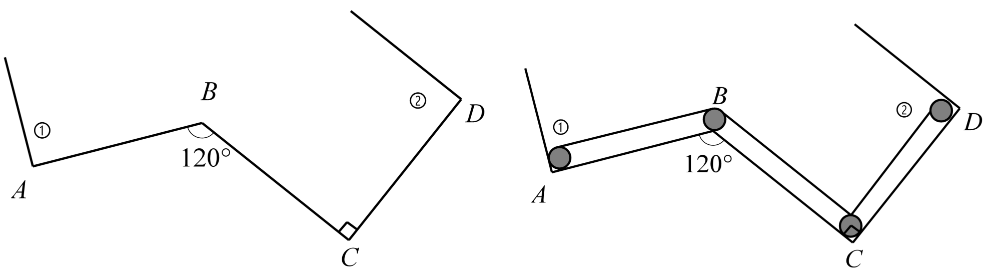
1.如图，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，上底 AD 长为 20 厘米，下底 BC 长为 80 厘米，高 AB 长 60 厘米，分别以 D 和 C 为圆心，上底和下底为半径作扇形，那么图中阴影两部分的面积差________平方厘米．(π取 3.14)



【答案】17

【解析】先观察直角梯形 $ABCD$，下底与上底的差值刚好等于高的长度，所以过 D 作 BC 边的垂线，可以得到一个以垂足为直角顶点、CD 为斜边的等腰直角三角形，即底角为 $45°$.两个阴影部分本身都是不规则图形，如果分别加上上面的空白区域，则面积之差不变.其中，右面阴影部分加上上面空白区域，所得图形即为以 D 为圆心的小扇形，面积为 $3.14\times20^2\times\dfrac{135}{360}=471$（平方厘米）；左边阴影部分加上上面空白区域，所得图形面积即为整个梯形与以 C 为顶点的大扇形面积之差，等于 $(20+80)\times60\times\dfrac{1}{2}-3.14\times80^2\times\dfrac{45}{360}=488$（平方厘米）.所以阴影两部分的面积之差为 $488-471=17$（平方厘米）.

2.如图所示，一块半径为 2 厘米的圆板，从位置①起始，依次沿线段 AB 、BC 、CD 滚到位置②.如果 AB 、BC 、CD 的长都是 20 厘米，那么圆板经过区域的面积是多少平方厘米?（π取 3.14，答案保留两位小数.）



【解析】圆板经过的区域如图所示，面积为

$$4\times20+4\times20+4\times16+\frac{1}{6}\times3.12\times4^2-(4^2-3.14\times2^2)\times\frac{5}{4}$$

$$=80+80+64+3.14\times\frac{8}{3}-4.3\approx228.07 \text{（平方厘米）}$$

笔记整理

第七讲 水中浸物

知识点拨

水中浸物分为：完全浸没与不完全浸没两大类.

抓住浸没问题的关键:水面上升(下降)的体积=物体浸没部分的体积

即: 容器底面积×水面上升(下降)的高度=物体底面积×高

例题精讲

【例 1】有一个长与宽都为 10cm 的长方体容器，容器的高度为 1m，容器里水深 15cm，将一个棱长为 5cm 的正方体铁块放进容器后，求液面的高度.

【解析】总体积为 $5\times5\times5+10\times10\times15=1625$ 立方厘米.液面高度为 $1625\div(10\times10)=16.25$ 厘米.

【巩固】有一个长与宽都为 10*cm* 的长方体容器，容器的高度为 1*m*，里面盛有高度为 15*cm* 的水，将一个 5*cm*×5*cm*×15*cm* 的长方体铁块放进容器后，求液面的高度.

【解析】总体积为 $5\times5\times15+10\times10\times15=1875$ 立方厘米.液面高度为 $1875\div(10\times10)=18.75$ 厘米.

【例 2】一只装有水的长方体玻璃杯，底面积是 80 平方厘米，高是 15 厘米，水深 8 厘米. 现将一个底面积是 16 平方厘米，高为 14 厘米的长方体铁块竖放在水中后，现在水深多少厘米?

【解析】假设完全浸没，总体积为 $8\times80+16\times14=864$ 立方厘米，水深为 $864\div80=10.8$ 厘米，因为 $10.8<14$，所以未完全浸没.水深为 $8\times80\div(80-16)=10$ 厘米.

【例 3】一只装有水的长方体玻璃杯，底面积是 50 平方厘米，高是 10 厘米，水深 8 厘米. 现将一个底面积是 16 平方厘米，高为 12 厘米的长方体铁块竖放在水中后，现在水深多少厘米?

【解析】假设完全浸没，总体积为 $50\times8+16\times12=592$ 立方厘米，水深为 $592\div50=10.84$ 厘米，因为 $11.84>10$，所以溢出.故水深为 10 厘米.

【巩固】一只装有水的长方体玻璃杯，底面积是 80 平方厘米，高是 15 厘米，水深 13 厘米. 现将一个底面积是 16 平方厘米，高为 12 厘米的长方体铁块竖放在水中后，现在水深多少厘米?

【解析】假设完全浸没，总体积为 $13\times80+16\times12=1232$ 立方厘米，水深为 $1232\div80=15.4$ 厘米，因为 $15<15.4$，所以完全浸没，但水溢出.故水深为 15 厘米.

【例 4】底面积为 100 平方厘米的圆柱形容器中装有水，水面上漂浮着一块棱长为 5 厘米的正方体木块，木块浮出水面的高度是 1 厘米.若将木块从容器中取出，水面将下降________厘米.

【解析】木块浸入水中的体积为 4×5×5=100 立方厘米，如果把木块拿出，那么四周的水要补充一部分来填充这部分体积，需要下降 100÷100=1 厘米.

【例 5】有甲、乙两只圆柱形玻璃杯，其内直径依次是 10 厘米、20 厘米，杯中盛有适量的水．甲杯中沉没着一铁块，当取出此铁块后，甲杯中的水位下降了 2 厘米；然后将

铁块沉没于乙杯，且乙杯中的水未外溢．问：这时乙杯中的水位上升了多少厘米?

【解析】两个圆柱直径的比是 1∶2，所以底面面积的比是 1∶4，铁块在两个杯中排开的水的体积相同，所以乙杯中水升高的高度应当是甲杯中下降的高度的 $\frac{1}{4}$，即

$2\times\frac{1}{4}=0.5$(厘米)

【答案】0.5

【例 6】有大、中、小三个正方形水池，它们的内边长分别是 6 米、3 米、2 米．把两堆碎石分别沉没在中、小水池的水里，两个水池的水面分别升高了 6 厘米和 4 厘米．如果将这两堆碎石都沉没在大水池的水里，大水池的水面升高了多少厘米?

【解析】把碎石沉没在

【解析】中，水面升高所增加的体积，就等于所沉入的碎石的体积．

因此，沉入水池中的碎石的体积是

$3\times3\times0.06=0.54$ (米 ^{3})，

而沉入小水池中的碎石的体积是 $2\times2\times0.04=0.16$ (米 ^{3})．

这两堆碎石的体积一共是 $0.54+0.16=0.7$ (米 ^{3})．

把它们都沉入大水池里，大水池的水面升高所增加的体积也就是 0.7 米 ^{3}．而大水池的底面积是 $6\times6=36$ (米 ^{3})．所以水面升高了

$0.7\div36=\frac{0.7}{36}(\text{米})=\frac{70}{36}(\text{厘米})=1\frac{17}{18}(\text{厘米})$．

故大水池的水面升高了 $1\frac{17}{18}$ 厘米．

巅峰挑战

1. 一个长方体容器，长 90 厘米，宽 40 厘米.容器里直立着一个高 1 米，底面边长是 15 厘米的长方体铁块，这时容器里的水深 0.5 米.现在把铁块轻轻地向上提起 24 厘米，那么露出水面的铁块上被水浸湿的部分长多少厘米?

【分析】因为露出水面的铁块上被水浸湿的部分长度包括提起来的 24 厘米和提起 24 厘米铁块后水面下降的高度之和，因为下降的水的体积等于提起的 24 厘米的长方体的体积，所以先根据长方体体积=长×宽×高求出高为 24 厘米的铁块的体积，再除以铁块还在水中时长方体容器的底面积（90×40－15×15）就可以求出下降的水的高度，再加上 24 即可解答.

【解答】解：15×15×24÷（90×40－15×15）

=5400÷3375

=1.6（厘米）

24+1.6=25.6（厘米）

答：露出水面的铁块上被水浸湿的部分长 25.6 厘米.

2. 一个正方体容器，容器内部边长为 24 厘米，存有若干水，水深 17.2 厘米，现将一些碎铁块放入容器中，铁块沉入水底，水面上升 2.5 厘米，如果将这些铁块铸成一个和容器等高的实心圆柱，重新放入池中，则水面升高几厘米?

【解析】设铁块铸成和容器等高的实心圆柱放入池中水面升高 x 厘米，则有水面升高后水的总体积＝原来水的体积＋铁块浸入水中的体积，

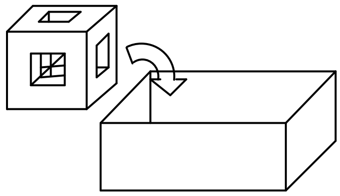
$24^2\times x=24^2\times17.2+S_{\text{铁块的底面积}}\times x$，

其中 $S_{\text{铁块的底面积}}\times24=24^2\times2.5$，得到 $S_{\text{铁块的底面积}}=24\times2.5$，解得 $x=19.2$，

所以水面升高了 $19.2-17.2=2$ (厘米)．

登峰造极

1.如图，有一个棱长为 10 厘米的正方体铁块，现已在每两个对面的中央钻一个边长为 4 厘米的正方形孔（边平行于正方体的棱），且穿透．另有一长方体容器，从内部量，长、宽、高分别为 15 厘米、12 厘米、9 厘米，内部有水，水深 3 厘米．若将正方体铁块平放入长方体容器中，则铁块在水下部分的体积为_____________立方厘米．



【解析】可以把正方体铁块看作三层：最下面一层为中央穿孔的长方体，高为3厘米；中间一层为4个长方体立柱，高为4厘米；最上面一层也是高为3厘米的中央穿孔的长方体.

由于长方体容器内原有水深3厘米，所以正方体铁块放入水中后，铁块最下面一层肯定全部在水中，而水也不可能上升到最上面一层，即恰在中间一层.设水面上升了h厘米，则中间一层在水中的部分恰好为h厘米.

由于水面上升是由于铁块放入水中导致，水面上升的体积即等于铁块在水下部分的体积，即：

$15\times12\times h=(10^2-4^2)\times3+3^2\times4\times h$，解得$h=\dfrac{7}{4}$，

故铁块在水下部分的体积为$15\times12\times\dfrac{7}{4}=315$(立方厘米).

【答案】315

笔记整理

第八讲 分组配对与对应法

知识点拨

有这样一类题，给定的数量和所对应的数量关系是在变化的，为了使变化的数量看得更清楚，可以把已知条件按照它们之间的对应关系排列出来，进行观察和分析，从而找到答案，这种解题的思维方法叫对应法.

课前复习：

1. 计算：1+2+3+4+5+…+100

2.计算：（2+4+6+8+…+1000）－（1+3+5+7+…+999）

3.计算：$1+2-3-4+5+6-\cdots-200+201+202=$________

例题精讲

模块一对应法

【例 1】 下面数字方阵中共有 10000 个数，所有这些数之和等于多少?

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & 99 & 100 \\
2 & 3 & 4 & \ldots & 100 & 101 \\
3 & 4 & 5 & \ldots & 101 & 102 \\
4 & 5 & 6 & \ldots & 102 & 103 \\
 & \ldots\ldots & & & \ldots\ldots & \\
100 & 101 & 102 & \ldots & 198 & 199
\end{array}$$

【解析】首项为 5050，公差为 100，末项为 5050+99×100=14950，

和为 $(5050+14950)\times100\div2$=1000000

【例 2】 16 名羽毛球运动员参加单打比赛，两两成对进行淘汰赛，请问要决出前四名，一共要比赛多少场?

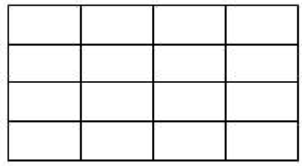
【解析】淘汰一名羽毛球运动员需要一场比赛，决出冠军需要淘汰 15 名运动员，故需要 15 场比赛.要决出前四名还要多赛 1 场,所以总共需要 16 场比赛.

【例 3】 从 1985 到 4891 的整数中，十位数字与个位数字相同的数一共有多少个?

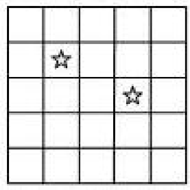
【解析】把 $abcc$ 对应为 abc，即求 198 到 488 之间有多少个数.488-198+1=291 个.

【例 4】 下图中有________个长方形?

【解析】$10\times10=100$ 个.



【巩固】如图，其中包括一个☆的长方形有多少个？



模块二　分组配对

【例 5】 若 A=$\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{21}$，求 10A 的整数部分.（6）

【例 6】 从 1 到 5 中选取 3 个数能组成多少个三位数？这些三位数的和是多少？

【解析】$A_5^3=60$,将这些三位数分组,每组两个数,使这两个数的和是 666,如(314,352),则有 30 个这样的组，和为 666×30=19980

【例 7】 （中国古代僧粥问题）一百个和尚刚好喝一百碗粥，一个大和尚喝三碗粥，三个小

和尚喝一碗粥，那么大和尚有多少个？小和尚有多少个？

【解析】将 1 个大和尚和 3 个小和尚分为一组，则每组 4 个和尚和 4 碗粥，平均每人 2 碗，整体也是平均每人 1 碗，所以共有 100÷4=25 组，所以有 25 个大和尚，75 个小和尚.

【巩固】生物学家最近发现了两种生物，一种叫九头虫，一种叫九尾狐，已知九头虫有 9 头 1 尾，而九尾狐有 9 尾 1 头．现在有 63 个头和 87 条尾巴，请问，九尾狐比九头虫多多少只？

【解析】法 1：设九头虫有 x 只，九尾狐有 y 只；

列方程组$\begin{cases}9x+y=63\\x+9y=87\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=6\\y=9\end{cases}$．九尾狐比九头虫多 3 只.

法 2：将 1 只九头虫和 1 只九尾狐分为一组，则分组有 10 个头 10 条尾，63 个头 87 条尾可以分出 6 组，还剩 3 个头 27 条尾，正好是 3 只九尾狐，所以九尾狐比九头虫多 3 只.

【例 8】 大胖、二胖、三胖和四胖称体重，他们体重均为整数，而且他们每两个人都在一起称一次，称得的千克数分别为 88，121，129，143,154 和 187．但是其中有一个数计错了，那么这四人的体重从小到大分别是多少？请写出所有可能．

【解析】将这 6 组数据分为 3 组，每组都是 4 个人体重和，所以这其中有两组数的和相等，容易发现 88+187=121+154=275 千克．所以 129 和 143 有一个是错误的．若 129 错，则正确应为 132，若 143 错，则正确应为 146，分别求得 4 人体重分别为 40，48,81,106 或 33,55,88,99．

【巩固】大胖、二胖、三胖和四胖称体重，其中二胖非要和大胖一起称，称得体重为 151 千克；三胖非要和二胖一起称，称得体重为 143 千克，四胖非要和三胖一起称，称得体重为 66 千克，大胖费又非要和四胖一起称，请问，能不能在他们称之前就知道结果是多少千克呢？请你算一算．

【解析】设大胖和四胖称得 x 千克，则可以将这 4 个数分成两组：（151,66）：（143，x）．每组的和都是 4 个人的体重和，所以结果是 151+66-143=74 千克．

巅峰挑战

1. 已知小于 1000 且与 1000 互质的自然数有 400 个，求这 400 个自然数的和.

   【解析】若 m 与 1000 互质，则 $1000-m$ 也与 1000 互质，我们把 m 与 $1000-m$ 一一对应起来，共 200 对，每对和为 1000,$200\times1000=200000$.

2. 在 1 到 3998 这 3998 个自然数中，有多少个数的各位数字之和能被 4 整除?

   【解析】为了方便，将 0 到 3999 这 4000 个数字都看成四位数 $\overline{abcd}$.不足四位在前面补 0.a 位 0、1、2、3.$\overline{bcd}$ 为 000 到 999 这 1000 个自然数，因为这 1000 个自然数的数字和除以 4 有 4 种余数（0、1、2、3），对于每一种余数都能找到一个对应的 a，使其能被 4 整除.

   故 1 到 3998 间有 1000 个自然数能被 4 整除，则 1 到 3998 有 999 个数字能被 4 整除

登峰造极

1.从自然数 1~9 中每次取出所有可能的 1 个数，2 个数，3 个数，…，9 个数，先求出每次取出数的和，再求出所有和的总和，请你求出这个总和是多少？

【解析】11520

2.写出 0 到 999 这一千个自然数，将需要写出许多数码；请问所有这些数码中；

（1）是“2”较多还是“7”较多？

（2）是“0”较多还是“9”较多？

（3）请求出这一千个数之和，以及组成这一千个数的所有数字之和.

（4）有两类 3 位数，其中 A 类满足各个数位上的数的和为 19，B 类满足各位数位上的数的和为 8，请问 A 类数更多还是 B 类数更多？多几个？

【解析】（1）把不足三位的数前面加“0”形式形三位数，可以形成形如：（521,479），（953,047），（205,794）这样的组，有一个“2”必定有一个“7”与之对应，所以“2”和“7”一样多.

（2）没有“001”这种数，所以“9”比较多

（3）500 组数每组的和均为 999，所以和为 $999\times500=499500$；500 组数每组的数字和均为 27，所以数字和为：$27\times500=13500$

（4）500 组数中和为 19 的数与和为 8 的数总在一个组里，但三位数中没有 008,017,026,035,044,053,062,071,080 这 9 个数，所以和为 19 的数较多，比和为 8 的数多 9 个.

笔记整理

第九讲 计算+工程问题综合训练

模块一 计算

1. 国际著名数学大师陈省身先生生于 1911 年，2011 年是他诞辰 100 年的日子，请你计算下面的算式$19112012\times 20121910-19112011\times 20121911=$________.

【解析】设$19112011=a, 20121910=b$, 原式$=(a+1)b-a(b+1)=ab+b-ab-a$

$=b-a=20121910-19112011=1009899$.

2. 计算：$2+3+5+13+\frac{2}{99}+\frac{11}{63}+\frac{25}{35}+\frac{5}{15}=$________.

【解析】原式$=2+3+5+13+\frac{11-9}{9\times 11}+\frac{18-7}{7\times 9}+\frac{5}{7}+\frac{1}{3}=23+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{2}{7}-\frac{1}{9}+\frac{5}{7}+\frac{1}{3}=24\frac{8}{23}$.

3. 算式:$\frac{1949\times 2012}{1949+1949^2}+\frac{1949\times 2012}{1950+1950^2}+\frac{1949\times 2012}{1951+1951^2}+\ldots+\frac{1949\times 2012}{2011+2011^2}$的计算结果是________.

【解析】原式$=\frac{1949\times 2012}{1949\times 1950}+\frac{1949\times 2012}{1949\times 1951}+\ldots+\frac{1949\times 2012}{2011\times 2012}$

$=1949\times 2012\times\left(\frac{1}{1949}-\frac{1}{2012}\right)=\frac{1949\times 2012\times(2012-1949)}{1949\times 2012}$

$=2012-1949=63$

4. 计算$\frac{3+\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{3}}\times\frac{4-\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{4}}\times\frac{5+\frac{1}{4}}{4+\frac{1}{5}}\times\frac{6-\frac{1}{5}}{5-\frac{1}{6}}\cdots\times\frac{2011+\frac{1}{2011}}{2010+\frac{1}{2011}}\times\frac{2012-\frac{1}{2011}}{2011-\frac{1}{2012}}=$________.

【解析】

原式$=\frac{\frac{2\times 3+1}{2}}{\frac{2\times 3+1}{3}}\times\frac{\frac{4\times 3-1}{3}}{\frac{4\times 3-1}{4}}\times\frac{\frac{5\times 4+1}{4}}{\frac{5\times 4+1}{5}}\times\frac{\frac{6\times 5-1}{5}}{\frac{6\times 5-1}{6}}\cdots\times\frac{\frac{2011\times 2010+1}{2010}}{\frac{2011\times 2010+11}{2011}}\times\frac{\frac{2012\times 2011-1}{2011}}{\frac{2012\times 2011-1}{2012}}$

$=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{2011}{2010}\times\frac{2012}{2011}=1006$

5. 计算：$\frac{2^2+1}{1\times 3}+\frac{4^2+1}{3\times 5}+\frac{6^2+1}{5\times 7}+\ldots+\frac{2012^2+1}{2011\times 2013}=$________.

【解析】原式$=1+\frac{2}{1\times 3}+1+\frac{2}{3\times 5}+\ldots+1+\frac{2}{2011\times 2013}$

$=1006+\frac{1}{2}\times 2\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}\right)$

$=1006+\frac{2012}{2013}=1006\frac{2012}{2013}$

6. 计算：$1\times2+2\times5+3\times8+4\times11+\ldots+20\times59=$__8400__.

【解析】$1\times2+2\times5+3\times8+4\times11+\ldots+20\times59$

$=3（1^2+2^2+3^2+\ldots+20^2）-（1+2+3+\ldots+20）$

$=3\times20\times（20+1）\times（2\times20+1）\div6-（1+20）\times20\div2$

$=3\times20\times21\times41\div6-21\times10$

$=210\times41-210$

$=210\times（41-1）$

$=210\times40$

$=8400$

故答案为：8400.

模块二　工程问题

7. A、B、C、D、E 五个人干一项工作，若 A、B、C、D 四人一起干需要 6 天完成；若 B、C、D、E 四人一起干需要 8 天完工；若 A、E 两人一起干需要 12 天完工.那么，若 E 一人单独干需要几天完工？

【答案】48

【解析】E 一人每天完成总量的 $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)\div2=\frac{1}{48}$，所以 E 单独干需要 $1\div\frac{1}{48}=48$ 天.

8. —项工程，乙单独做要 28 天完成；如果甲先做两天，接下来乙做两天，然后甲再做两天，乙做两天，⋯⋯，按这种方式，需要 18 天完成；如果乙先做两天，接下来甲做两天，然后乙再做两天，甲做两天，⋯⋯，按这种方式，做完需要________天.

【解析】乙的工效为 $\frac{1}{28}$,甲先做两天，接下来乙做两天，18 天完成，这 18 天中甲做了 10 天，乙做了 8 天，那么甲的工效是 $(1-\frac{1}{28}\times8)\div10=\frac{1}{14}$.如果乙先做两天，接下来甲做两天，那么 4 天一个周期，一个周期完成的工作量是 $\frac{1}{14}\times2+\frac{1}{28}\times2=\frac{3}{14}$，4 个周期可以完成 $\frac{3}{14}\times4=\frac{6}{7}$,还剩 $\frac{1}{7}$.然后乙先做 2 天，完成 $\frac{1}{28}\times2=\frac{1}{14}$，还剩 $\frac{1}{14}$,甲再做一天就做完了.一共花了 $4\times4+2+1=19$ 天.

9. 一项工程，分包给甲、乙两个工程队，若每人每天的工作量都是一样的话，那么若干天后，甲队可完成分包给他们的工作的 30%，乙队可完成分包给他们的工作的 50%，此时他们可以完成整个工程的 32%，为了同时完工，甲队要向乙队借调了 45 人，那么原来乙队原有多少人?

【解析】利用浓度配比可求出甲乙两队各自工作量之比

$(32\%-30\%):(50\%-32\%)=1:9$,说明甲队工作量是乙队工作量的 9 倍，甲乙两队原有

的人数 $(9\times30\%):(1\times50\%)=27:5$，借调后两队同时完工，现有的人数比为

$(9\times70\%):(1\times50\%)=63:5$，由于两队人数总和不变，设为单位“1”，总人数为

$45\div\left(\frac{5}{32}-\frac{5}{68}\right)=544$（人），乙队原有 $544\times\frac{5}{32}=85$（人）.

10. 一组人员一起割两块草地上的草，大的一块草地比小的一块大一倍，全体组员用半天时间割大的一块地，下午他们分开割，一半人留在原地到傍晚把草割完，另外一半人到小草地上割草，到傍晚还剩下一块.剩下的地第二天由一个人用一天时间才割完.这组割草人共有________人.

【解析】解：以半组人割半天为 1 份来看.大的一块地正好分 3 份割完.则小草地上的总割草量为 3÷2=1.5（份），因为半组人半天割 1 份，所以剩下：1.5－1=0.5（份），用一人割 1 天，即由 2 人割半天可以完成.则 1 份用 4 个人半天割，全组人数就是 4×2=8（人）.

答：这组割草人共有 8 人.

11. 马师傅和张师傅合伙加工一批零件，原计划马师傅每天比张师傅多加工 8 个零件，共用了 15 天完成.张师傅为了赶上马师傅的效率，叫了一个徒弟从一开始就来帮忙，结果师徒俩每天反比马师傅还多加工 4 个零件，这样用了 12 天就完成了，那么马师傅每天加工多少个零件?

【解析】解：徒弟每天加工零件：8+4=12（个）；

设工作总量为[12，15]=60 份，

张、马二人的工效之和为 60÷15=4（份），

后来三人的工效之和为 60÷12=5（份），

1 份零件的个数为：12×（5－4）=12（个），

马师傅每天加工：（12×4+8）÷2=56÷2=28（个）；

答：马师傅每天加工 28 个零件.

12. 一批工人到甲、乙两个工地进行清理工作，甲工地的工作量是乙工地的工作量的$1\frac{1}{2}$倍.上午去甲工地的人数是去乙工地人数的 3 倍，下午这批工人中有$\frac{7}{12}$的人去甲工地，其他工人去乙工地.到傍晚时，甲工地的工作已做完，乙工地的工作还需 4 名工人再做 1 天，那么这批工人有多少人?

【解析】解：上午去甲工地的人数是总人数的：$3\div\left(1+3\right)=\frac{3}{4}$，

去乙工地的人数是总人数的：$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，

下午去乙工地的人数是总人数的：$1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$，

甲工地的工作量：$\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$，

乙工地的工作量：$\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}=\frac{4}{9}$，

乙工地完成的工作量：$\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，

剩下的工作量：$\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，

总人数为；$4\div\frac{1}{9}=36$（人），

答：那么这批工人有 36 人.

故答案为：36

巅峰挑战

1. 算式$\frac{2^3}{1\times2\times3}+\frac{4^3}{3\times4\times5}+\frac{6^3}{5\times6\times7}+\ldots+\frac{2012^3}{2011\times2012\times2013}$的计算结果是________.

【解析】原式$=\frac{2^2}{1\times3}+\frac{4^2}{3\times5}+\frac{6^2}{5\times7}+\ldots+\frac{2012^2}{2011\times2013}$

$$=\left(1+\frac{1}{1\times3}\right)+\left(1+\frac{1}{3\times5}\right)+\left(1+\frac{1}{5\times7}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2011\times2013}\right)$$

$$=1006+\left(\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots+\frac{1}{2011\times2013}\right)$$

$$=1006+\frac{1}{2}\times\left(\frac{3-1}{1\times3}+\frac{5-3}{3\times5}+\frac{7-5}{5\times7}+\ldots+\frac{2013-2011}{2011\times2013}\right)$$

$$=1006+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2013}\right)=1006+\frac{1}{2}\times\frac{2012}{2013}=1006+\frac{1006}{2013}=1006\frac{1006}{2013}.$$

2. 算式$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{6\times7}+\ldots+\frac{1}{62\times63}+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{64}$的计算结果是________.

【解析】原式$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{62}-\frac{1}{63}+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}-\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{64}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{32}+\frac{1}{34}+\frac{1}{62}+\frac{1}{34}+\ldots+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{64}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}.$$

登峰造极

1.已知$s=\frac{1}{9}+\frac{1}{99}+\frac{1}{999}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{99\cdots9}_{1000个9}}$，那么 S 的小数点后 2016 位是________.

2.使用 A 管及 B 管在水槽中放水.用 A 管时，6 个小时能将水槽注满.使用一条 A 管及三条 B 管，所花的时间是用三条 A 管及一条 B 管的 2 倍.一开始是用 A 管、B 管各一条注水，途中因 A 管的出水量减半，又加了一条 B 管，注满的时间也因此而慢了 1 小时又 5 分钟.那么，A 管的出水量变小，再加入一条 B 管的时间是在开始注水的________小时________分之后.

【解析】一条 A 管与三条 B 管的功能是三条 A 管与一条 B 个的功能的$\frac{1}{2}$，所以两条 A 管与六条 B 管的功能等于三条 A 管与一条 B 管的功能.由此可知，一条 A 管相当于五条 B 管的功能.故用一条 B 管，要注满水槽花 30 小时的时间.因此，A 管 1 小时可加到水槽的$\frac{1}{6}$，B 管则是$\frac{1}{30}$.

那么，用一条 A 管及一条 B 管，要注满水槽，得花$1\div\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)=5$（小时）.

此外，出水量变成一半的一条 A 管及两条 B 管如果一开始就使用，因 A 管 1 小时注入$\frac{1}{12}$，两条 B 管 1 小时则注入$\frac{1}{15}$的水，所以要注满水槽，需要$1\div\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)=6\frac{2}{3}$（小时）.

但是，最初是使用一条正常的 A 管及一条 B 管，所以比预定时间慢了$1\frac{1}{12}$（小时）（1 小时又 5 分钟）.如果一开始就用出水量只有一半的 A 管，则将比预定时间慢$1\frac{2}{3}$（小时）.

因此，正常的话，只要 5 小时就可注满，加入 B 管是在开始注水后的

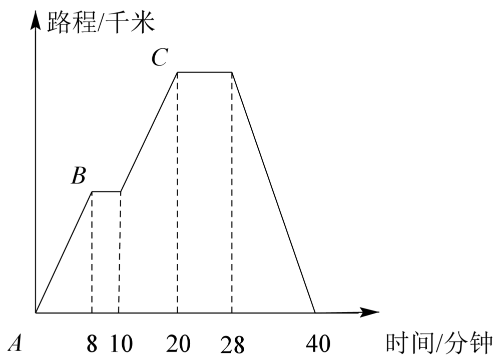
$5\times\left[\left(1\frac{2}{3}-1\frac{1}{12}\right)\div1\frac{2}{3}\right]=1\frac{3}{4}$（小时）=1 小时 45 分.

笔记整理

第十讲 图形应用题

第一部分　运动类（*s-t* 图）

1. 下面折线图是公交车从 A 站过 B 站到 C 站以及返回时的路程与时间的关系．去时在 B 站停车，而返回时 B 站不停，去时的行驶速度为每分钟 600 米．那么此公交车往返时的平均速度是每分钟多少米？



【答案】$540m/\min$

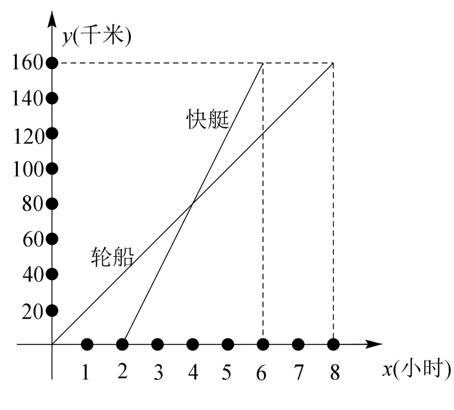
【解析】去时一共用了 20 分钟，其中 20－2=18 分钟在行驶．即 AC 之间距离为 $18\times600=10800$ 米．往返共用时 40 分钟，总路程为 $10800\times2=21600$ 米．则平均 速度为 $21600\div40=540$ 米每分钟．

2. 如图表示一艘轮船和一艘快艇沿相同路线从甲港出发到乙港行驶过程中路程随时间变化的图象．根据图象解答下列问题：

（1）甲乙两港之间的距离是多少千米？

（2）轮船和快艇在途中（不包括起点和终点）行驶的速度分别是多少？

（3）问快艇出发多长时间赶上轮船？



【答案】（1）160 千米；（2）$V_{快}=40km/h$，$V_{轮}=20km/h$；（3）2 小时

【解析】（1）160 千米

（2）$V_{快}=160\div(6-2)=40$千米/每小时

$V_{轮}=160\div8=20$ 千米/每小时

（3）设快艇出发 x 小时赶上轮船

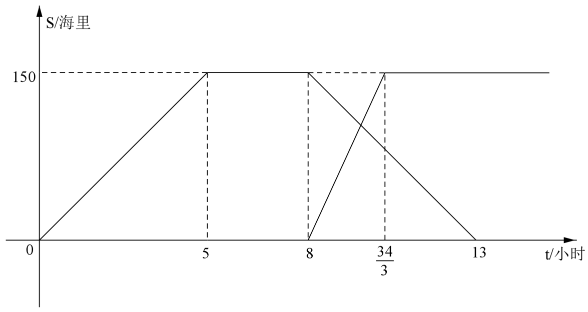
则有 $40x=20\times\left(x+2\right)$，解得 $x=2$．

3. 黄岩岛是我国南沙群岛的一个小岛，渔产丰富.一天某渔船离开港口前往该海域捕鱼.捕捞一段时间后，发现一外国舰艇进入我国水域向黄岩岛驶来，渔船向渔政部门报告，并立即返航.渔政船接到报告后，立即从该港口出发赶往黄岩岛.渔政船及渔船与港口的距离s和渔船离开港口的时间t之间的关系如图所示.（假设渔船与渔政船沿同一航线航行）

（1）求渔政船从港口出发赶往黄岩岛的速度；

（2）求渔船和渔政船相遇时，两船与黄岩岛的距离；

（3）在渔政船驶往黄岩岛的过程中，求渔船从港口出发经过多长时间与渔政船相 距30海里？



【答案】（1）45(海里/h)；（2）60海里；（3）9.6h和10.4h

【解析】（1）由图表可得：$150\div(\dfrac{34}{3}-8)=45$(海里/$h$)

（2）渔船速度为$150\div\left(13-8\right)=30$(海里/$h$),

从出发到相遇共花$150\div\left(45+30\right)=2\,h$，那么两船与黄岩岛的距离$2\times30=60$海里.

（3）分两种情况：第一种是两船相遇之前相距30海里，则

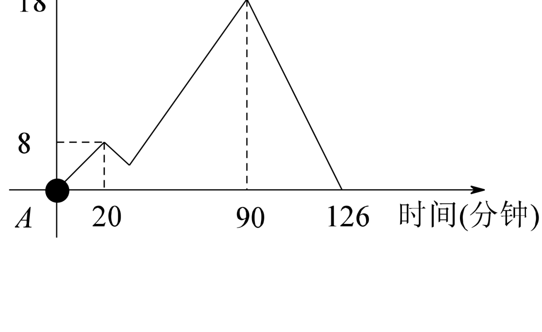
$\left(150-30\right)\div\left(45+30\right)=1.6\,h$，　从出发到相距30海里共用时间$1.6+8=9.6\,h$；

第二种是两船相遇之后相距30海里，则$\left(150+30\right)\div\left(45+30\right)=2.4\,h$，从出发到相距30海里共用时间$2.4+8=10.4\ \ h$.

4. 下图表示一条船从点A到河的上游点B往返的情形. 从点A出发20分钟后，由于发动机坏了一段时间，船顺着河水倒走了一段.之后发动机修好，继续前进到达点B，接着立即向点A返回，假设河水的流速，船行驶时在静水中的速度都是不变的.

（1）这艘船在静水中的速度是多少？

（2）途中发动机停止了，船顺的河水倒走了多少千米？



【答案】（1）$\dfrac{9}{20}km/min$；（2）2千米

【解析】（1）由图表可知，顺水速度：$V_{顺}=18\div(126-90)=\dfrac{1}{2}km/min$，

逆水速度：$V_{逆}=8\div 20=\dfrac{2}{5}km/min$，

则船的静水速度：$V_{静}=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5})\div 2=\dfrac{9}{20}km/min$，

水速：$V_{水}=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{5})\div 2=\dfrac{1}{20}km/min$

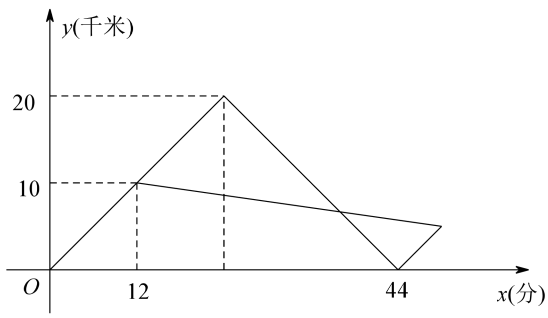
（2）船逆水行驶 18 千米应用时 $18\div\dfrac{2}{5}=45$ 分钟，实际用 90 分钟，则有 45 分钟是倒走及弥补倒走距离所用时间．设倒走了 x 分钟，则有 $\dfrac{1}{20}\cdot x=\dfrac{2}{5}(45-x)$，解得 $x=40$，倒走了 $40\times\dfrac{1}{20}=2$ 千米．

5. 武警战士乘一冲锋舟从 A 地逆流而上，前往 C 地营救受困群众，途经 B 地时，由所携带的救生艇将 B 地受困群众运回 A 地，冲锋舟继续前进，到 C 地接到群众后立刻返回 A 地，途中曾与救生艇相遇．冲锋舟和救生艇距 A 地的距离 y（千米）和冲锋舟出发后所用时间 x（分）之间的关系如图所示，假设营救群众的时间忽略不计，水流速度和冲锋舟在静水中的速度不变．

（1）请直接写出冲锋舟从 A 地到 C 地所用的时间；

（2）求水流的速度；

（3）冲锋舟将 C 地群众安全送到 A 地后，又立即去接应救生艇．假设群众上下船 的时间不计，求冲锋舟在距离 A 地多远处与救生艇第二次相遇？



【答案】（1）24 分钟，（2）$\dfrac{1}{12}km/min$，（3）$\dfrac{20}{3}$（千米）．

【解析】（1）冲锋舟从 A 到 C 速度不变，行 10 千米用了 20 千米用时 24 分钟．

（2）由图表可知 $V_{逆}=20\div 24=\dfrac{5}{6}km/分$，$V_{顺}=20\div\left(44-24\right)=1km/分$，

则 $V_{静}=\left(\dfrac{5}{6}+1\right)\div 2=\dfrac{11}{12}km/分$，$V_{水}=\left(1-\dfrac{5}{6}\right)\div 2=\dfrac{1}{12}km/分$．

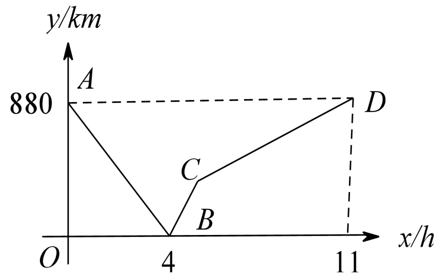
（3）救生艇本身无动力速度，其速度为水速．

设冲锋舟回 A 地后 x 分钟与救生艇第二次相遇．

则 $x\cdot\dfrac{5}{6}+\left(x+44-12\right)\times\dfrac{1}{12}=10$，解得 x=8．

$8\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{20}{3}$（千米）

6. 小明开车从甲地驶往乙地，小亮开车从乙地驶往甲地，两人同时出发，小亮的速度比小明慢，设小亮行驶的时间为 $x(h)$，两人之间距离为 y，图中的折线表示 y 与 x 之间的关系．



（1）甲、乙两地之间的距离为__________千米；

（2）请解释图中点 B 和点 C 的实际意义；

（3）求小明和小亮的速度．

【答案】（1）$880km$

（2）B：两车相遇，C：小明到达乙地

（3）快车速度为 $140km/h$，慢车速度为 $80km/h$

【解析】（1）$880km$

（2）B：两车相遇，C：小明到达乙地

（3）设小明速度为 $V_1\,km/h$，小亮速度为 $V_2\,km/h$

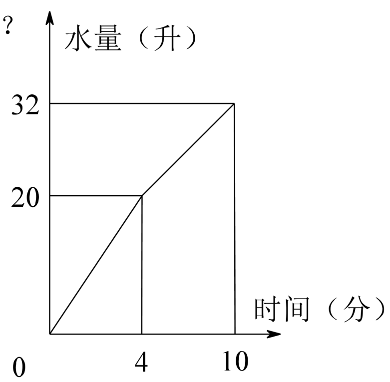
$\begin{cases}(V_1+V_2)\times 4=880\\ V_2\times 11=880\end{cases}$，解得 $\begin{cases}V_1=140\\ V_2=80\end{cases}$．

第二部分　事件类

7. 现在有一装有进、出水管的水缸，单位时间内进出的水量是一定的，如果前 4 分钟只打开进水管，在随后的 6 分钟内进出水管都打开，得到时间与水量之间的关系如图．

（1）进水管在前 4 分钟内，每分钟进水多少升？

（2）在 10 分钟后只打开出水管，容器内的水几分钟可以放完？



【答案】（1）5，（2）$10\dfrac{2}{3}$．

【解析】（1）$20\div 4=5$ 升；

（2）$5-\left[(32-20)\div(10-4)\right]=3L/\min$．

$32\div 3=10\dfrac{2}{3}\min$．

8. 如图 1，一个长为 24 厘米，宽为 3 厘米的长方形从正方形的左边平移到右边，图 2 是平移过程中它们重叠部分面积与时间的部分关系图.

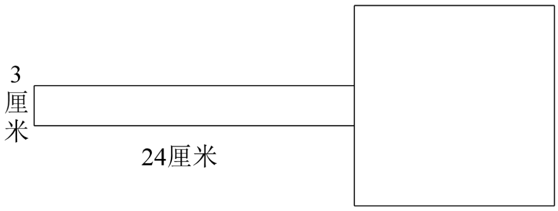


图1

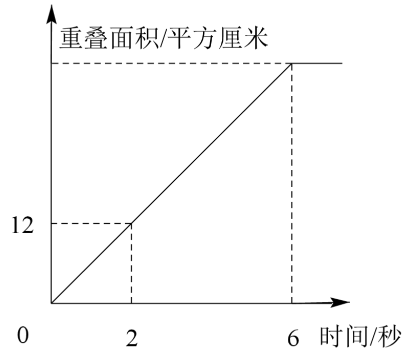


图2

(1)正方形的边长为__________厘米.

(2)当平移时间为多少秒时，长方形和正方形的重叠部分面积是 24 平方厘米？

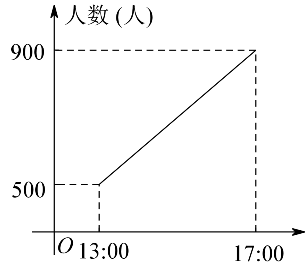
【答案】（1）12，（2）4 和 14.

【解析】（1）$12\div2\times6\div3=12(cm)$;

（2）$24\div3=8(cm)$;

则长方形有 8 厘米长的一段与环形重叠时，重叠面积为 24 平方厘米．$12\div2\div3=2(cm/s)$．则长方形每秒前进 2 厘米，当 $8\div2=4$ 秒或 $(24+12-8)\div2=14$ 秒时满足条件.

9. 商场主管在五一假期期间对商场人流量进行调查．该商场入口和结账出口共 22 个，一个入口平均每小时有 300 名顾客进入，一个出口平均每小时有 25 个顾客结账离开．当天的 13:00—17:00，所有出口、入口均打开，下图表示该时间段内商场市内人数变化情况，该商场出口、入口各多少个？



【答案】入口 2 个，出口 20 个

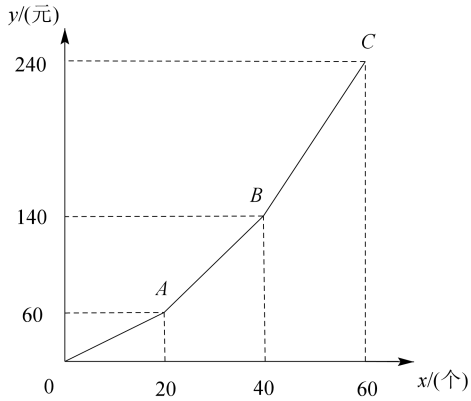
【解析】设入口有 a 个，出口有 b 个，则有 $a+b=22$.

由图表可得：$300\times4\times a-25\times4\times b=900-500$

联立 $\begin{cases}a+b=22\\1200a-100b=400\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=20\end{cases}$

所以该超市入口有 2 个，出口 20 个.

10. 某企业通过提高加工费标准的方式调动工人积极性．工人每天加工零件获得的加工费 y（元）与加工个数 x（个）之间的图象为折线 $OA-AB-BC$，如图所示．老张两天一共加工了 60 个零件，共得到加工费 220 元．在这两天中，老张第一天加工的零件不足 20 个，求老张第一天加工零件的个数.



【答案】10

【解析】由图表可知：

当加工个数为 1~20 个时．每个 $60\div20=3$ 元；

当加工个数为 20~40 个时，每个 $(140-60)\div(40-20)=4$ 元；

当加工个数为 40~60 个时，每个 $(240-140)\div(60-40)=5$ 元；

设老张第一天加工了 a 个，第二天加工了 b 个，

其中 $a<20$，$b>40$

$\begin{cases} a+b=60 \\ 3a+(b-40)\times 5+140=220 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=10 \\ b=50 \end{cases}$

11. 如图 1，某容器由 A、B、C 三个长方体组成，其中 A、B、C 的底面积分别为 $25\,cm^2$、$10\,cm^2$、$5\,cm^2$，C 的容积是容器容积的 $\dfrac{1}{4}$(容器各面的厚度忽略不计).现在以速度 V(单位: cm^3/s)均匀的向容器注水，直至注满为止.图 2 表示注水全过程中容器的水面高度 h(一次注满 A、B、C)(单位：cm)与注水时间 t(单位：s)的关系.(备注：s 代表时间单位“秒”)

(1)在注水过程中，注满 A 所用的时间为________s，再注满 B 又用了________s；

(2)注水的速度是每秒多少立方厘米？

(3)容器的高度是多少厘米？

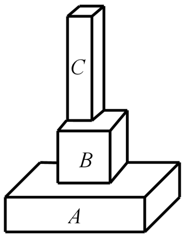


图 1

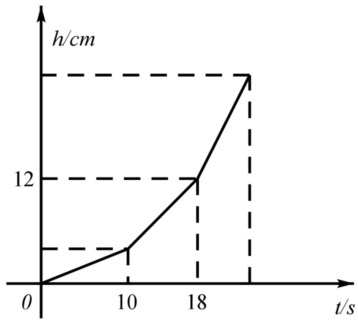


图 2

【解析】(1)10；8　(2)$10\,cm^3$　(3)$24cm$

巅峰挑战

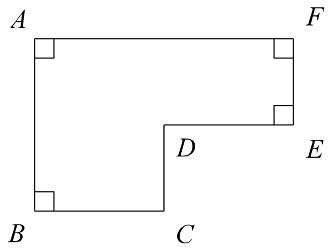
1. 已知动点 G 以每秒 1cm 的速度沿图甲的边框按从 $B\to C\to D\to E\to F\to A$ 的路径移动，相应的$\triangle ABG$ 的面积 S 与时间 t 之间的关系如图乙中的图象表示．若 AB=6cm，试回答下列问题：

（1）图甲中的 BC 长是多少？

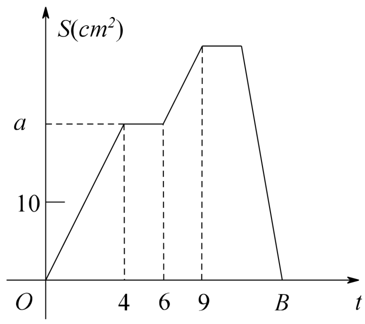
（2）图乙中的 a 是多少？

（3）图甲中的图形面积是多少？

（4）图乙中的 B 是多少？



图甲



图乙

【答案】（1）4，（2）12，（3）36，（4）14.5

【解析】（1）由图表可知，点 P 用 4 秒从 B 到 C．则 $BC=4\times1=4$ 厘米；

（2） $a=S_{\triangle ABC}=6\times4\times\dfrac{1}{2}=12$ (平方厘米)；

（3）$CD=\left(6-4\right)\times1=2$ 厘米，$DE=\left(9-6\right)\times1=3$ 厘米．

则 $S=AB\times(BC+DE)-CD\times DE=6\times\left(4+3\right)-2\times3=36$ 平方厘米；

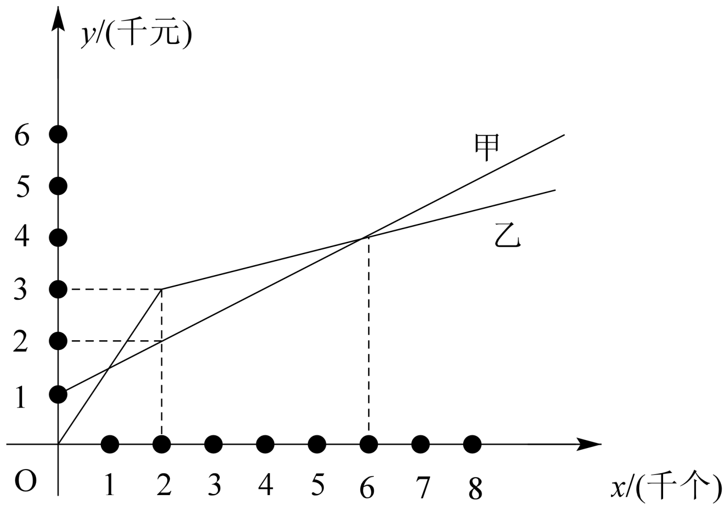
（4）$EF=AB-CD=6-2=4$ 厘米，$AF=BC+DE=4+3=7$ 厘米

$B-9=\left(4+7\right)\div1=11$ 秒，B=20 秒．

2. 某单位准备印制一批证书，现有两个印刷厂可供选择，甲厂费用分为制版费和印刷费两部分，乙厂直接按印刷数量收取印刷费．甲、乙两厂的印刷费用 y（千元）与证书数量 x（千个）的关系图象分别如图中甲、乙所示．

（1）当印制证书 8 千个时，应选择哪个印刷厂节省费用，节省费用多少元？

（2）如果甲厂想把 8 千个证书的印制工作承揽下来，在不降低制版费的前提下，每个证书最少降低多少元？



【答案】（1）乙，500 元（2）90

【解析】（1）由图可得，当印制证书 8 千个时，乙印刷厂更便宜，甲印刷厂有 1 千元的制版费，印刷费是每 1 千个为 $\left(2-1\right)\div 2=0.5$ 千元，甲印刷厂印制 8 千个费用为 $1+0.5\times 8=5$ 千元，甲印刷厂印制 6 千个费用为 $1+0.5\times 6=4$ 千元；乙印刷厂前面 2 千个，每 1 千个为 $3\div 2=1.5$ 千元，超过两千个的部分为每 1 千个为 $\left(4-3\right)\div\left(6-2\right)=0.25$ 千元，所以乙印刷厂印制 8 千个费用为 $3+0.25\times\left(8-2\right)=4.5$ 千元，乙比甲印刷厂节约 $5-4.5=0.5$ 千元=500 元.

（2）如果甲厂要揽下这个工作，那么印制 8 千个的费用不应该高于乙厂的 4.5 千元，即每 1 千个的费用不高于 $\left(4.5-1\right)\div 8=0.4375$ 千元=437.5 元，每个费用为 0.4375 元，原来每个为 0.5 元，所以每个最少降低 $0.5-0.4375=0.0625$ 元.

登峰造极

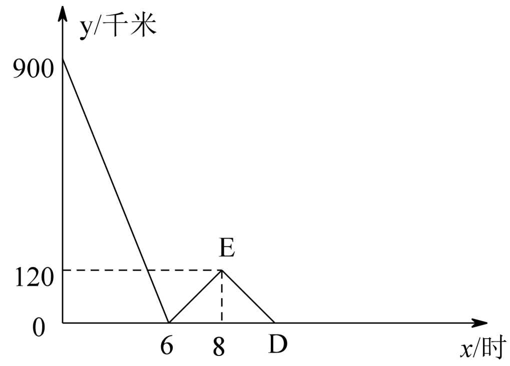
1.已知：A、B 两地之间的距离为 900km，C 地介于 A、B 两地之间，甲车从 A 地驶往 C 地，乙车从 B 地经 C 地驶往 A 地，已知两车同时在出发，相向而行，结果两车同时到达 C 地后，甲车因故在 C 地须停留一段时间，然后返回 A 地，乙车继续驶往 A 地，设乙车行驶时间 x（h），两车之间的距离为 y（km），如图的折线表示 y 与 x 之间的关系.

（1）乙车的速度是多少千米/小时？

（2）甲车的速度是多少千米/小时？

（3）如果两车开始出发时间是早上 8：00，那么 D 点所表示的时间是几点？

（4）从 D 点的时间开始，又过了多少个小时两车相距 90 千米？此时的时间是几点？



【答案】（1）$60km/h$，（2）$90km/h$，（3）20:00，（4）不可能相距 90 千米.

【解析】（1）乙车相遇后的一小段时间里是单独行驶，则 $V_乙=120\div(8-6)=60\,km/h$.

（2）已知 $V_乙=60\,km/h$，且甲乙速度和为 $900\div6=150\,km/h$.

所以 $V_甲=150-60=90\,km/h$.

（3）D 点为甲从 C 出发后追上乙，则 $120\div(90-60)=4\,h$.

所以 D 点的坐标为 8+4=12 小时，D 点所表示的时间是 20:00.

（4）$90\div(90-60)=3\,h$．若要两车相距 90 千米，需从 D 点的时间开始经过 3 小时．此时离出发有 12+3=15 小时，但甲车从 A 到 C 用时 6 小时．速度不变从 C 到 A 亦需 6 小时，则从出发开始 6+2+6=14 小时后甲车到达 A 地，所以甲乙两车不可能相距 90 千米.

2.如图,甲、乙两个圆柱形水槽的轴截面示意图，乙槽中有一圆柱形铁块立放其中（圆柱形铁块的下底面完全落在乙槽底面上）．现将甲槽中的水匀速注入乙槽，甲、乙两个水槽中水的深度 y（厘米）与注水时间 x（分钟）之间的关系如图 2 所示．根据图象提供的信息,

（1）图 2 中折线 ABC 表示乙槽中水的深度与注水时间之间的关系，线段 DE 表示甲槽中水的深度与注水时间之间的关系，点 B 的纵坐标表示的实际意义是什么？

（2）注水多长时间时，甲、乙两个水槽中水的深度相同?

（3）若乙槽底面积为 42 平方厘米（壁厚不计），求乙槽中铁块的体积；

（4）若乙槽中铁块的体积为 126 立方厘米,求甲槽底面积（壁厚不计）．（直接写成结果）

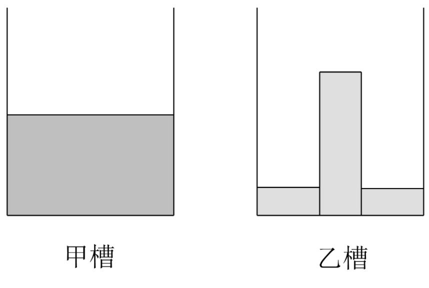


图1

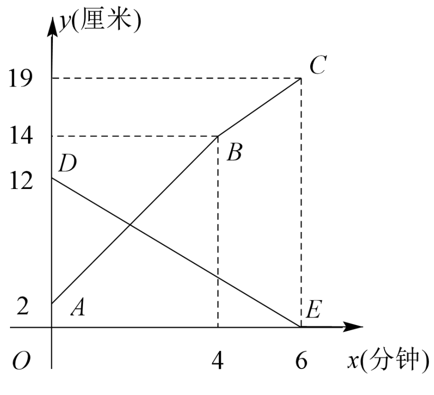


图2

【答案】（1）点 B 的纵坐标代表乙槽中水面与铁块上底齐平时的高度；

（2）2 分钟；（3）$98cm^3$（4）$67.5cm^2$

【解析】（1）点 B 的纵坐标代表乙槽中水面与铁块上底齐平时的高度.

（2）线段 AB 每分钟升高 $(14-2)\div 4=3$ 厘米，线段 DE 每分钟下降 $12\div 6=2$ 厘米，而最开始甲槽水深 12 厘米，乙槽水深 2 厘米，相差 10 厘米，$10\div(2+3)=2$ 分钟

（3）设铁块底面积为 S，则 $\dfrac{42}{42-S}=\dfrac{(14-2)\div 4}{(19-14)\div(6-4)}$，解得 $S=7$，又由（1）可知铁柱高为 14cm，铁柱体积为 $7\times 14=98(cm^3)$.

（4）$126\div 14=9cm^2$，可知铁柱底面积为 9 cm^2. 设乙槽底面积为 $S_{乙}$，则

$\dfrac{S_{乙}}{S_{乙}-9}=\dfrac{(14-2)\div 4}{(19-14)\div(6-4)}$，解得 $S_{乙}=54cm^2$

由线段 BC 可知，甲槽每分钟倒入乙槽的水量为 $54\times(19-14)\div(6-4)=135cm^3$

则甲槽底面积 $135\div(12\div 6)=67.5cm^2$.

笔记整理

第十一讲 柳卡图与环形跑道

模块一：柳卡图之发车间隔

这类问题往往问一个人在过程中遇见了几个车或船。

步骤：

1）画出一对平行线

2）在平行线上画刻度线，

3）先画出迎面开出多个车或船

4）再画出那个人。

5）数有几个交点，就遇见几个车或船。

【例 1】 A 站每 5 分钟向 B 站发一辆公交车，公交车 15 分钟从 A 到 B，小明从 B 站出发去 A 站，出发的时候恰好有一辆公交车进站，小明在路上遇到 6 辆公交车，到达 A 站时，恰好有一辆公交车出站。问小明从 B 到 A 需要花多少时间？

【答案】20

【巩固】A 站每 3 分钟向 B 站发一辆公交车，公交车 15 分钟从 A 到 B，小明从 B 站出发去 A 站，出发的时候恰好有一辆公交车进站，小明在路上遇到 8 辆公交车，到达 A 站时，恰好有一辆公交车出站。问小明从 B 到 A 需要花多少时间？

【答案】12

模块二：柳卡图之多次相遇追及

柳卡图解决多次相遇、追及问题的优势在于可以看出每次相遇是**迎面相遇**还是**追及相遇**。

步骤：

1）由两个人或车的速度比，求出两个人或车走全程的时间比。

2）画出一对平行线，在平行线上画刻度线，

3）先画一个人在往返过程中的线段，再画另一个在往返过程中的线段，

4）数有几个交点，代表相遇几次。

5）用相似模型算出相遇地点到端点的距离。

【例 2】 甲的速度是每小时 40 千米，乙的速度是每小时 60 千米。两人从 A、B 两地同时相向而行，不断往返，第一次相遇地点和第二次相遇地点相距 10 千米，求 AB 的长度.

【答案】25

【巩固】小白家和小红家相距 210 米，小红到小白家需要 3 分钟，小白到小红家需要 4 分钟。两人到达对方家后立即返回。问，两次迎面相遇地点相距多少米？

【答案】60

【例 3】　两名游泳运动员在长 30 米的游泳池里来回游泳，甲的速度是每秒 1 米，乙的速度是每秒 0.6 米，他们同时从游泳池的一端出发，来回一共游了 21 分钟，他们一共遇上（迎面或同向）几次？

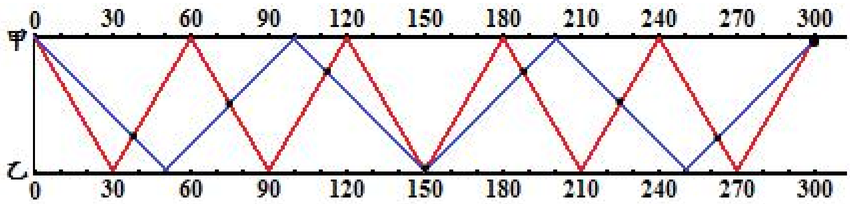
【考点】行程—多次相遇；行程—图示解法—柳卡图

【解析】柳卡图

甲游全程用时：30÷1=30 秒，乙游全程用时：30÷0.6=50 秒

甲往返全程需 30×2=60 秒，乙往返全程需 50×2=100 秒，二人每隔[60，100]=300 秒重新同时回起点一次。21 分钟=1260 秒。即二人的遇上情况以 300 秒为 1 个周期。下面画出出发起 300 秒内的柳卡图。

横轴：时间(单位:10 秒)　纵轴：路程　红线：甲　蓝线：乙　交点：相遇点(迎面或同向)



1260÷300=4……60，由图可知：300 秒内二人遇上 8 次，60 秒内二人相遇一次

所以，二人 21 分钟内一共遇上 8×4+1=33 次。

【例 4】　甲、乙两车分别从 A，B 两地同时出发相向而行，甲车每小时行 40 千米，乙车每小时 60 千米，两车分别到达 B 地和 A 地后，立即返回．甲车的速度增加二分之一，乙车的速度不变.已知两次相遇处的距离是 7 千米，则 A、B 两地的距离为多少千米？

【答案】20

模块三：环形跑道

【例 5】　甲、乙两人匀速绕圆形跑道相向跑步，出发点在直径的两端，如果他们同时出发，在甲跑完 60 米时两人第一次相遇，乙跑一圈还差 20 米时两人第二次相遇．圆形跑道长多少米？

【解析】320 米

【例 6】　甲、乙两人在 400 米长的环形跑道上跑步.甲以每分钟 300 米的速度从起点跑出 1 分钟时，乙从起点同向跑出，从这时起甲用了 5 分钟赶上乙，那么乙每分钟跑多少米？

【解析】当乙出发时，甲乙之间的距离是 400−300×1=100 米.由于甲用了 5 分钟追上乙，所以甲每分钟比乙多跑 100÷5=20 米，因此乙每分钟跑 300−20=280 米.

【例 7】　有甲、乙、丙三人同时同地出发，绕一个花圃行走，乙、丙二人同方向行走，甲与乙、丙相背而行.甲每分钟走 40 米，乙每分钟走 38 米，丙每分钟走 36 米.出发后，甲和乙相遇后 3 分钟和丙相遇.这花圃的周长是多少米？

【解析】由已知条件可知，甲先与乙相遇.在甲乙相遇这段时间里，乙丙所行的路程差正是甲丙在 3 分钟内相向而行的路程之和：$(40+36)\times 3=228$（米）.

那么从出发到甲乙相遇所用时间为：$228\div(38-36)=114$（分钟）.

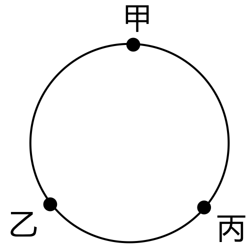
所以，花圃的周长为(40+38)×114=8892（米）.

【例 8】 跑道一圈长 400 米，现在进行 3000 米赛跑，张明平均每秒跑 5.8 米，李强每分钟跑 0.75 圈.当张明快到终点时，李强又和他并肩相遇了，那么这时张明离终点多少米？

【解析】依题意，李强每分钟跑 $400\times0.75=300$ 米，即每秒钟跑 $300\div60=5$ 米，于是张明比李强每秒钟多跑 $5.8-5=0.8$ 米.张明与李强并肩相遇，说明张明已多跑了若干圈.张明比李强多跑一圈要用时 $400\div0.8=500$ 秒，在这段时间内他已跑了 $500\times5.8=2900$ 米，这与 3000 米的差仅为 100 米，结合题述即知本题的答案就是 100 米.

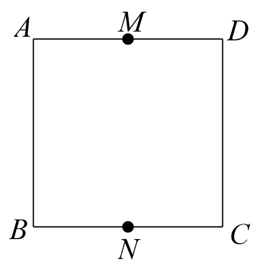
巅峰挑战

1. 如图，甲、乙、丙三人在一个圆周上的三个点，他们之间两两距离都是相等的，甲、乙两人分别以 3 米/秒和 2 米/秒的速度逆时针行走，丙以 4 米/秒的速度顺时针行走，当乙、丙相遇 100 次的时候，甲、乙相遇了多少次，甲、丙相遇了多少次？



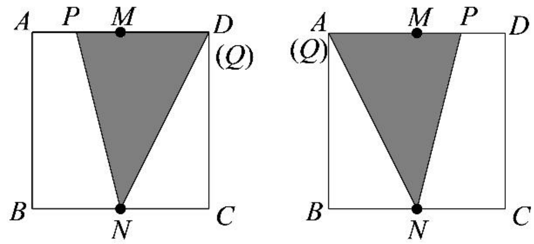
【解析】：甲乙相遇 17 次，甲丙相遇 116 次.

2. 如图，点 M、N 分别是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的一组对边 AD、BC 的中点，P、Q 两个动点同时从 M 出发，P 沿正方形的边逆时针方向运动，速度是 1 米/秒；Q 沿正方形的边顺时针方向运动，速度是 2 米/秒，求：
（1）第 1 秒时 ΔNPQ 的面积；
（2）第 15 秒时 ΔNPQ 的面积；
（3）第 2015 秒时 ΔNPQ 的面积.



【解析】（1）第 1 秒时，P 点运动到线段 MA 的中点，Q 点运动到 D 点，如图（1），其中 $PD=AD-AP=4-4\div2\div2=3$，所以 ΔNPQ 的面积为 $3\times4\div2=6$（平方米）；
（2）第 15 秒时，$1\times15=15$（米），此时 P 点运动到线段 MD 的中点，Q 点运动了 $2\times15=30$（米）.由 $30-4\times4=14$，知此时 Q 运动到点 A，即点 Q 与点 A 重合，如图（2），其中 $AP=AD-PD=4-4\div2\div2=3$，所以 ΔNPQ 的面积为 $3\times4\div2=6$（平方米）；
（3）因为 $16\div1=16$，$16\div2=8$，所以每经过 16 秒，点 P 和点 Q 都回到出发点 M，又因为 $2015\div16=125\cdots\cdots15$，所以第 2015 秒和第 15 秒时，点 P 和点 Q 的位置相同，即第 2015 秒和第 15 秒时，ΔNPQ 的面积相等，由（2）知第 15 秒时，ΔNPQ 的面积为 6

平方米，所以第 2015 秒时，ΔNPQ 面积是 6 平方米.



登峰造极

1.一条大河有 A,B 两个港口,水由 A 流向 B,水流速度是每小时 4 千米.甲、乙两船同时由 A 向 B 行驶,各自不停地在 A,B 之间往返航行,甲船在静水中的速度是每小时 28 千米,乙船在静水中的速度是每小时 20 千米.已知两船第二次迎面相遇的地点与第四次迎面相遇的地点相距 40 千米，求 A,B 两个港口之间的距离。

【答案】120

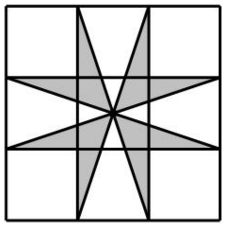
2.甲、乙两车都从 A 地到 B 地。甲车比乙车提前 30 分钟出发，行到全程的三分之一时，甲车发生了故障，修车花了 15 分钟，结果比乙车晚到 B 地 15 分钟。甲车修车前后速度不变，全程为 300 千米。那么乙车追上甲车时在距 A 地多少千米？

【答案】150

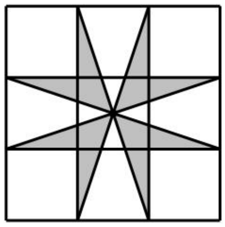
笔记整理

第十二讲 直线几何综合训练（一）

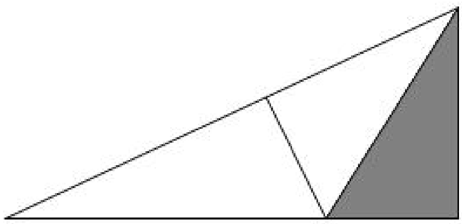
【例 1】题图是一个 3×3 的正方形网格.如果小正方形的边长是 1，那么阴影部分的面积是多少？

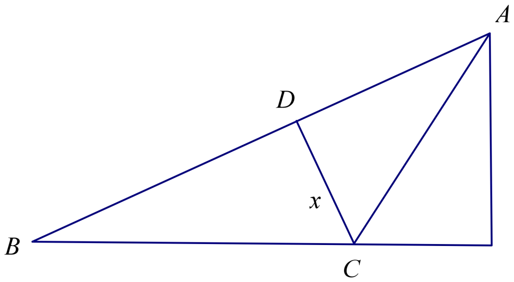


【解析】$S_{空白}=1\times4+3\div2+3\div2=7$，$S_{阴影}=3\times3-7=2$.



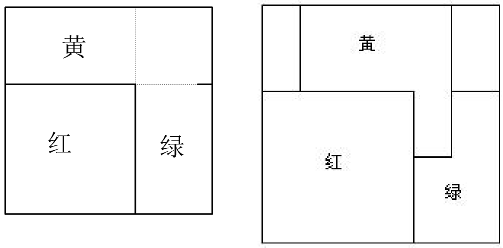
【例 2】一个各条边分别为 5 厘米、12 厘米、13 厘米的直角三角形，将它的短直角边对折到斜边上去与斜边相重合，如图所示.问：图中的阴影部分（即折叠的部分）的面积是多少平方厘米?





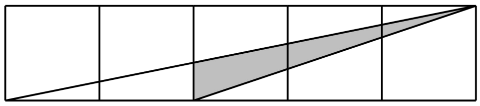
【解析】设 $CD=x$，有 $13x=(12-x)\times5$，解得 $x=\frac{10}{3}$，所以 $S_{阴影}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times5=\frac{25}{3}$ 平方厘米

【例 3】如图，红、黄、绿三块大小一样的正方形纸片，放在一个正方体盒内，它们之间相互重叠.已知露在外面的部分中，红色的面积是 20，黄色的面积是 14，绿色的面积是 10.那么，正方体盒子的底面积是多少?



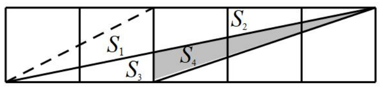
【解析】将黄色纸片推到左边，则每块纸片露出的形状如右上图.黄、绿两色的面积之和保持 14+10=24 不变，则在右图中这两块面积相等，均为 $24\div 2=12$.根据公式可知，空白处面积＝黄×绿÷红＝$12\times 12\div 20=7.2$，则正方形盒底面积
$7.2+12+12+20=51.2$

【例 4】5 个小正方形如图摆放，图中阴影部分面积为 2.4 平方厘米，则一个小正方形的边长为多少厘米?

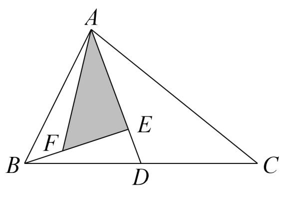


【答案】2
【解析】作如题图辅助线，设每个小正方形的边长为“1”.由等高模型及等比性质，可知

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_3}{S_4}=\frac{S_1+S_3}{S_2+S_4}=\frac{2\times 1\div 2}{3\times 1\div 2}=\frac{2}{3}$.由于 $S_3=2.4\div 3\times 2=1.6$，$S_3+S_4=1.6+2.4=4$，刚好是一个小正方形的面积.所以一个小正方形的边长为 2.



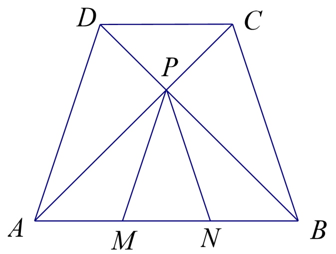
【例 5】在下图中，三角形 ABC 的面积为 180 平方厘米，$BD=DC$，$AE=3ED$，$EF=2FB$，求三角形 AEF 的面积。



【解析】$S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 180=90cm^2$，$S_{\Delta AEB}=\frac{3}{4}S_{\Delta ABD}=\frac{3}{4}\times 90=67.5cm^2$，

$S_{\Delta AEF}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABE}=\frac{2}{3}\times 67.5=45cm^2$。

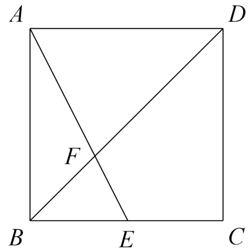
【例 6】如图，点 P 是梯形 $ABCD$ 对角线的交点，M、N 是下底 AB 的三等分点，PM、PN 分别与梯形两腰平行．已知三角形 PAM 面积为 10，那么三角形 PBC 面积为多少？



【答案】15.

【解析】注意到三角形 PNC 面积为 10,PAN 面积为 20,所以 $PA=2PC$,所以三角形 PBC 面积为 $10\times 3\div 2=15$.

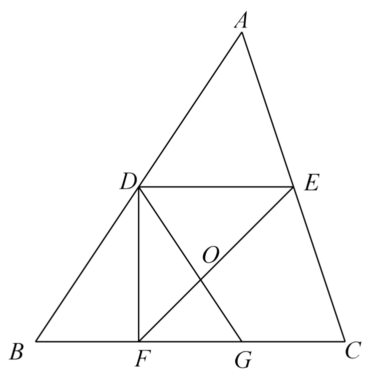
【例 7】在下图的正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 边的中点，AE 与 BD 相交于 F 点，三角形 BEF 的面积为 1 平方厘米，那么正方形 $ABCD$ 面积是多少平方厘米？



【答案】12.

【解析】连接 DE，根据题意可知 $BE:AD=1:2$，根据蝴蝶定理得 $S_{梯形}=(1+2)^2=9$ (平方厘米)，$S_{\triangle ECD}=3$ (平方厘米)，那么 $S_{□ABCD}=12$ (平方厘米).

【例 8】如图，三角形 ABC 的面积为 1. D 、E 分别为 AB 、AC 的中点. F 、G 分别为 BC 边上的三等分点.请问：三角形 DEF 的面积是多少?三角形 DOE 的面积是多少?

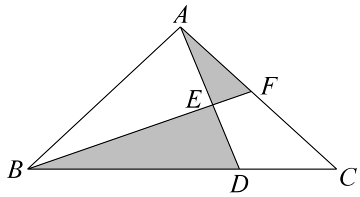


【解析】连接 GE，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{2}$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$，$FG=\dfrac{1}{3}BC$，所以 $\dfrac{FG}{DE}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$，设 $S_{\triangle OFG}=4a$，则

$S_{四边形DECB}=4a+6a+9a+6a+10a+10a=45a$ $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{4}$，所以 $S_{\triangle ADE}=15a$，因此

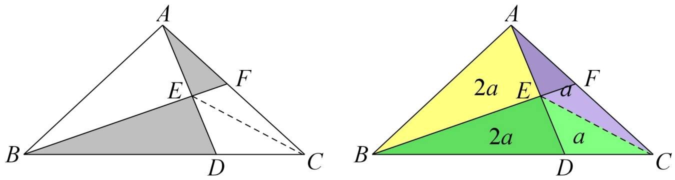
$S_{\triangle ABC}=60a=1$，即 $a=\dfrac{1}{60}$，所以 $S_{\triangle DEF}=15a=\dfrac{1}{60}\times15=\dfrac{1}{4}$，$S_{\triangle DOE}=9a=\dfrac{1}{60}\times9=\dfrac{3}{20}$

【例 9】如图，三角形 ABC 的面积为 10，AD 与 BF 交于点 E，且 $AE=ED$，$BD=\dfrac{2}{3}CB$，求图中阴影部分面积和.



【答案】4

【解析】连接 CE，设 $S_{\Delta CDE}=a$



$\because S_{\Delta CDE}:S_{\Delta BED}=CD:BD=1:2$

$\therefore S_{\Delta BED}=2S_{\Delta CDE}=2a$

$\because S_{\Delta ABE}:S_{\Delta BDE}=S_{\Delta AEC}:S_{\Delta DEC}=AE:ED=1:1$

$\therefore S_{\Delta AEC}=a$，$S_{\Delta ABE}=2a$

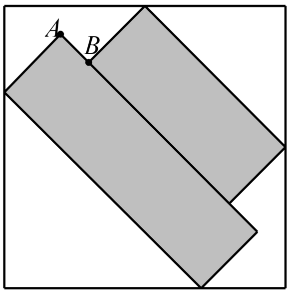
$\because AF:FC=S_{\Delta ABE}:S_{\Delta BEC}=(2a):(3a)=2:3$

$\therefore S_{\Delta AFE}=a\times\dfrac{2}{2+3}=\dfrac{2}{5}a$

$$\therefore S_{阴影}=\frac{\frac{2}{5}+2}{2+1+2+1}\times S_{\Delta ABC}=\frac{2}{5}\times10=4$$

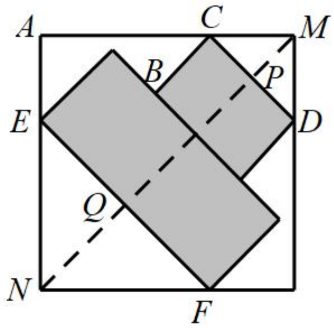
巅峰挑战

1. 题图是由一个正方形和两个长方形拼成的对称图形．已知阴影部分的周长为36，线段AB的长度为2，那么大正方形的面积是多少？

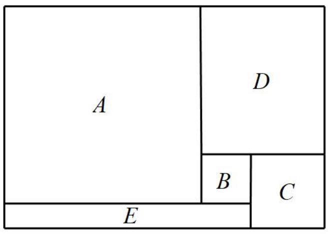


【答案】128

【解析】如图，MN是正方形的对角线，所在直线是整个图形的对称轴.$\triangle MCD$和$\triangle NEF$都是等腰直角三角形.在等腰三角形MCD中，$MP=CP$；在等腰三角形NEF中，$NQ=EQ$.图中，$PC+CB+BA+AE+EQ=36\div 2=18$，所以$MN=MP+PQ+QN=PC+\left(CB+AE\right)+EQ=18-AB=16$.图中大正方形的面积为$16^2\div 2=128$.



2. 如图，一个大长方形中放置了A、B、C三个大小不同的正方形，长方形D和E的周长之和为80厘米，正方形B的面积为60平方厘米.那么，大长方形的面积是多少平方厘米？



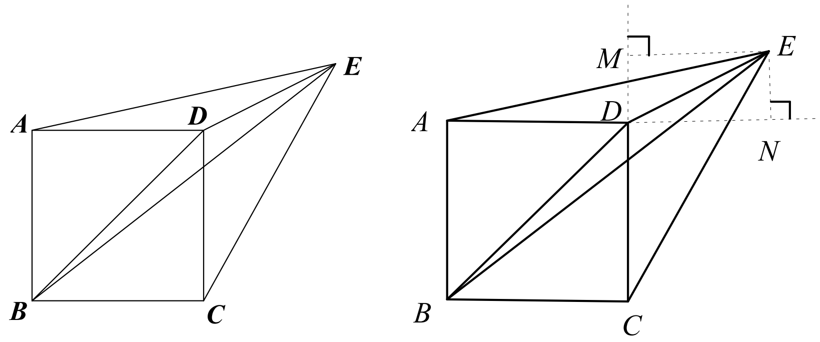
【答案】340.

【分析】设正方形A、B、C的边长分别为a、b、c，长方形的长为$a+b+c$，宽为$a+c-b$，而又知道长方形D和E的周长之和为80厘米，即半周长为40厘米，即$a+b+c+a+c-b=40$，即$a+c=20$，故大长方形面积为

$\left(a+b+c\right)\times\left(a+c-b\right)=\left(a+c\right)^2-b^2=20^2-60=340$(平方厘米).

登峰造极

1.如图，已知三角形 ADE，三角形 CDE 和正方形 $ABCD$ 的面积之比为 2:3:8，三角形 BDE 的面积是 4 平方厘米.四边形 $ABCE$ 的面积是多少平方厘米?



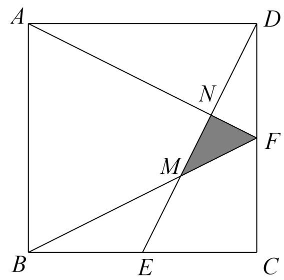
【答案】52.

【解析】由于三角形 ADE，三角形 CDE 面积比为 $2:3$，所以 $ME:EN=3:2$,设正方形的边长为4份，根据面积之比为 2：3：8，所以 $EN=2$ 份，$EM=3$ 份，则

$S_{\triangle BCE}=4\times(4+2)\div2=12$，$S_{\triangle ABE}=4\times(4+3)\div2=14$，$S_{四边形ABCE}=12+14=26$,则

$S_{\triangle BDE}=14-4\times4\div2-4\times2\div2=2$,而三角形 BDE 的面积是 4 平方厘米，所以四边形 $ABCE$ 的面积是 $4\div2\times26=52$（平方厘米）

2.如图所示，正方形 $ABCD$ 的面积为 1. E、F 分别是 BC 和 DF 的重点，DE 与 BF 交于 M 点，DE 与 AF 交于 N 点，那么阴影三角形 MFN 的面积为多少?



【解析】过 F 点做 $FG/\!/EC$

则，$\dfrac{FG}{EC}=\dfrac{DF}{DC}=\dfrac{1}{2}$

又 $BC=2EC$

$\therefore AD = 4FG, BE = 2FG$

$\therefore \frac{FG}{AD} = \frac{1}{4}, \frac{FG}{BE} = \frac{1}{2}$

$\because FG // AD // BC$

$\therefore \frac{FN}{AN} = \frac{FG}{AD} = \frac{1}{4}, \frac{FM}{BM} = \frac{FG}{BE} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{S_{\Delta FNM}}{S_{\Delta ABF}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

$\therefore S_{\Delta FNM} = \frac{1}{15} S_{\Delta ABF} = \frac{1}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$

笔记整理

第十三讲 分段计费问题

1. 中国移动手机本地通话收费标准有两种：全球通用户每月基本月租费 50 元，并且每分钟通话费是 0.4 元；神州行用户免月租费，每分钟通话费 0.6 元.
（1）如果王先生上个月本地通话时间为 a 分钟，请用字母表示用全球通的费用和用神州行的费用；
（2）当王先生每月本地通话时间为多少分钟时，两种收费标准所付费用相同？
（3）请你为王先生参谋，在本地他使用全球通合算，还是使用神州行合算？(用具体的数据来说明问题)
【解析】(1)全球通费用 $(50+0.4a)$，神州行费用 $0.6a$
(2)250 分钟
(3)当通话分钟数小于 250 分钟时，使用神州行划算，当通话分钟数大于 250 分钟时，使用全球通划算
2. 我国某城市煤气收费规定：每月用量在 8 立方米或 8 立方米以下一律收 8 元，用量超过 8 立方米的除交 8 元外，超过部分每立方米按一定费用交费．某饭店 1 月份煤气费是 88 元，2 月份煤气费是 40 元，又知道 2 月份煤气用量相当于 1 月份的 $\frac{1}{2}$，那么超过 8 立方米后，每立方米煤气应收多少元？
【解析】超过 8 立方米后，每立方米应收 2 元

3. 如下图表格是整存整取的利率表：

时间	三个月	半年	一年	二年	三年	五年
年利率	2.60%	2.80%	3.00%	3.75%	4.25%	4.75%

陈老师有 10000 元钱，她存入银行，整存两年后取出，到时本息一共多少钱？假设陈老师存一年后，将本息再存入，两年后陈老师有多少钱？哪种方式两年后得的钱多一些？
【解析】10750 元；10609 元；两年定期
4. 成都市电力局从 2016 年 1 月起进行居民峰谷用电试点，每天高峰时段用电每度 0.65 元(简称“峰电”价格)，其余时间用电每度 0.3 元(简称“谷电”价格)，目前不使用峰谷电的居民用电每度 0.55 元．小明家某月在使用峰谷电后付电费 108 元，经测算，比不使用峰谷电节约 13 元.
(1)小明家这个月共用了多少度电？
(2)小明家这个月峰电用了几度？谷电用了几度？
(3)这个月用去的峰电度数占总用电度数的几分之几？
【解析】(1) 220 度
(2)峰电：120 度，谷电：100 度
(3) $\frac{6}{11}$
5. 为创建“资源节约型社会”，某区对用电的收费标准规定如下（用电量均为整数度）：每月每户用电不超过 10 度的部分按每度 0.4 元收费，超过 10 度而不超过 20 度的部分按每度 0.9 元收费，超过 20 度的部分按每度 1.7 元收费.今年四月份，张叔叔家比李阿姨家多缴电费 5.3 元，李阿姨家比王奶奶家多缴 6.6 元.那么张叔叔、李阿姨、王奶奶三家四月份共缴电费多少元？
【解析】张叔叔、李阿姨、王奶奶三家四月份共缴电费 26.9 元.
6. 某城出租车的计价方式为：起步价是 3 千米 8 元，之后每增加 2 千米（不足 2 千米按 2

千米计算）增加 3 元。现从甲地到乙地乘出租车共支出车费 44 元；如果从甲地到乙地先步行 900 米，然后再乘出租车只要 41 元。那么从甲、乙两地的中点乘出租车到乙地需支付多少钱？

【解析】由第一个条件从甲地到乙地乘出租车共支出车费 44 元可以知道甲地到乙地一共 $25\sim27$ 千米，由第二个条件从甲地到乙地先步行 900 米，然后再乘出租车只要 41 元可以知道甲地到乙地一共 $23.9\sim25.9$ 千米。这样的话我们可以知道甲地到乙地一共 $25\sim25.9$ 千米，则从甲、乙两地的中点乘出租车到乙地一共为 $12.5\sim12.95$ 千米，这样的话一共需要支付 $8+3\times5=23$ 元。

7. 2011 年 9 月 1 日，我国开始实施新的个人所得税税率，调整前后的税率表如下所示：

调整前		调整后	
全月应纳税所得额	税率（%）	全月应纳税所得额	税率（%）
不超过 500 元的部分	5	不超过 1500 元的部分	3
超过 500 元至 2000 元部分	10	超过 1500 元至 4500 元部分	10
超过 2000 元 5000 元部分	15	超过 4500 元 9000 元部分	20
超过 5000 元至 20000 元部分	20	超过 9000 元至 35000 元部分	25
超过 20000 元至 40000 元部分	25	超过 35000 元至 55000 元部分	30
……		……	
全月应纳税所得额是指从月收入中减少 2000 元后的余额		全月应纳税所得额是指从月收入中减少 3500 元后的余额	

（1） 聂大胖月收入 10000 元，则在调整后，可比调整前少上缴所得税多少元？

（2） 邹大胖 2011 月 10 月缴纳了 1165 元个人所得税，那么他当月的收入是多少元？

【解析】（1）480 元；（2）12100 元

巅峰挑战

1. 某电器商场开展促销活动，每次消费超过 1500 元不足 3000 元者（含 1500 元）优惠 5%，超过 3000 元者（含 3000 元）优惠 10%。甲、乙、丙三个人各买了一件电器，如果甲、乙一起结算，比分开结算便宜 130 元；如果甲、丙一起结算，比分开结算便宜 260 元；如果三人一起结算，比三人分开结算便宜 405 元。请问：三人购买的电器价格分别是多少？

【解析】甲+丙=260，260÷10%=2600＜3000,260÷5%=5200＞3000，所以，丙的价格在 1500 至 3000 之间。甲+乙=2600，2 甲+丙=5200，2 甲+2 乙+丙=8100

解得：甲=1150，乙=1450，丙=2900

2、北京九章书店对顾客实行一项优惠措施：每次买书 200 元至 499.99 元者（包含 200 元）优惠 5%。每次买书 500 元以上者（包含 500 元）优惠 10%。某顾客到书店买了三次书。如果第一次与第二次合并一起买，比分开买便宜 13.5 元；如果三次合并一起买比三次分开买便宜 39.4 元。已经知道第一次的书价是第三次书价的 $\frac{5}{8}$。问：这位顾客第二次买了多少钱的书？

【解析】设第三次的书价为 x 元，则第一次的书价为 $\frac{5}{8}x$ 元。

由已知我们知道 $13.5\div5\%=270$ 元，$13.5\div10\%=135$ 元，所以第一次第二次合并一起买只能优惠 5%，也就是说合买的总价属于 200 元至 499.99 元这个范围之内，且第一次和第二次合买的总价为 270 元，那么三次合买的总价为 $\left(270+x\right)$ 元。下面分类讨论：

①若 $x<200$，那么 $x+270<500$，可列方程 $\left(270+x\right)\times5\%=39.4$，解得 $x=518$，不符合条件；

②若 $200\le x<500$，那么必有 $x+270>500$（不然的话就与第一种情况相同了），可列方程 $\left(x+270\right)\times10\%-x\times5\%=39.4$，解得 $x=248$，符合条件。

那么顾客第二次购买书的价钱为 $270-\frac{5}{8}\times248=115$ 元。

登峰造极

1、团体游园购买公园门票的票价如图所示。

购票人数	50 人以下	50～100 人	100 人以上
每人票价	12 元	10 元	8 元

今有甲、乙两个旅游团，如果分别购票，两团总计应付门票费 1142 元。如果合在一起作为一个团体购票，应付门票费 864 元。问：这个旅游团各有多少人？

【解析】设人数为 x，总费用为 y，则

$$y=\begin{cases}12x, & x<50\\10x, & 50\le x\le 100\\8x, & x>100\end{cases}$$

设甲乙两个旅游团各有 a,b 人，不妨设 $a\ge b$，显然 $a+b>100$，分下列三种情况讨论：

（1）当 $50\le a\le 100, b<50$ 时：

$$\begin{cases}10a+12b=1142\\8(a+b)=864\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=77\\b=31\end{cases}$$，这组解符合题意；

（2）当 $50\le a\le 100, 50\le b\le 100$ 时：$10a+10b=1142$，此式在 a,b 均为整数时是不可能成立的，所以这种情况排除；

（3）当 $a>100, 50\le b\le 100$ 时：

$$\begin{cases}8a+10b=1142\\8(a+b)=864\end{cases}\Rightarrow b=139 \text{ 与 } b\le 100 \text{ 矛盾}$$

综上，两个旅游团各有 77 人和 31 人

笔记整理

第十四讲 经济问题综合

知识点拨

一、折扣问题

1、折扣的概念：商店降价出售商品，叫做打折销售，简称“打折”，几折就表示十分之几，也就是百分之几十．如“九折”代表原价的 90%，“八五折”代表原价的 85%．

2、基本公式：$现价=原价\times折扣率$．

二、利润问题

1、$售价=成本+利润$

2、利润率的概念

（1）基本公式：$利润率=\dfrac{利润}{成本}\times100\%=\dfrac{售价-成本}{成本}\times100\%$；

（2）变形：$售价=成本\times$（1+利润率）；$成本=售价\div$（1+利润率）．

三、经济问题的一般题型

1、直接与利润相关的问题：

直接与利润相关的问题，无非是找成本与销售价格的差价．

2、与利润无直接联系，但是涉及价格变动的问题．

四、解题主要方法

1、抓不变量（一般情况下成本是不变量）；

2、列方程解应用题．

例题精讲

1. 一件大衣，如果以 180 元的价格卖出，就要亏损 20%，如果想要获得 20%的利润，就应该卖多少元？

【解析】进价为 $225\times(1+20\%)=270$元．

2. 某商品按 20%的利润定价，然后按 8.8 折卖出，实际获得利润 84 元.该商品的成本是多少元？

【解析】

设成本为x元,则有$(1+20\%)\times x\times88\%-x=84$,解得$x=1500$.则该商品的成本是1500元.

3. 一件衣服，第一天按原价出售，没人来买，第二天降价 20%出售，仍无人问津，第三天再降价 24 元，终于售出．已知售出价格恰是原价的 56%，这件衣服还盈利 20 元，那么衣服的成本价多少钱？

【解析】36 元．

4. 出版社出版某种书，今年每册的成本比去年增加 10%，但是仍保持原售价，因此每本盈利下降了 40%，但今年的发行册数比去年增加 80%，那么今年发行这种书获得的总盈利比去年增加的百分数是多少？

【解析】假设去年每册的盈利为 1，那么今年每册的盈利为： 1-40%=60%，

但是今年的发行册数为 1+80%，所以今年的总盈利为：60%×（1+80%）=108%，

所以今年发行这种书获得的总盈利比去年增加：108%-100%=8%.

5. 某手机按定价的 80%（八折）出售，仍能获得 20%的利润，定价时期望的利润百分比是多少？

【解析】设定价为“1”,卖价是定价的 80%，就是 0.8.因为获得 20%的利润，卖价是成本×(1+20%),所以成本是 0.8÷1.2=2/3,定价的期望利润百分比为 $\left(1-\frac{2}{3}\right)\div\frac{2}{3}\times100\%=50\%$.

6. 有一种由 3 份甲种糖和 2 份乙种糖配成的什锦糖,比由 2 份甲种糖和 3 份乙种糖配成的什锦糖每千克贵 5.28 元，那么每千克甲种糖比每千克乙种糖要贵多少元？

【解析】设每千克甲种糖价格为 x 元，每千克乙种糖价格为 y 元，则：

$$\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y\right)-\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y\right)=5.28$$

$$\frac{1}{5}\left(x-y\right)=5.28$$

$$x-y=26.4$$

7. 大胖现在有一笔存款，他把每月支出后剩余的钱都存入银行.已知大胖每月的收入相同，如果他每月支出 1000 元，则一年半之后大胖有存款 8000 元（不计利息）；如果他每月支出 800 元，则两年后他有存款 12800 元（不计利息）.

（1）大胖每月的收入是多少元？

（2）大胖现在的存款是多少元？

【解析】设每月收入为 x 元，现在存款为 y 元，则有

$$\begin{cases}y+\left(x-1000\right)\times18=8000\\y+\left(x-800\right)\times24=12800\end{cases}$$

$$\begin{cases}y+18x=26000\\y+24x=32000\end{cases}$$

$$x=1000$$

$$y=8000$$

8. 双休日，甲商场以“打九折”的措施优惠，乙商场以“满 100 送 10 元购物券”的形式促销，妈妈打算花掉 500 元，妈妈在哪个商场购物划算一些？

【解析】“打算花掉 500 元”，即看实际使用 500 元能购买多少价值的商品．甲商场能购买价值为 $500\div90\%\approx555.6$ 元的商品；乙商场能购买价值 550 元的商品，所以在甲商场更划算.

9. 请你当参谋．学校要买 50 个足球，甲店：买 10 个免费送 2 个，不满 10 个不赠送；乙店：打八折销售．两个店的足球单价都是 25 元，你认为到哪个店买比较合算？为什么？

【解析】甲店相当于每 12 个足球卖 25×10=250 元，因此 50 个足球相当于买 4 组 12 个足球再单独买两个足球，因此需要 $250\times4+25\times2=1050$ 元，乙店 $50\times25\times0.8=1000$ 元，因此乙店合算.

10. 新华书店一天内销售两种书籍，甲种书籍共卖出 1560 元，为了发展农业，乙种书籍“送

下乡"共卖得 1350 元，若按甲、乙两种书籍的成本分别计算，甲种书盈利 25%，乙种书亏本 10%，试问该书店这一天共盈利（或亏本）多少元？

【解析】总成本：$1560\div(1+25\%)+1350\div(1-10\%)=2748$ 元；

总售价： $1560+1350=2910$ 元；盈利： $2910-2748=162$ 元.

11. 某同学下课之后肚子饿了，在便利店花了 10 块钱买了一瓶可乐和一个鸡腿，当使用会员卡时（会员享受八折优惠），10 块钱恰好买两瓶可乐和一个鸡腿，如果此时物价突然上涨 33%，这位同学用这 10 块钱能否购够买一个鸡腿？

【解析】设可乐售价为 x 元,鸡腿售价为 y 元，由题意可得：$x+y=10,(2x+y)\times 0.8=10$ 得：$x=2.5, y=7.5$，物价上涨 33%，那么上涨后鸡腿售价为 $7.5\times(100\%+33\%)=9.975$ 元，所以 10 元能买一个鸡腿.

巅峰挑战

1. 某商场出售一批服装，每件售价 60 元，卖出 $\frac{3}{8}$ 时，商场收回全部成本后还获利 160 元，剩下的服装每件降价 $\frac{1}{10}$ 全部卖出，又卖出 4860 元，这批服装的成本是每件多少元？

【解析】设每件服装的成本为 x 元，一共有 y 件，则：

$$\left(1-\frac{3}{8}y\right)\times 60\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=4860$$

$$y=144$$

$$\frac{3}{8}\times 144\times 60=144x+160$$

$$x=21\frac{7}{18}$$

2. 某书店出售某作家的一本小说，每售出一本可以获得 18 元利润，售出一部分后刚好遇上书店周年庆，每本减价 10 元出售，全部售完。已知减价出售的小说本数是原价出售小说的 $\frac{2}{3}$，书店售完这种小说共获利润 2870 元.求书店共售出这种小说多少本？

【解析】法一:减价出售的本数是原价出售的小说本数的 $\frac{2}{3}$，所以假设总共有 a 本小说，则原价出售的为 $\frac{3}{5}a$，由题意可得：$\frac{3}{5}a\times 18+\frac{2}{5}a\times 8=2870\Rightarrow a=205$

法二：我们知道原价和减价后的比例为 3:2，所以可求平均获利多少，即（3×18+2×8）÷5=14 元，所以 2870÷14=205 本.

登峰造极

1、某商场国庆节进行促销活动，商场对顾客实行优惠，若一次购物不超过 200 元，则不予优惠；若一次购物超过 200 元，但不超过 500 元，则标准价给予九折优惠；若一次购物超过 500 元，其中 500 元按上述九折优惠，超过 500 元的部分按八折优惠．某人两次购物分别付款 160 元和 450 元，如果合起来一次购买同样多的商品，他可以多节约多少元？

【解析】$450 \div 0.9 = 500$ 元，$500 + 160 = 660$ 元，合起来一共买 660 元商品，应该付款 $500 \times 0.9 + 160 \times 0.8 = 578$ 元，所以他可以节约 $(450 + 160) - 578 = 32$ 元．

2、国家出台了商品住房流通的相关政策，并已开始试行：缴纳契税 4%（即购买时缴纳房屋价格的 4%）；缴纳营业税 5%（即所购房五年以内出售须缴纳出售房屋价格的 5%）；缴纳个人所得税 20%（即购房五年以内出售须缴纳出售房屋增值部分的 20%）.张教授家两年前花 18 万元的价格购买一套房，现已卖掉，按规定缴纳个人所得税 1.4 万元.张教授家准备用售房款来购买价格为 35 万元的新房一套，不足部分向银行贷款，需贷款多少万元？

【解析】先求出增值部分：1.4÷20%=7（万元）；

房屋卖价：18+7=25（万元）；

卖房营业税：25×5%=1.25（万元）；

卖房实际收入：25-（1.4+1.25）=22.35（万元）；

买新房契税：35×4%=1.4（万元）；

买房需要的款额：35+1.4=36.4（万元）；

不足部分：36.4-22.35=14.05（万元）；

所以需贷款 14.05 万元.

笔记整理

○计算综合（二）课后练习详解

1. 计算：$36\frac{1}{6}\times35\frac{1}{7}-14.6\div0.02=$________.

【解析】原式$=\frac{217}{6}\times\frac{246}{7}-730$

$=31\times41-730$

$=541$.

【答案】541

2. 计算：$\left[13.5\div\left(11+\frac{2\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{10}}\right)-1\div7\right]\times1\frac{1}{6}=$________.

【解析】原式$=\left[13.5\div\left(11+\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{10}}\right)-\frac{1}{7}\right]\times\frac{7}{6}$

$=\left[13.5\div\left(11+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{7}\right]\times\frac{7}{6}$

$=\left(1-\frac{1}{7}\right)\times\frac{7}{6}=1$.

【答案】1

3. 有一个数，它的48%比18的$\frac{1}{3}$多2，这个数是________.

【解析】$\left(18\times\frac{1}{3}+2\right)\div48\%=8\div48\%=\frac{50}{3}$

【答案】$\frac{50}{3}$

4. 计算：$\left[19.5-\left(1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\div\frac{1}{16}\right)\right]\times\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}\times\left(1.27-1\frac{27}{100}\right)+1\right]+\frac{3}{2}\right\}+0.0014=$________.

【解析】原式$=\left(19.5-1\frac{1}{2}-4\right)\times\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times0+1\right)+\frac{3}{2}\right]+0.0014$

$=14\times\frac{1}{2}\times2+0.0014$

$=14.0014$.

【答案】14.0014

5. 计算：$18\times\frac{3}{7}+0.65\times\frac{8}{13}-\frac{2}{7}\times18+\frac{5}{13}\times0.65=$________.

【解析】原式$=18\times\frac{1}{7}\times(3-2)+0.65\times\left(\frac{8}{13}+\frac{5}{13}\right)$

$=\frac{18}{7}+\frac{13}{20}=\frac{451}{140}=3\frac{31}{140}$.

【答案】$3\frac{31}{140}$

6. 计算：$0.5\times\frac{6}{29}\div0.15\times7.25=$________.

【解析】原式$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{29}\div\frac{3}{20}\times\frac{29}{4}=\frac{3}{29}\times\frac{20}{3}\times\frac{29}{4}=5$.

【答案】5

7. 计算：$\frac{7}{9}\times\left(4.85\div\frac{5}{18}-3.6+6.15\times3\frac{3}{5}\right)=$________.

【解析】原式$=\frac{7}{9}\times\left(4.85\times\frac{18}{5}+6.15\times\frac{18}{5}\right)-\frac{7}{9}\times3.6$

$=\frac{7}{9}\times\frac{18}{5}\times(4.85+6.15)-2.8$

$=2.8\times11-2.8=2.8\times10=28$

【答案】28

8. 计算$\left[1.9+190\%\times\left(4\frac{4}{5}-3.8\right)\right]\div\left(2\frac{9}{10}-1.9\right)$

【解析】原式$=\left[1.9+1.9\times(4.8-3.8)\right]\div(2.9-1.9)=(1.9+1.9)\div1=3.8$

【答案】3.8

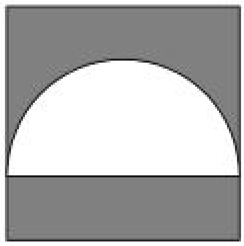
9. 要使算式$2\frac{1}{4}-(0.7-\square)\times\frac{5}{6}=2\frac{1}{7}$成立，方框内应填入的数是________.

【解析】方框内应填入的数是：$0.7-\left(2\frac{1}{4}-2\frac{1}{7}\right)\div\frac{5}{6}=\frac{7}{10}-\frac{3}{28}\times\frac{6}{5}=\frac{4}{7}$.

【答案】$\frac{4}{7}$.

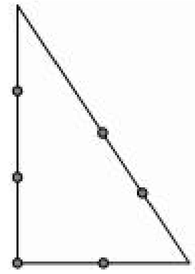
从反面考虑课后练习详解

1. 如下图，边长为 4 的正方形中放入一个半圆，则阴影部分的面积为________．（圆周率取 3.14）



【解析】$4\times4-\frac{1}{2}\times3.14\times2^2=9.72$

2. 如下图，直角三角形的三条边上有 6 个点，以这 6 个点为顶点可以画出________个三角形．



【解析】$C_6^3-1=19$ 个

3. 从 8 个同学中选出 2 人做游戏，甲，乙，丙三人至少有一人被选中的方法共有________种．

【解析】$C_8^2-C_5^2=18$ 种．

4. 一次测验共有 15 道题，四位同学答对的题目分别为 11，12，13，14 道．则他们四人都答对的题目至少有________道．

【解析】四人共错了 $4+3+2+1=10$ 道．因此都答对的至少为 $15-10=5$ 道

5. 1 到 1999 的自然数中，有多少个与 5678 相加时，至少发生一次进位?

【解析】与 5678 相加不发生进位的数的特征：个位数字为 0 和 1；十位数字为 0 至 2；百位数字为 0 至 3，千位数字为 0 和 1．剔除全为 0 的情况，共有 $2\times3\times4\times2-1=47$ 个．则至少发生一次进位的有 $1999-47=1952$ 个．

6. 由 0，1，2，3，4，5 组成的没有重复数字的六位数，百位不是 2 的奇数有________个．

【解析】采用排除法，先求出由 0，1，2，3，4，5 各用一次组成的奇六位数有多少个，再减去其中百位为 2 的数即为所求．

由 0，1，2，3，4，5 各用一次组成的奇六位数，个位可以为 1，3 或 5，有 3 种选择：个位确定后首位由于不能为 0，有 4 种选择：其它四个数位分别有 4，3，2，1 种选择．根据乘法原理，共有 $3\times4\times4\times3\times2\times1=288$ 个．其中百位为 2 的数，个位可以为 1，3 或 5，有 3 种选择：个位确定后首位由于不能为 0，2，有 3 种选择：剩下的 3 个数位分别

有 3，2，1 种选择．根据乘法原理，其中百位为 2 的数有 $3\times3\times3\times2\times1=54$ 个．所以百位不是 2 的奇数有 $288-54=234$ 个．

7. 请问至少出现一个数码 3，并且是 3 的倍数的五位数共有多少个?

【解析】五位数共有 90000 个，其中 3 的倍数有 30000 个．采用排除法，首先考虑有多少个五位数是 3 的倍数但不含有数码 3．

首位数码有 8 种选择，第二、三、四位数码都有 9 种选择．当前四位的数码确定后，如果它们的和除以余数为 0，则第五位数码可以为 0、6、9；如果余数为 1，则第五位数码可以为 2、5、8；如果余数为 2，则第五位数码可以为 1、4、7．可见只要前四位数码确定，第五位数码都有 3 种选择，所以五位数中是 3 的倍数但不含有数码 3 的数共有 $8\times9\times9\times9\times3=17496$ 个．所以满足条件的五位数共有 $30000-17496=12504$ 个．

8. 100 个人参加测试，要求回答五道试题，并且规定凡答对 3 题或 3 题以上的为测试合格，测试结果是：答对第一题的有 81 人，答对第二题的有 91 人，答对第三题的有 85 人，答对第四题的有 79 人，答对第五题的有 74 人，那么至少有多少人合格?

【解析】要求“至少有多少人合格?”如果从正面想，答对 3 题或 3 题以上的为测试合格，但是五道题中互相交错，关系很复杂，不太好考虑，如果从反面考虑，想“最多有多少人不合格?”这道题就迎刃而解了．100 人共答错 500－（81+91+85+79+74）=90（题），因为答对 3 题或 3 题以上的为测试合格，那么答错 3 题或 3 题以上的为测试不合格，所以最多有 90÷3=30（人）不合格，也就是至少有 100－30=70（人）合格．

公式类行程综合（1）课后练习

1. 船往返于相距180千米的两港之间，顺水而下需用10小时，逆水而上需用15小时.由于暴雨后水速增加，该船顺水而行只需9小时，那么逆水而行需要几小时?

【解析】本题中船在顺水、逆水、静水中的速度以及水流的速度都可以求出．但是由于暴雨的影响，水速发生变化，要求船逆水而行要几小时，必须要先求出水速增加后的逆水速度.

船在静水中的速度是：（180÷10+180÷15）÷2=15（千米/小时）.

暴雨前水流的速度是：（180÷10-180÷15）÷2=3（千米/小时）.

暴雨后水流的速度是：180÷9-15=5（千米/小时）.

暴雨后船逆水而上需用的时间为：180÷（15-5）=18（小时）.

【答案】18 小时

2. 某河有相距45千米的上下两港，每天定时有甲乙两船速相同的客轮分别从两港同时出发相向而行，这天甲船从上港出发掉下一物，此物浮于水面顺水漂下，4分钟后与甲船相距1千米，预计乙船出发后几小时可与此物相遇.

【解析】物体漂流的速度与水流速度相同，所以甲船与物体的速度差即为甲船本身的船速（水速作用抵消），甲的船速为1÷1/15=15千米/小时；乙船与物体是个相遇问题，速度和正好为乙本身的船速，所以相遇时间为：45÷15=3小时

【答案】3 小时

3. 小志与小刚两个孩在电梯上的行走速度分别为每秒2个台阶和每秒3个台阶，电梯运行后，他俩沿电梯运行方向的相同方向从一楼走上二楼，分别用时28秒和20秒，那么如果小志攀登静止的电梯需要用时多少秒?

【解析】小志和小刚顺向攀登运行的电梯分别都攀登了$28\times2=56$级和$20\times3=60$级，小刚比小志多走了$60-56=4$级，这4级台阶实际上是小志多走的8秒钟内，电梯“缩”进去的，因此电梯的运行速度为每秒半个台阶，那么在小刚登梯的20秒内，电梯也“缩”了10级，所以电梯所能见到的部分是60+10=70级，所以，小志攀登静止的电梯分别需要用时70÷2=35秒.

【答案】35 秒

4. 某人以匀速行走在一条公路上，公路的前后两端每隔相同的时间发一辆公共汽车.他发现每隔15分钟有一辆公共汽车追上他；每隔10分钟有一辆公共汽车迎面驶来擦身而过．问公共汽车每隔多少分钟发一辆车?

【解析】方法一：设两车间距离为[10,15]=30 米．则有 V 车-V 人=30÷15=2V 车+V 人=30÷10=3．所以 V 车=2.5．

时间间隔即为 30÷2．5=12（分）

方法二：假设车与人并排开始走，车只有一个方向的．则人向前走 30 分钟后，再往回走 30 分钟，即回到原点．则 60 分内，共有 30÷15+30÷10=5 辆车从原点经过．所以发车间隔为 60÷5=12（分）

方法三：设车速为 V 车，人速为 V 人，车间距离为 L

L=(V 人+V 车)×10，L=(V 车-V 人)×15 得 V 车=5V 人

t=$\frac{L}{V_{车}}=\frac{(V_{人}+V_{车})\times 10}{V_{车}}=\frac{(V_{人}+5V_{人})\times 10}{5V_{人}}=12$ （分）

5. 某人沿电车线路行走，每 12 分钟有一辆电车从后面追上，每 4 分钟有一辆电车迎面开来．假设两个起点站的发车间隔是相同的，求这个发车间隔．

【解析】设电车的速度为 a，行人的速度为 b，因为每辆电车之间的距离为定值，设为 l．由电车能在 12 分钟追上行人 l 的距离知，$\frac{1}{a-b}=12$；由电车能在 4 分钟能与行人共同走过 l 的距离知，$\frac{l}{a+b}=4$,所以有 l=12(a-b)=4(a+b)，有 a=2b，即电车的速度是行人步行速度的 2 倍．那么 l=4(a+b)=6a，则发车间隔上：$\frac{l}{a}=\frac{6a}{a}=6$．即发车间隔为 6 分钟．

(法 2)假设有个人向前走 12 分钟又回头走 12 分钟，那么在这 24 分钟内，他向前走时有 1 辆车追上他，他回头走时又迎面遇上$12\div 4=3$ 辆电车，所以在这 24 分钟内他共遇上 4 辆相同方向开过来的电车，所以电车的发车间隔为 $24\div 4=6$ 分钟．

6. 在商场内，小明从正在向上移动的自动扶梯顶部向下走 120 级台阶后到达底部，然后从底部向上走 90 级台阶回到顶部．自动扶梯从底部到顶部的台阶数不变，假设小明单位时间内下台阶数是他上台阶数的 2 倍．则该自动扶梯从底部到顶部的台阶数为多少?

【解析】解法一：

设小明上行的速度为 x，则下行的速度为 2x，台阶的速度为 y，那么下去的时间为 120/2x=60/x,上去的时间为 90/x，台阶共有 120-60y/x=90+90y/x 级，可得 y/x=1/5，由此可得台阶共 108 级．

解法二：

设小明向下走 120 级台阶时自动扶梯向上移动了 x 级．向下走 120 级的时间相当于向上走 120÷2=60 级的时间，即向上走 60 级的时间自动扶梯移动了 x 级，那么向上走 90 级的时间自动扶梯移动了 90÷60x=1．5x 级．利用自动扶梯从底部到顶部的台阶级数列方程为：120-x=90+1．5x，解得 x=12,120-x=120-12=108．所以，两层楼自动扶梯从低到顶的级数为 108．

7. 甲、乙两地是电车始发站，每隔一定时间两地同时各发出一辆电车，小张和小王分别骑车从甲、乙两地出发，相向而行．每辆电车都隔 6 分钟遇到迎面开来的一辆电车；小张每隔 8 分钟遇到迎面开来的一辆电车；小王每隔 9 分钟遇到迎面开来的一辆电车．已知电车行驶全程是 45 分钟，那么小张与小王在途中相遇时他们已行走了________分钟．

【解析】由题意可知，两辆电车之间的距离

＝电车行 12 分钟的路程

＝电车行 8 分钟的路程＋小张行 8 分钟的路程

＝电车行 9 分钟的路程＋小王行 9 分钟的路程

由此可得，小张速度是电车速度的 $\frac{12-8}{8}=\frac{1}{2}$，小王速度是电车速度的 $\frac{12-9}{9}=\frac{1}{3}$，小张与小王的速度和是电车速度的 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，所以他们合走完全程所用的时间为电车行驶全程所用时间的 $\frac{6}{5}$，即 $45\times\frac{6}{5}=54$ 分钟，所以小张与小王在途中相遇时他们已行走了 54 分钟．

第四讲 公式类行程综合（2）课后练习

1. 一部动画片放映的时间不足1时，小明发现结束时手表上时针、分针的位置正好与开始时时针、分针的位置交换了一下．这部动画片放映了多长时间?

【解析】根据题意可知，时针恰好走到分针的位置，分针恰好走到时针的位置它们一共走了一圈，即$360\div(6+0.5)=55\frac{5}{13}$（分）．

2. 小强家有一个闹钟，每时比标准时间快3分．有一天晚上10点整，小强对准了闹钟，他想第二天早晨6∶00起床，他应该将闹钟的铃定在几点几分?

【解析】快钟与标准钟一小时走的格数比为63：60，小强希望标准时间过8个小时即480分钟起床，所以快钟应该走$480\div60\times63$=504分钟，即8小时24分钟，所以应该将闹钟定在6：24

3. 有一个时钟，它每小时慢25秒，今年3月21日中午十二点它的指示正确．请问：这个时钟下一次指示正确的时间是几月几日几点钟?

【解析】当这个时钟慢12个小时的时候，它又指示准确的时间，慢12个小时需

$\frac{60\times60\times12}{25}$＝12×12×12(小时)

相当于：$\frac{12\times12\times12}{24}$＝72(天)

注意3月份有31天，4月份有30天，5月份有31天，到6月1日中午，恰好是72天

4. 唐老鸭在下午6点多开了一个会，刚开会时看了一下手表，发现那时手表的分针和时针垂直．下午7点之前会议就结束了，散会时唐老鸭又看了一下手表，发现分针与时针仍然垂直，那么这个小组会共开了长时间?

【解析】两针从开始第一次垂直到第二次垂直，分针追上时针6格．6÷（12-1）=$\frac{6}{11}$（小时）

5. 钟敏家有一个闹钟，每时比标准时间快2分．星期天上午9点整，钟敏对准了闹钟，然后定上铃，想让闹钟在11点半闹铃，提醒她帮助妈妈做饭．钟敏应当将闹钟的铃定在几点几分上?

【解析】闹钟与标准时间的速度比是62:60=31:30，11点半与9点相差150分，根据十字交叉法，闹钟走了150×31÷30=155(分)，所以闹钟的铃应当定在11点35分上．

6. 一列火车通过一座长430米的大桥用了30秒，它通过一条长2180米长的隧道时，速度提高了一倍，结果只用了50秒，这列火车长________米．

【解析】如果通过隧道时速度没有提高，那么将需要$50\times2=100$秒，所以火车原来的速度为$(2180-430)\div(100-30)=25$(米/秒)．火车的长度为$25\times30-430=320$(米)．

7. 一列快车和一列慢车相向而行，快车的车长是280米，慢车的车长是385米，坐在快车上的人看见慢车驶过的时间是11秒，那么坐在慢车上的人看见块车驶过的时间是多少秒?

【解析】这个过程是火车错车，对于坐在快车上的人来讲，相当于他以快车的速度和慢车的车尾相遇，相遇路程和是慢车长;对于坐在慢车上的人来讲，相当于他以慢车的速度和快车的车尾相遇，相遇的路程变成了快车的长,相当于是同时进行的两个相遇过程，不同点在于路程和一个是慢车长，一个是快车长，相同点在于速度和都是快车速度加上慢车的速度．所以可先求出两车的速度和$385\div11=35$（米/秒），然后再求另一过程的相遇时间$280\div35=8$（秒）．

8. 红星小学组织学生排成队步行去郊游，每分步行60米，队尾的王老师以每分行150米的速度赶到排头，然后立即返回队尾，共用10分．求队伍的长度．

【解析】630米．设队伍长为x米．从队尾到排头是追及问题，需$\frac{x}{150-60}$分；从排头返回队尾是相遇问题，需$\frac{x}{150+60}$分．由$\frac{x}{150-60}+\frac{x}{150+60}=10$，解得$x=630$米

9. 两列火车相向而行，甲车每小时行36千米，乙车每小时行54千米．两车错车时，甲车上一乘客发现：从乙车车头经过他的车窗时开始到乙车车尾经过他的车窗共用了14秒，乙车上也有一乘客发现：从甲车车头经过他的车窗时开始到甲车车尾经过他的车窗共用了11秒，那么站在铁路旁的的丙，看到两列火车从车头相齐到车尾相离时共用多少时间?

【解析】首先统一单位：甲车的速度是每秒钟$36000\div3600=10$(米)，乙车的速度是每秒钟$54000\div3600=15$(米)．此题中甲车上的乘客实际上是以甲车的速度在和乙车相遇．更具体的说是和乙车的车尾相遇．路程和就是乙车的车长．这样理解后其实就是一个简单的相遇问题．$(10+15)\times14=350$(米)，所以乙车的车长为350米．同理甲车车长为$(10+15)\times11=275$米，所以两列火车的错车时间为$(350+275)\div(10+15)=25$秒．

第五讲 公式类行程综合（3）课后练习

1. 龟兔赛跑，同时出发，全程6990米，龟每分钟爬30米，兔每分钟跑330米，兔跑了10分钟就停下来睡了215分钟，醒来后立即以原速往前跑，问龟和兔谁先到达终点?先到的比后到的快多少米?

【解析】先算出兔子跑了$330\times 10=3300$（米），乌龟跑了$30\times (215+10)=6750$（米），此时乌龟只余下$6990-6750=240$（米），乌龟还需要$240\div 30=8$（分钟）到达终点，兔子在这段时间内跑了$8\times 330=2640$（米），所以兔子一共跑$3300+2640=5940$（米）．所以乌龟先到，快了$6990-5940=1050$（米）．

2. 小红上山时每走30分钟休息10分钟，下山时每走30分钟休息5分钟．已知小红下山的速度是上山速度的2倍，如果上山用了3时50分，那么下山用了多少时间?

【解析】上山用了3时50分，即60×3+50=230（分），由230÷（30+10）=5……30，得到上山休息了5次，走了230-10×5=180（分）．因为下山的速度是上山的2倍，所以下山走了180÷2=90（分）．由90÷30=3知，下山途中休息了2次，所以下山共用90+5×2=100（分）=1时40分.

3. 甲、乙两地铁路线长1000公里，列车从甲行驶到乙的途中停6站（不包括甲、乙），在每站停车5分钟，不计在甲乙两站的停车时间，行驶全程共用11.5小时．火车提速10%后，如果停靠车站及停车时间不变，行驶全程共用多少小时?

【解析】6站，共停5×6=30分钟=0.5小时，

原来速度为$1000\div(11.5-0.5)=\dfrac{1000}{11}$千米/小时

现在速度为$\dfrac{1000}{11}\times(1+10\%)=100$千米/小时

行驶全程需要1000÷100=10小时

加上停止的0.5小时，行驶全程共用10.5小时

4. 张工程师每天早上8点准时被司机从家接到厂里．一天，张工程师早上7点就出了门，开始步行去厂里，在路上遇到了接他的汽车，于是，他就上车行完了剩下的路程，到厂时提前20分钟．这天，张工程师还是早上7点出门，但15分钟后他发现有东西没有带，于是回家去取，再出门后在路上遇到了接他的汽车，那么这次他比平常要提前________分钟到厂．

【解析】第一次提前20分钟是因为张工程师自己走了一段路，从而导致汽车不需要走那段路的来回，所以汽车开那段路的来回应该是20分钟，走一个单程是10分钟，而汽车每天8点到张工程师家里，所以那天早上汽车是7点50接到工程师的，张工程师走了50分钟，这段路如果是汽车开需要10分钟，所以汽车速度是张工程师步行速度的5倍，第二次，实际上相当于张工程师提前半小时出发，时间是遇到汽车之后的5倍，则张工程师走了25分钟时遇到司机，此时提前$(30-25)\times 2=10$（分钟）．

5. A、B两人同时自甲地出发去乙地，A、B步行的速度分别为100米/分、120米/分，两人骑车的速度都是200米/分，A先骑车到途中某地下车把车放下，立即步行前进；B走到车处，立即骑车前进，当超过A一段路程后，把车放下，立即步行前进，两人如此继续交替用车，最后两人同时到达乙地，那么A从甲地到乙地的平均速度是________米/分．

【解析】在整个行程中，车是从甲地到乙地，恰好过了一个全程，所以A、B两人步行的路程合起来也恰好是一个全程．而A步行的路程加上A骑车的路程也是一个全程，所以A步行的路程等于B骑车的路程，A骑车的路程等于B步行的路程.

设A步行x米，骑车y米，那么B步行y米，骑车x米．由于两人同时到达，故所用时间相同，得：$\dfrac{x}{100}+\dfrac{y}{200}=\dfrac{y}{120}+\dfrac{x}{200}$，可得$x:y=2:3$．

不妨设A步行了200米，那么骑车的路程为300米，所以A从甲地到乙地的平均速度是

$$(200+300)\div\left(\frac{200}{100}+\frac{300}{200}\right)=\frac{1000}{7}\text{(米/分)}.$$

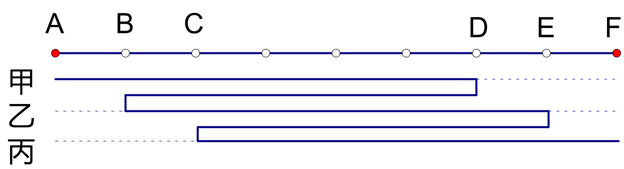
6. 骑车人沿公共汽车路线前进，他每分行 300 米，当他离始发站 3000 米时，一辆公共汽车从始发站出发，公共汽车每分行 700 米，并且每行 3 分到达一站停车 1 分．问：公共汽车多长时间追上骑车人?

【解析】11 分．提示：列表计算：

经过时间／分	0	4	8	9	10	11
汽车距始发站距离／米	0	2100	4200	4900	5600	6300
骑车人距始发站距离／米	3000	4200	5400	5700	6000	6300

7. 甲、乙、丙三个班的学生一起去郊外活动，他们租了一辆大巴，但大巴只够一个班的学生坐，于是他们计划先让甲班的学生步行，乙丙两班的学生步行，甲班学生搭乘大巴一段路后，下车步行，然后大巴车回头去接乙班学生，并追赶上步行的甲班学生，再回头载上丙班学生后一直驶到终点，此时甲、乙两班也恰好赶到终点，已知学生步行的速度为 5 千米/小时，大巴车的行驶速度为 55 千米/小时，出发地到终点之间的距离为 8 千米，求这些学生到达终点一共所花的时间．

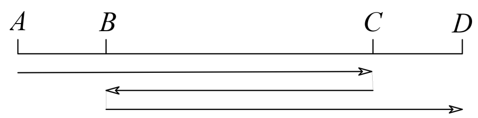
【解析】如图所示：



虚线为学生步行部分，实线为大巴车行驶路段，由于大巴车的速度是学生的 11 倍，所以大巴车第一次折返点到出发点的距离是乙班学生搭车前步行距离的 6 倍,如果将乙班学生搭车前步行距离看作是一份的话,大巴车第一次折返点到出发点的距离为 6 份，大巴车第一次折返到接到乙班学生又行驶了 5 分距离，……如此大巴车一共行驶了 6+5+6+5+6=28 份距离，而 A 到 F 的总距离为 8 份，所以大巴车共行驶了 28 千米，所花的总时间为 28/55 小时．

【答案】28/55 小时

8. 甲、乙两班学生到离校 39 千米的博物馆参观，但只有一辆汽车，一次只能乘坐一个班的学生．为了尽快到达博物馆，两个班商定，由甲班先坐车，乙班先步行，同时出发，甲班学生在途中某地下车后步行去博物馆,汽车则从某地立即返回去接在途中步行的乙班学生．如果甲、乙两班学生步行速度相同，汽车速度是他们步行速度的 10 倍，那么汽车应在距博物馆多少千米处返回接乙班学生，才能使两班同时到达博物馆?



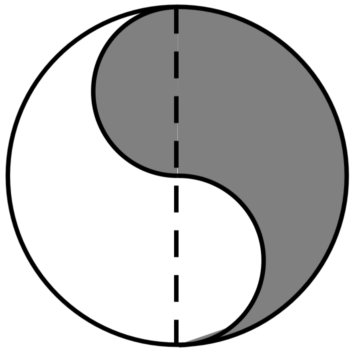
【解析】如图所示，当甲班乘车至 C 处后下车，然后步行至博物馆，车则返回去接乙班，至 B 处时恰好与乙班相遇，然后载着乙班直接到博物馆．

由于甲、乙两班学生要同时到达，他们所用的时间是相同的，而总路程也相同，那么他们乘车的路程和步行的路程也分别相同，也就是说图中 AB 与 CD 相等．又乙班走完 AB 时，汽车行驶了从 A 到 C 再从 C 到 B 这一段路程，由于汽车速度是他们步行速度的 10 倍，所以汽车走的这段路程是 AB 的 10 倍，可得 BC 是 AB 的 $(10-1)\div2=4.5$ 倍，那么全程 AD 是 AB 的 6.5 倍，也是 CD 的 6.5 倍，所以 CD 为 $39\div6.5=6$ 千米，即汽车应在距博物馆 6 千米处返回接乙班．

【答案】6 千米

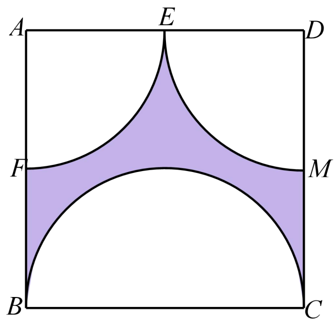
曲线几何综合训练（1）课后练习

1. 学校的大标语上要画出如图所示(图形阴影部分)的标点符号——逗号.已知其中大圆半径为 10 厘米，则这个“逗号”的面积为________平方厘米.(其中π取 3.14)



【答案】157.
【分析】不难发现图中阴影“逗号”的面积恰好等于大圆面积的一半，也就是
$\frac{1}{2}\times3.14\times10^2=157$ (平方厘米).

2. 如题图，正方形 *ABCD* 的边长为 20 厘米,*E*、*F*、*M* 分别为三边的中点，且空白部分均为扇形，那么图中阴影部分的面积为________平方厘米．(π取 3.14)



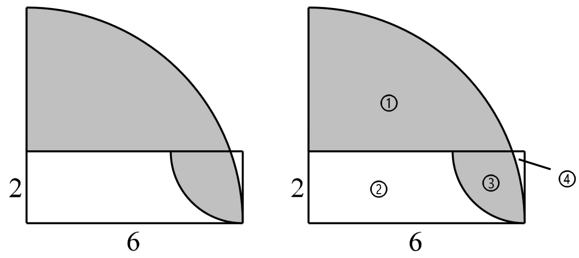
【答案】86.
【分析】阴影部分面积为正方形面积减半径为 10 厘米的圆面积，即
$20\times20-3.14\times10^2=86$(平方厘米)

3. 如图，求阴影部分面积和.

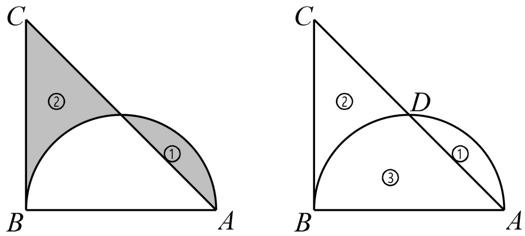
【答案】$10\pi-12$

【解析】1+2+3=大扇　　3+4=小扇　　2+3+4=长方形

1+3=大扇-（长方形-小扇）=$10\pi-12$



4. 如图，三角形 ABC 是直角三角形，阴影部分①比阴影部分②的面积小 28 平方厘米，AB 长 40 厘米.求 BC 的长度?(π 取 3.14)

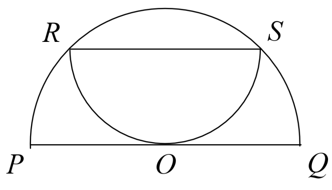


【答案】32.8

【解析】图中半圆的直径为 AB，所以其面积为 $\frac{1}{2}\times20^2\times\pi\approx200\times3.14=628$.

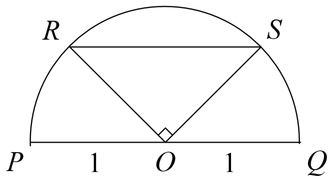
有空白部分③与①的面积和为 628，又②-①$=28$，所以②、③部分的面积和 $628+28=656$.有直角三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times40\times BC=656$.所以 $BC=32.8$ 厘米.

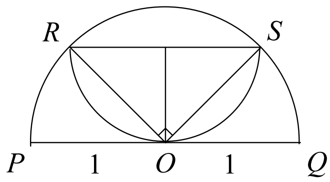
5. 如下图所示，曲线 $PRSQ$ 和 ROS 是两个半圆.RS 平行于 PQ.如果大半圆的半径是 1 米，那么阴影部分是多少平方米?(π 取 3.14)



【答案】1.07

【解析】如左下图所示，弓形 RS 的面积等于扇形 ORS 的面积与三角形 ORS 的面积之差，为 $\frac{1}{4}\times\pi\times1^2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$(平方米),

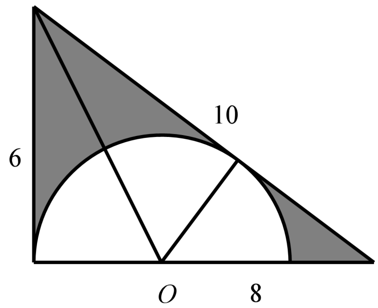




半圆 ROS 的面积为 $\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{RS}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\times\frac{OR^2+OS^2}{4}=\frac{1}{2}\pi\times\frac{1^2+1^2}{4}=\frac{\pi}{4}$ (平方米),

所以阴影部分的面积为 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times(\pi-1)=1.07$ (平方米).

6. 如图，直角三角形的三条边长度为$6,8,10$，它的内部放了一个半圆，图中阴影部分的面积为多少？（π取 3.14）



【答案】9.87

【解析】$S_{阴影}=S_{直角三角形}-S_{半圆}$，

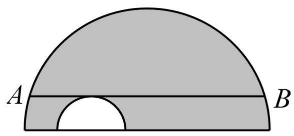
设半圆半径为 r，直角三角形面积用 r 表示为：$\frac{6\times r}{2}+\frac{10\times r}{2}=8r$

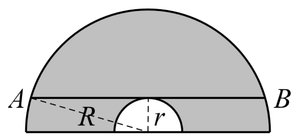
又因为三角形直角边都已知，所以它的面积为 $\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$，

所以$8r=24$， $r=3$

所以 $S_{阴影}=24-\frac{1}{2}\times 9\pi=24-4.5\pi=9.87$

7. 如下图所示，已知线段 AB 长 12 厘米，求阴影部分的面积.





【答案】18π

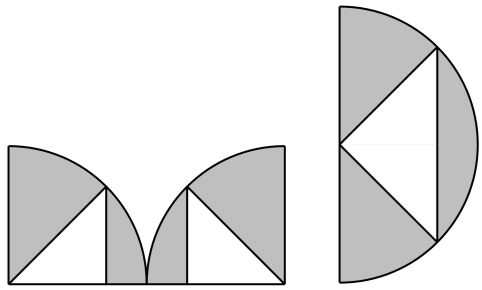
【解析】将小半圆平移至两圆圆心重合设大圆半径为 R，小圆半径为 r .根据勾股定理，有：$S_{阴}=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi\left(R^2-r^2\right)=\frac{1}{2}\pi 6^2=18\pi$.

8. 求图中阴影部分的面积.圆半径为 10cm，两空白部分是等腰直角三角形.（π 取 3）

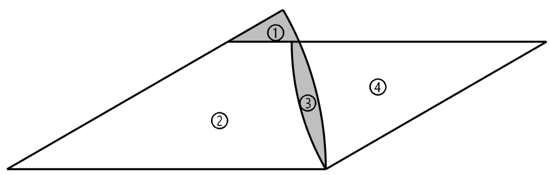
【答案】100

【解析】将右侧的扇形顺时针转 90 度，成为右图，刚阴影部分面积为

$\frac{1}{2}\pi\times10^2-\frac{1}{2}\times10\times10=150-50=100cm^2$



9. （超）如图，$ABCD$ 是平行四边形，AD=8 cm，AB=10 cm，$\angle DAB$=30°，高 CH=4 cm，弧 BE、DF 分别以 AB、CD 为半径，弧 DM、BN 分别以 AD、CB 为半径，则阴影部分的面积为多少?（圆周率取 3）



【答案】2

【解析】图形关于 BD 对称，求出下图 1+3 再乘以 2 即得.

1+2+3=大扇　　3+4=小扇　　2+3+4=平行四边形

1+3=大扇-（平行四边形-小扇）=1

所以阴影部分面积为 1×2=2（平方厘米）

水中浸物课后练习

1. 一个盛有水的长方体容器，长宽高分别为 20 厘米、10 厘米、30 厘米，容器中水深 15 厘米，在水中放入一个底面为边长 3 厘米，高为 6 厘米的长方体，此时水面的高度为多少厘米？

【解析】由题可得，因为$15>6$,所以完全浸没.总体积

$15\times10\times20+3\times3\times6=3054$立方厘米，高度为$3054\div\left(20\times10\right)=15.27$厘米

2. 一个深 30 厘米的圆柱形容器，外圆直径 22 厘米，壁厚 1 厘米，已装有深 27.5 厘米的水.现放入一个地面直径 10 厘米，高 30 厘米的圆柱形铁块，则将有多少立方厘米的水溢出？

容器底面积为$\pi\times(\frac{22}{2}-1)^2=100\pi$平方厘米，剩余容积为$(30-27.5)\times100\pi=250\pi$立方厘米；圆锥形铁块的体积为$\pi\times(\frac{10}{2})\times30=750\pi$立方厘米，将铁块放入后正好完全浸没，没有水溢出

3. 底面积为 50 平方厘米的圆柱形容器中装有水，水面上漂浮着一块棱长为 5 厘米的正方体术块，木块浮出水面的高度是 2 厘米.若将木块从容器中取出，水面将下降________厘米.

【解析】木块浸入水中的体积为 3×5×5=75 立方厘米，如果把木块拿出，那么四周的水要补充一部分来填充这部分体积，需要下降 75÷50=1.5 厘米.

4. 底面半径为 10cm 的圆锥，全部浸在直径为 60cm 的圆柱中，水面上升 1.5cm，求圆锥的高是多少？

【解析】完全浸没，圆锥的高为$\pi\times30^2\times1.5\times\frac{1}{3}\div100\pi=4.5(厘米)$.故圆锥的高为$4.5$厘米.

5. 底面半径为 6cm，高为 1cm 的圆柱形铁块，放在一个半径为 10cm，高为 10cm 的圆柱中，原来水面高为 0.5cm，求水面上升了多少？

【解析】假设完全浸没，总体积为$\pi\times5\times5\times1+\pi\times10\times10\times0.5=75\pi$立方厘米，水深为$75\pi\div\left(\pi\times10\times10\right)=0.75$厘米，因为$0.75<1$，所以没有完全浸没.故水深为

$\pi\times10\times10\times0.5\div\left(\pi\times10\times10-\pi\times6\times6\right)=\frac{25}{36}$厘米.所以上升了$\frac{25}{36}-0.5=\frac{7}{36}$厘米.

6. 把一个体积为 80 立方厘米的铁块浸没在底面积为 20 平方厘米的长方体容器中，水面高度为 10cm，如果把铁块捞出水面后，水面高多少厘米？

【解析】因为完全浸没，所以水的体积为$20\times10-80=120$立方厘米，故水深为$120\div20=6$厘米.

7. 一个从里面量底面半径是 5cm、高 20cm 的圆柱体容器装有 15cm 高的水，当把一个底面直径是 2cm、高 18cm 的圆柱形铁棒垂直放入容器中时，并没有完全浸没，现在水深多少？

【解析】由题意可得并没有完全浸没，直径为 2，所以半径为 1 所以水深为

$\pi\times5\times5\times15\div\left(\pi\times5\times5-\pi\times1\times1\right)=\frac{125}{8}$厘米.

8. 一个长 15cm，宽 12cm，高 20cm 的长方体容器中，水深为 5cm.乌鸦来到容器边缘处，只能够到容器口向下 5 厘米的位置.旁边有很多你小石头，每颗小石头的体积都是 9 立方厘米，乌鸦要向容器内丢入多少颗小石头才能喝到水？

【解析】需加入的石头总体积：$15\times12\times\left(20-5-5\right)=1800$立方厘米，所以乌鸦需要加入$1800\div9=200$颗 小石头.

9. 一个水槽中放入一个底面半径为 5 厘米圆柱形铁块，此时水面上升 9 厘米，铁块完全浸没在水中.然后将铁块提出水面 8 厘米，水面下降 4 厘米.求圆柱体的体积.

【解析】根据比例法可得$4:8=5:x$，得$x=10$厘米 所以高为$10+8=18$厘米.所以体积为$3.14\times5\times5\times18=1413$立方厘米

第八讲 分组配对与对应课后练习详解

1. 计算：
$1-2-3+4+5+6-7-8-9-10+11+12+13+14+15-16-17-18-19+20+21+22-23-24+25$
=________.

【解析】$(1+25)-(2+24)-(3+23)+\cdots+(12+14)+13=26\times(1-2+3-4+2)+13=13$

2. 如下图所示的表中有 100 个数，那么它们的和等于多少？

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

【解析】将该数表旋转 180 度可得：

19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

将对应位置上的数相加：$20\times100\div2=1000$

3. 100 个连续自然数的和是 8450，取其中第 1 个，第 3 个，第 5 个，…，第 99 个（所有第奇数个），再把这 50 个数相加，和是多少?

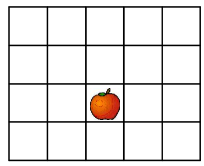
【解析】运用对应的思想分析，将这 100 个连续自然数进行配对：（第 1 个，第 2 个）、（第 3 个、第 4 个）、…、（第 99 个，第 100 个）.每对自然数相差 1.那么所有“第奇数个自然数的和”比所有“第偶数个自然数的和”少 50.

所以所有第奇数个自然数的和$=\left(8450-50\right)\div 2=4200$

4. 小明写自然数从 1 写到 N，所写下的数字（一个三位数就有三个数字，一个四位数就有四个数字）之和是 28035.那么 N 等于多少?

【解析】先估计从 1 写道 1999,0 和 1999 配对，1 和 1998 配对……999 和 1000 配对，所写下的数字之和为（1+9+9+9）×1000=28000，还剩 $28035-28000=35$，2000,2001,2002,…,2006 数字和为 35，故 N=2006

5. 在下面的图中，包含苹果的长方形一共有多少个?



【解析】由对应法思想，把含苹果的长方形对应为纵向和横向含苹果的线段，含苹果的纵向线段有 6 条，含含苹果的横向线段有 9 条，所以共有 6×9=54 个长方形.

6. 从 1999 到 5999 的自然数中有多少个数的数码之和能被 4 整除?

【解析】为了方便，将 2000 到 5999 这 4000 个数字都看成四位数 $\overline{abcd}$.

a 为 2、3、4、5

$\overline{bcd}$ 为 000 到 999 这 1000 个自然数，因为这 1000 个自然数的数字和除以 4 有 4 种余数（0、1、2、3），对于每一种余数都能找到一个对应的 a，使其能被 4 整除.

故 2000 到 5999 间有 1000 个自然数能被 4 整除，则 1999 到 5999 有 1001 个数字能被 4 整除.

7. 在 1、2、3、…、99999 中有多少个这样的自然数，它们都含有奇数个奇数字?

【解析】我们把数字 0 添加到这个集合中，这对计算结果并无影响，但是讨论起来比较容易. 对于 0 到 99999 中的任何数进行下列运算：

如果最后一位数字不是 9，则把这个数加 1.

如果最后一个数字是 9，则把这个 9 改为 0.

这就把每个含有奇数个奇数字的数都变成了含有偶数个奇数字的数，反之亦然，并且一对一进行. 这样所得的数还是从 0 到 99999 这些数组成. 其中含奇数个奇数字的数和含有偶数个奇数字的数个数相等，各占一半，都是 50000 个.

8. $100\sim200$之间（包括 100 和 200）中任选两个数组成数对，若这个数对的和能被 6 整除，则这个数对为“幸福数对”，则可以选出多少个“幸福数对”.

【解析】将这 101 个数以被 6 除的余数为标准分为 6 组：（100,106，…，196）（101、107、…、197）（102、108、…、198）（103、109、…、199）（104、110、…、200）（105、111、…、195）．除了余 3 的组是 16 个数外其余组都是 17 个数，则余 1 的组和余 5 的组分别选取 1 个数可以组成“幸福数对”, 余 2 的组和余 4 的组分别选取 1 个数可以组成“幸福数对”, 余 3 的数和余 0 的组只能在本组选取两个数，所以,可选出$17\times17+17\times17+C_{17}^{2}+C_{16}^{2}=834$个“幸福数对”.

9. 有五个重量都互不相同的箱子，每个的重量都小于 100kg，将这些箱子两两组合一起称重，得到的结果分别为：113,116,110,117,112,118,114,121,120 与 115kg．请问，最重的箱子的重量为多少 kg？

【解析】设 5 个箱子重量分别为 a,b,c,d,e,且$a<b<c<d<e$,每个箱子被算了 4 次。

$$a+b+c+d+e=\frac{113+116+110+117+112+118+114+121+120+115}{4}=289\text{千克},$$

$a+b=110$千克，$d+e=121$千克，$c+e=120$千克；

所以$c=289-(a+b)-(d+e)=58$ 千克;所以$e=120-c=62$ 千克.

第九讲 计算+工程问题综合训练课后练习

1. $\left(2\frac{1}{2007}\times3.6+3\frac{3}{5}\times7\frac{2006}{2007}\right)\div\frac{3}{4}\div\frac{3}{5}=$_______.

【解析】

$$\left(2\frac{1}{2007}\times3.6+3\frac{3}{5}\times7\frac{2006}{2007}\right)\div\frac{3}{4}\div\frac{3}{5}$$

$$=\left(2\frac{1}{2007}\times3.6+3.6\times7\frac{2006}{2007}\right)\div\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}\right)$$

$$=\left[\left(2\frac{1}{2007}+7\frac{2006}{2007}\right)\times3\frac{6}{5}\right]\div\frac{9}{20}$$

$$=(10\times3.6)\div\frac{9}{20}$$

$$=36\times\frac{20}{9}$$

$$=80$$

2. 计算：（$2012010\times\frac{999}{1001}$+1010）+2009

【解析】（$2012010\times\frac{999}{1001}$+1010）+2009，

=（$2010\times1001\times\frac{999}{1001}$+1010）+2009，

=（2010×999+1010）+2009，

=2010×（1000－1）+1010+2009，

=2010000－2010+1010+2009，

=2010000+1010－（2010－2009），

=2011010－1，

=2011009.

3. 计算：（1234+2314+3412+4123）÷（1+2+3+4）_

【解析】（1234+2314+3412+4132）÷（1+2+3+4）

=[（1+2+3+4）×1000+（1+2+3+4）×100+（1+2+3+4）×10+（1+2+3+4）×1]÷（1+2+3+4）

=（1+2+3+4）×（1000+100+10+1）÷（1+2+3+4）

=1111.

4. 甲、乙两个厂生产同一种玩具，甲厂生产的玩具数量每个月保持不变，乙厂生产的玩具数量每个月增加一倍.已知一月份甲、乙两个厂生产的玩具总数是 98 件，二月份甲、乙两个厂生产的玩具总数是 106 件.那么乙厂生产的玩具数量第一次超过甲厂生产的玩具数量是在________月份.

【解析】解：乙厂一月生产：106－98=8（件）

甲厂每月生产：98－8=90（件）

8×2×2×2×2=128＞90（件）

有 4 个 2；

4+1=5（月）；

答：那么乙厂生产的玩具数量第一次超过甲厂生产的玩具数量是在五月份.

故答案为：五.

5. 有一满池水，池底有泉水总能均匀地向外涌流，已知用 24 部 A 型抽水机 6 天可抽干池水，若用 21 部 A 型抽水机 8 天也可抽干池水，设每部抽水机单位时间的抽水量相同，要使这一池水永抽不干，则至多只能用________部 A 型抽水机抽水.

【解析】解：设每部抽水机每天的抽水量为 1 份，

24×6=144（份）；

21×8=168（份）；

（168﹣144）÷（8﹣6）

=24÷2

=12（份）；

要使这一池水水永抽不干，就只能抽每天涌进的水量，不能抽原有的水，所以需要 12 部 A 型抽水机.

答：多只能用 12 部 A 型抽水机抽水.

6. 甲、乙两人同时加工同样多的零件，甲每小时加工 40 个，当甲完成任务的 $\frac{1}{2}$ 时，乙完成了任务的 $\frac{1}{2}$ 还差 40 个，这是乙开始提高工作效率，又用了 7.5 小时完成了全部加工任务.这时甲还剩下 20 个零件没完成.求乙提高工效后，每小时加工零件多少个.

【解析】（40+20）÷7.5+40

=8+40，

=48（个）.

答：乙提高工作效率后，每小时加工零件 8 个.

7. 甲、乙、丙、丁四个小组共同完成挖河任务，甲的工程量占到其他三组总量的 $\frac{2}{13}$，乙的工程量占到其他三组总量的 $\frac{1}{4}$，丙的工程量占到其他三组总量的 $\frac{4}{11}$.已知丁的工程量是 1200 个土方，请问：甲、乙、丙三组的工程量分别是多少土方?.

【解析】解：甲占总量：$\dfrac{\frac{2}{13}}{1+\frac{2}{13}}=\dfrac{2}{15}$；

乙占总量：$\dfrac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{5}$；

丙占总量：$\dfrac{\frac{4}{11}}{1+\frac{4}{11}}=\dfrac{4}{15}$

总工程量：$1200\div\left(1-\frac{2}{15}-\frac{1}{5}-\frac{4}{15}\right)=3000$（土方）

甲工程量：$3000\times\frac{2}{15}=400$(土方)

乙工程量：$3000\times\frac{1}{5}=600$(土方)

丙工程量：$3000\times\frac{4}{15}=800$（土方）

答：甲组的工程量是 400 土方，乙组是 600 土方，丙组是 800 土方.

8. 生产 63 个零件，若由师傅独做可在规定时间提前 5 小时完成；若由徒弟独做，超过规定时间 7 小时才能完成.师徒二人先合作 3 小时，再由徒弟独做，恰好在规定时间内完成.请问：规定完成任务的时间是多少小时?

【解析】解：设规定完成任务的时间是 x 小时，则师傅需 $x-5$ 小时完成，徒弟需要 $x+7$ 小时完成.

$\frac{1}{x-5}:\frac{1}{x+7}=7:3$

（$x+7$）：（$x-5$）=7：3

$3x+21=7x-35$

$4x=56$

$x=14$

答：规定时间是 14 天.

9. 我市某段道路刷黑工程承包给甲、乙、丙三个工程队.甲、乙合做 5 周完成了$\frac{1}{3}$，乙、丙合做 2 周完成了余下的$\frac{1}{4}$，然后甲、丙又合做了 5 周才完工.整个工程的报酬是 120 万元，按工作量分报酬的话，问乙工程队应分得多少万元?

【解析】解：设甲乙丙每周的工作效率分别为 x、y、z，根据题干分析可得：

$x+y=\frac{1}{3}\div 5=\frac{1}{15}$；

$\mathrm{x}+y=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}\div 2=\frac{1}{12}$；

$x+z=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\div 5=\frac{1}{10}$；

将上述三个等式整理可得：

$x+y=\frac{1}{15}$，①；

$\mathrm{y}+z=\frac{1}{12}$，②；

$x+z=\frac{1}{10}$，③；

① +②可得：$2y+x+z=\frac{3}{20}$④；

把③代入④可得：$2y+\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$，所以 $y=\frac{1}{40}$，

$\frac{1}{40}\times(5+2)\times 120$

$=\frac{7}{40}\times 120$

=21（万元）

答：乙工程队应分得 21 万元.

10. 一个水池，地下水从四壁渗入，每小时渗入该水池的水量是固定的.当这个水池水满时，打开 A 管，8 小时可将水池排空；打开 B 管，10 小时可将水池排空；打开 C 管，12 小时可将水池排空.如果打开 A、B 两管，4 小时可将水池排空，那么打开 B、C 两管，将水池排空需要____________小时.

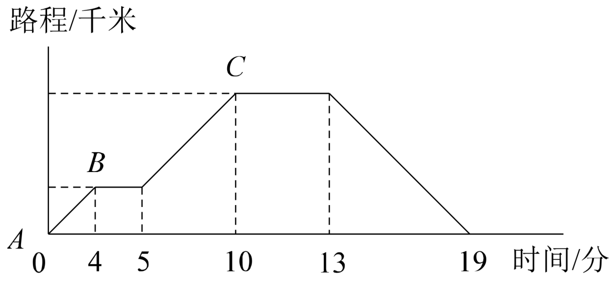
【解析】解：

$$
\begin{aligned}
&1\div\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)\right]\\
&=1\div\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right]\\
&=4.8(\text{小时})
\end{aligned}
$$

故答案为：4.8.

图形应用题作业及解析

1. 如下图，电车从 A 站经过 B 站到达 C 站，然后返回．去时在 B 站停车，而返回时不停．去时的车速为每小时 48 千米．



（1）A 站与 B 站相距多少千米？B 站与 C 站相距多少千米？

（2）返回时每小时行多少千米？

（3）电车往返的平均速度是多少千米每小时？

【答案】（1）3.2 千米，4 千米；（2）72 千米每小时；（3）$45\frac{9}{19}$千米每小时

【解析】（1）从 A 到 B 用时 4 分钟，速度为 $48km/h$，即 $800m/min$．则 AB 相距 $4\times800=3200$ 米．即 3.2 千米．从 B 到 C 用时 $10-5=5$ 分钟，则 BC 相距 $5\times800=4000$ 米，即 4 千米．

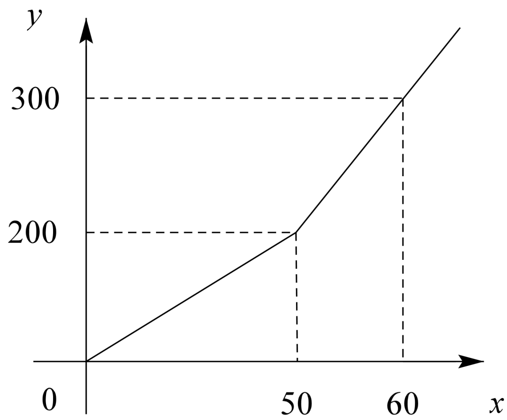
（2）由（1）可知，AC 相距 $3.2+4=7.2$ 千米．从 C 到 A 用时 $19-13=6$ 分钟，即 $\frac{1}{10}$ 小时．返回速度为 $7.2\div\frac{1}{10}=72$ 千米每小时．

（3）电车往返共用时 19 分钟，即 $\frac{19}{60}$ 小时．总路程为 $7.2\times2=14.4$ 千米．平均速度为 $14.4\div\frac{19}{60}=45\frac{9}{19}$ 千米每小时．

2. 某市 2017 年企业月用水量 x（吨）与该月应交的水费 y（元）之间的函数关系如图所示．

（1）若某企业 2017 年 12 月份的水费为 620 元，求该企业本月的用水量；

（2）为鼓励企业节约用水，该市自 2018 年 1 月开始对月用水量超过 80 吨的企业加收污水处理费，规定：若企业月用水量 x 超过 80 吨则除按 2017 年收费标准收取水费外，超过 80 吨部分每吨另加收 $\frac{x}{2}$ 元．若某企业 2018 年 3 月份的水费和污水处理费共 1050 元，求这个企业该月的用水量．



【答案】（1）92，（2）90

【解析】（1）由图可得：前 50 吨水水费为 200 元，平均每吨水 4 元，超过 50 吨的部分，每吨水为 $(300-200)\div(60-50)=10$ 元，那么 17 年 12 月的用水量为 $(620-200)\div10+50=92$ 吨；

（2）设用水量为 a 吨,则有：$200+10\times(a-50)+\dfrac{a}{2}\times(a-80)=1050$，求得 $a=90$.

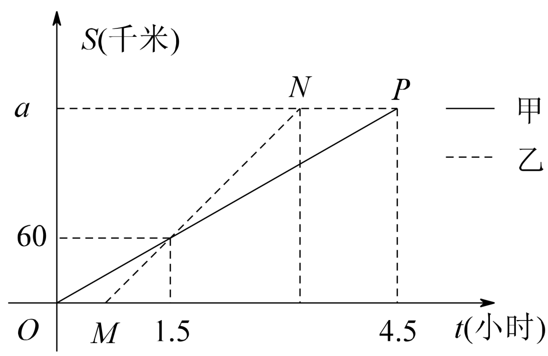
3. 甲、乙两车从 A 地将一批物品匀速运往 B 地，已知甲出发 $0.5h$ 后乙开始出发，如图，线段 OP、MN 分别表示甲、乙两车离 A 地的距离 S（km）与时间 t（h）的关系，请结合图中的信息解决如下问题：

（1）计算甲、乙两车的速度及 a 的值；

（2）乙车到达 B 地后以原速立即返回.

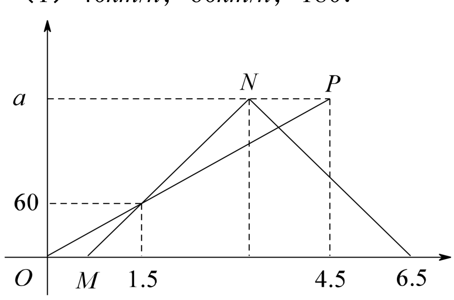
①在图中画出乙车在返回过程中离 A 地的距离 S（km）与时间 t（h）的图象；

②请问甲车在离 B 地多远处与返程中的乙车相遇？



【答案】（1）$40km/h$，$60km/h$，180.

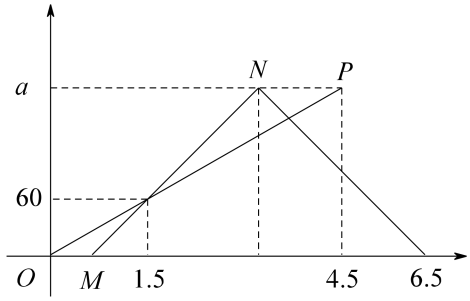
（2）①



②24 千米.

【解析】（1）甲车速度：$60\div1.5=40\,km/h$，乙车速度：$60\div(1.5-0.5)=60\,km/h$，$a=40\times4.5=180km$．

（2）

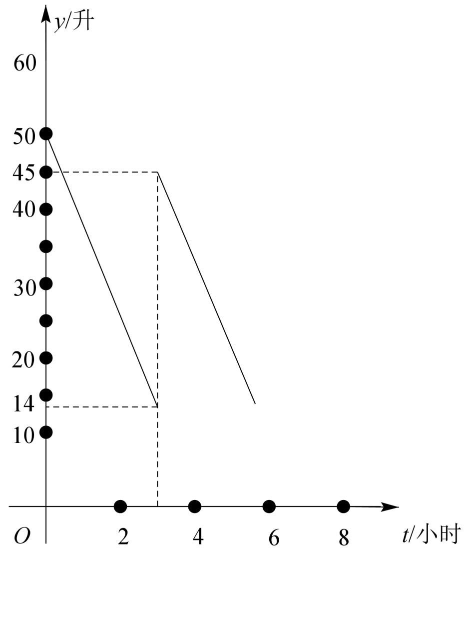


乙车到达 B 地时用时 180÷60=3 小时，此时横坐标为 3+0.5=3.5 小时，
甲车行驶了 3.5×40=140 千米，离 B 地 180-140=40 千米．
从此时算起经过了 40÷(60+40)=0.4 小时两车相遇
则相遇是甲车离 B 地 0.4×60=24 千米．

4. 张师傅驾车运送荔枝到某地出售，汽车出发前邮箱有油 50 升，行驶若干小时后，图中在加油站加油若干升，邮箱中剩余油量 y（升）与行驶时间 t（小时）之间的关系如图所示．

（1）汽车行驶____小时后加油，中途加油____升；

（2）已知加油前、后汽车都以 70 千米/小时匀速行驶，如果加油站距目的地 210 千米，要到达目的地，问油箱中的油是否够用？请说明理由．



【答案】（1）3，31（2）够用

【解析】（1）由图可得：行驶 3 小时后加油，中途加油 $45-14=31$ 升；

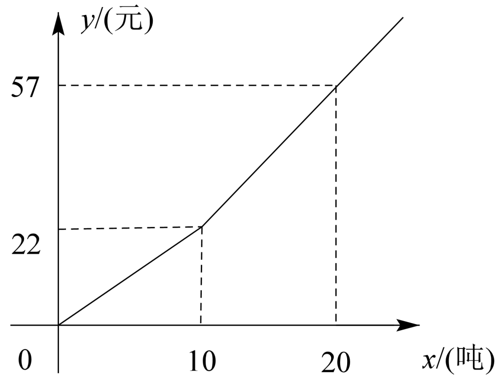
（2）易知汽车每小时耗油 $(50-14)\div3=12$ 升，从加油站到目的地需要时间 $210\div70=3$ 小时，需要耗油 $3\times12=36$ 升，加油后还有 45 升，所以油箱中的油够用了．

5. 省部分地区遭遇干旱，为鼓励市民节约用水，我市自来水公司按分段收费标准收费，右

图反映的是每月收取水费y（元）与用水量x（吨）之间的关系．

（1）小聪家五月份用水 7 吨，应交水费____元：

（2）按上述分段收费标准，小聪家三、四月份分别交水费 29 元和 19.8 元，问四月份比三月份节约用水多少吨？



【答案】（1）15.4（2）3

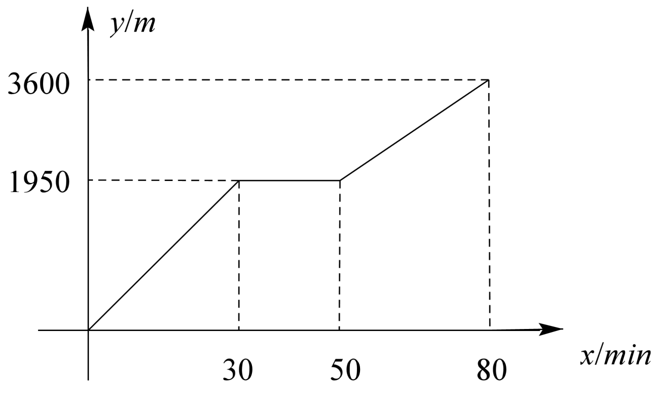
【解析】（1）由图可得：10 吨以内，每吨水费为$22\div10=2.2$元，超过 10 吨的部分，每吨水为$\left(57-22\right)\div\left(20-10\right)=3.5$元，那么五月份用水 7 吨，水费为$2.2\times7=15.4$元．

（2）易知三月份用水量为$\left(29-22\right)\div3.5+10=12$吨，四月份的用水量为$19.8\div2.2=9$吨，所以四月份比三月份节约用水$12-9=3$吨．

6. 小亮上山游玩，小颖乘会缆车，小亮步行，两人相约在山顶的缆车终点会合．已知小亮行走到缆车终点的路程是缆车到山顶的线路长的 2 倍，小颖在小亮出发后 50 min 才乘上缆车，缆车的平均速度为 180 *m/min*．设小亮出发 *x min* 后行走的路程为 *y m*．图中的折线表示小亮在整个行走过程中 *y* 与 *x* 的关系．

（1）小亮行走的总路程是______*m*，他途中休息了______*min*．

（2）当小颖到达缆车终点为时，小亮离缆车终点的路程是多少？



【答案】（1）3600，20 （2）1100

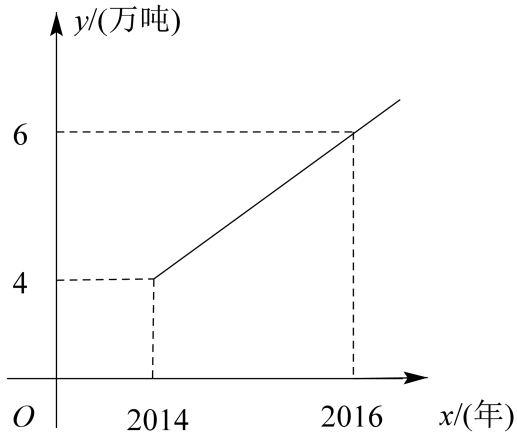
【解析】（1）由图可得，小亮行走的总路程为 3600 米，中途休息了 20 分钟；

（2）缆车到山顶的线路长为 3600÷2=1800 米，

缆车到达终点所需时间为 1800÷180=10 分钟，

小颖到达缆车终点时，小亮行走的时间为 10+50=60 分钟，由图可得，小亮后面 30 分钟，每分钟走 $\left(3600-1950\right)\div\left(80-50\right)=55$ 米，所以 60 分钟后，小亮一共走了 $1950+55\times10=2500$ 米，离缆车终点路程为 $3600-2500=1100$．

7. 限塑令”后，2014 年大约减少塑料消耗约 4 万吨．调查结果分析显示，从 2014 年开始，五年内该市因实施“限塑令”而减少的塑料消耗量 y(万吨)随着时间 x(年)逐年成直线上升，y 与 x 之间的关系如图所示.请你估计，该市 2017 年因实施“限塑令”而减少的塑料消耗量为多少？

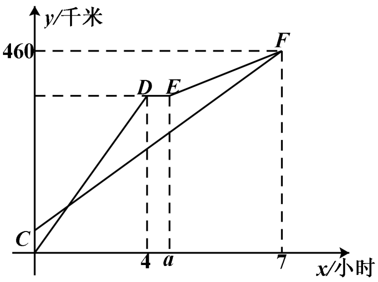


【答案】7

【解析】由图可得：从 2014 开始每年减少的塑料消耗量为 $\left(6-4\right)\div\left(2016-2014\right)=1$ 万 吨，

那么 2017 年减少的塑料消耗量为 $6+\left(2017-2016\right)\times1=7$ 万吨.

8. 甲、乙两车从 A 地出发沿同一路线驶向 B 地，甲车先出发，匀速驶向 B 地，40 分钟后，乙车出发，匀速行驶一段时间后，在途中的货站装货耗时半小时，由于满载货物，为了行驶安全，速度减少了 50 千米/小时，结果与甲车同时到达 B 地．设乙车行驶的时间为 x 小时，甲、乙两车距 A 地的距离为 y 千米，图中的折线表示 y 与 x 之间的关系，根据图象完成以下问题：



(1)A、B 两地之间的距离是________千米，a=________；(直接写出答案)

(2)求甲、乙两车的速度；

(3)在到达 B 地之前，乙车出发多少分钟后追上甲车？

(4)乙车到达货站时，甲车距 B 地多少千米？

【解析】(1)460；4.5

(2)甲车的速度为 60 千米/小时；乙车在 OD 段的速度为 90 千米/小时，在 DE 段的速度为 0，在 EF 段的速度为 40 千米/小时

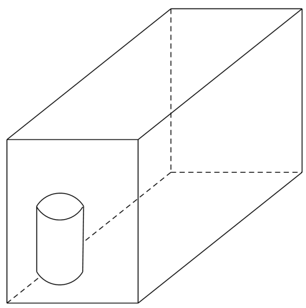
(3)乙车 80 分钟后追上甲车

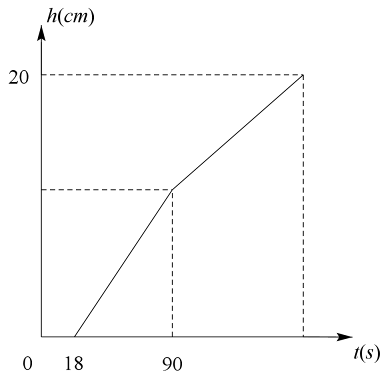
(4)甲车距 B 地 180 千米

9. 在底面积为 $150cm^2$、高为 $20cm$ 的长方体水槽内放入一个圆柱形烧杯(烧杯本身的质量、体积忽略不计）．如图所示．向烧杯中注入流量一定的水，注满烧杯后．继续注水．直至注满槽为止(烧杯在大水槽中的位置始终不改变)．水槽中水面上升的高度 h 与注水时间 t 之间的关系如图所示．

（1）求烧杯的底面积；

（2）若烧杯的高为 $9cm$，求注水的速度及注满水槽所用的时间．





【答案】（1）30 平方厘米；（2）200s.

【解析】（1）水的流量一定，则注满的时间之比等于体积之比，注满烧杯用了 18s，注满与烧杯等高的水槽用了 90 秒，则其体积之比为 $18:90=1:5$，又由于两者等高，所以 $S_{烧}:S_{槽}=1:5$，$S_{烧}=150\times\frac{1}{5}=30$ 平方厘米.

（2）注水速度为 $30\times9\div18=15cm^3/s$，注满所用时间为 $150\times20\div15=200$ s.

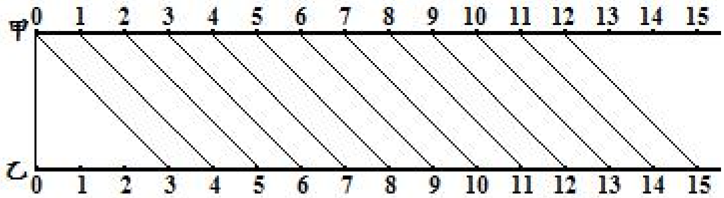
第十一讲 柳卡图与环形跑道作业详解

1. 一条电车线路的起点站和终点站分别是甲站和乙站，每隔 5 分钟有一辆电车从甲站发出开往乙站，全程要走 15 分钟．有一个人从乙站出发沿电车线路骑车前往甲站．他出发的时候，恰好有一辆电车到达乙站．在路上他又遇到了 11 辆迎面开来的电车．到达甲站时，恰好又有一辆电车从甲站开出．问他从乙站到甲站用了多少分钟？

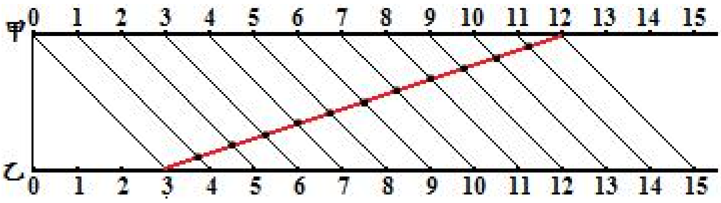
【考点】行程—发车间隔；行程—图示解法—柳卡图

【解析】汽车行全程的时间为 15 分钟，每 5 分钟发一辆车。

横轴：时间(单位:5 分钟)，纵轴：路程，黑线：车，红线：人　交点：相遇点



骑车人一共看到 13 辆车，他从乙站出发时看到的是 15 分钟前发的车，此时第 4 辆车正从甲发出。到达甲站时看到的是第 13 辆车。由图可知，这个人用了 9 个间隔，即 5×9=45 分钟的时间，从甲站到达了乙站。



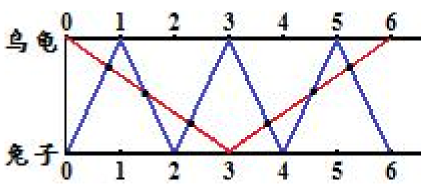
2. 兔、龟在甲、乙两地之间做往返跑，兔的速度是龟的 3 倍，它们分别在甲、乙两地同时相对起跑，当它们在途中相遇了 12 次时，龟正在跑第多少个单程？

【考点】行程—图示解法—柳卡图

【解析】柳卡图

龟兔速度之比是 1:3，则行一个全程的时间之比为 3:1。

横轴：时间，纵轴：路程，红线：乌龟，蓝线：兔子，交点：相遇点(迎面或同向)



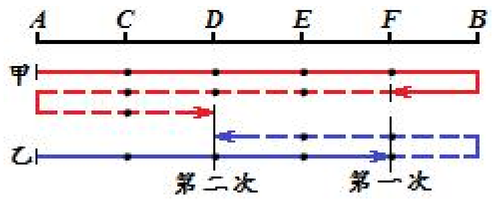
由图可知，6 份时间为一个周期，一个周期内龟兔相遇 6 次，第 6 次相遇时乌龟正在行第 2 个单程。则可知第 12 次相遇乌龟正在行第 4 个单程。

3. 甲、乙二人同时从 A 地出发同向而行去往 B 地，甲的速度是每小时 30 千米，乙的速度是每小时 20 千米，甲、乙到 B 地后立即返回 A 地．已知二人第二次相遇的地点距第一次相遇的地点 20 千米(两人相遇指迎面相遇），那么，A、B 两地相距多少千米？

【考点】行程—多次相遇与追及；行程—图示解法—柳卡图

【解析】法一：多次相遇

画行程图可知，每次相遇二人路程和均为两个全程。甲乙速度比 30:20=3:2，设第一次相遇时甲的路程为 6 份，乙的路程为 4 份，则全程为(6+4)=5 份。则每次相遇乙走的路程都是 4 份。



第一次相遇，乙的路程是 4 份，相遇点在 F。

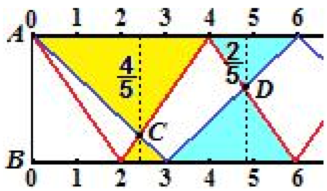
第二次相遇，乙的路程是 4×2=8 份，相遇点在 D。

可知，DF=20 千米，则一份：20÷2=10 千米，全程 10×5=50 千米。

法二：柳卡图

甲乙速度比 30:20=3:2，甲行全程的时间是 2t，乙行全程的时间是 3t。

横轴：时间(单位:t)　纵轴：路程　红线：甲　蓝线：乙　反向交点：迎面相遇点



由图可知，若 AB 的距离为 1，则第一次相遇点 C 和 A 地的距离为 $\frac{4}{5}$，第二次相遇点 D 和 A 地的距离为 $\frac{2}{5}$。两次相遇点的距离为 20km，可知 AB 的距离为 $20\div\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\right)=50km$

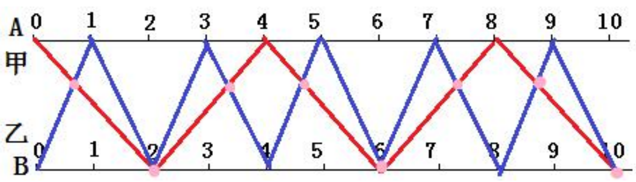
4. 甲、乙两人分别从 A、B 两地出发，在 A、B 两地之间不断往返前进．当甲第 3 次到达 B 地的时，乙恰好第 5 次回到了 B 地，请问：在甲、乙两人在行进的过程中，一共相遇了多少次？（迎面相遇和追上都算相遇）．

【考点】行程—图示解法—柳卡图

【答案】8 次

【解析】甲第 3 次到 B 地，甲共走了 5 个全程；乙第 5 次回到了 B 地，乙共走了 10 个全程。甲乙速度比为 1：2。则甲行全程时间为 2 份，乙走 1 个全程需要 1 份时间。

则在 10 份时间之内画出柳卡图



由于题目中说迎面相遇和追上都算相遇。所以共相遇 8 次。

5. 甲、乙和丙三人沿着 400 米环形跑道进行 800 米跑比赛，当甲跑 1 圈时，乙比甲多跑 $\frac{1}{7}$ 圈.丙比甲少跑 $\frac{1}{7}$ 圈.如果他们各自跑步的速度始终不变，那么，当乙到达终点时，甲在丙前面多少米处？

【解析】三人速度不变，当甲跑 7 份时，乙就跑 7+1=8 份，丙跑 7－1=6 份；
当乙到达终点时跑了 800 米，则甲跑了 700 米，丙跑了 600 米；
700－600=100（米）；
即当乙到达终点时，甲在丙前面 100 米处.
故答案为：100.

6. 甲乙两人以匀速绕圆形跑道相向跑步，出发点在圆直径的两端.如果他们同时出发，并在甲跑完 60 米时第一次相遇，乙跑一圈还差 80 米时俩人第二次相遇，求跑道的长是多少米?

【解析】3（x－60）=2x－80，
3x－180=2x－80，
x=100；
2x=2×100=200（米）；
答：圆形跑道的长是 200 米.

7. 环形跑道一周之长为 1080 米，甲乙两人骑自行车从同一地点同时出发，朝同一方向行驶，经过 54 分钟后，甲追上了乙，如果甲的速度减少 50 米/分钟，乙的速度增加 30 米/分钟，从同一地点同时背向而行，则经过 3 分钟后两人相遇.原来甲乙两人每分钟各行多少米?

【解析】甲、乙的速度差：1080÷54=20 米/分钟，
设乙的速度是 x 米，则甲的速度是 x+20 米，
（x+20－50+x+30）×3=1080
2x×3=1080
6x=1080
x=180
x+20=180+20=200（米）
答：甲每分钟走 200 米，乙每分钟走 180 米.

8. 在环形跑道上，小明和小华同时从同一地点同向而行，每隔 12 分钟小明就可以追上小华一次.若两人在原地点同时出发，相背而行，则每隔 4 分钟就相遇一次.求两人跑一圈各需几分钟.

【解析】设环行跑道一周的长度为 1，则：
两人的速度差为：1÷12=$\frac{1}{12}$；
速度和为：1÷4=$\frac{1}{4}$；

则小明的速度为：

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\div 2=\frac{1}{6}$$

则小华的速度为：$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$

小明跑一圈需要：$1\div\frac{1}{6}=6$（分钟）；

小华跑一圈需要：$1\div\frac{1}{12}=12$（分钟）.

答：小明跑一圈需要6分钟，小华跑一圈需要12分钟.

9. （超）甲车以每小时160千米，乙车以每小时20千米的速度在长210千米的环形公路上同时同向同地出发，每当甲追上一次，甲速就减少$\frac{1}{3}$，乙速就增加$\frac{1}{3}$，在两车速度正好相等的时候，甲车行了多少千米?

【解析】①甲第一次追上乙，用210÷（160－20）$=\frac{3}{2}$（小时），

甲车行了$\frac{3}{2}\times160=240$（千米）；

②第二次追上乙，用了：

$210\div(160\times\frac{2}{3}-20\times\frac{4}{3})$，

$=210\div(\frac{320}{3}-\frac{80}{3})$，

$=\frac{21}{8}$（小时），

甲车行了 $160\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{21}{8}$，

$=160\times\frac{2}{3}\times\frac{21}{8}$，

$=280$（千米）；

③第三次追上乙，用了：

$210\div(160\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}-20\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3})$，

$=210\div\frac{320}{9}$，

$=\frac{189}{32}$（小时）.

甲车行了 $160\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{189}{32}$，

$=160\times\frac{4}{9}\times\frac{189}{32}$，

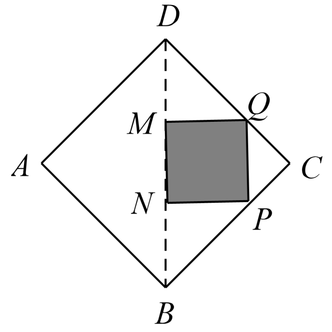
$=420$（千米）.

④甲车行了 240+280+420=940（千米）.

答：甲车行了 940 千米.

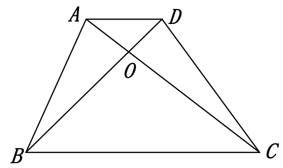
第十二讲 几何综合训练（一）课后练习

1. 图中的大正方形 $ABCD$ 的面积是 40.5 平方厘米，灰色正方形 $MNPQ$ 的边 MN 在对角线 BD 上，顶点 P 在边 BC 上，Q 在边 CD 上.则灰色正方形 $MNPQ$ 的面积是多少平方厘米？



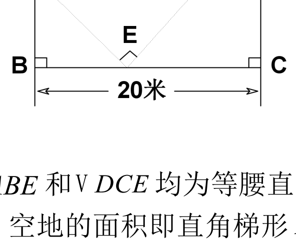
【解析】正方形的面积等于对角线的平方的一半.所以 $\frac{1}{2}DB^2 = 40.5$.则 $DB = 9$ ，所以 MN=3.则灰色正方形 $MNPQ$ 的面积是 3×3=9.

2. 如图，梯形 $ABCD$ 的上底 AD 长为 3 厘米，下底 BC 长为 9 厘米，梯形 $ABCD$ 的面积为 32 平方厘米，而三角形 ABO 的面积为多少平方厘米？



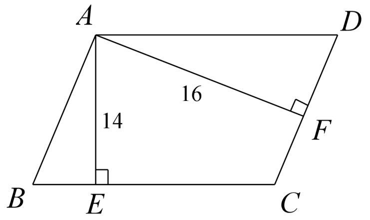
【解析】由于四边形 $ABCD$ 是梯形，而 $AD:BC$=3 : 9=1 : 3,
令三角形 AOD 的面积为 1 份，则三角形 ABO 的面积为 3 份，三角形 DOC 的面积为 3 份，三角形 BOC 的面积为 9 份，梯形 $ABCD$ 的面积为 1+3+3+9=16 份.
所以一份为：32÷16=2 平方厘米.所以三角形 ABO 的面积为 2×3=6（平方厘米）.

3. 某小区有一块如图所示的梯形空地，根据图中的数据计算，空地的面积是多少平方米？



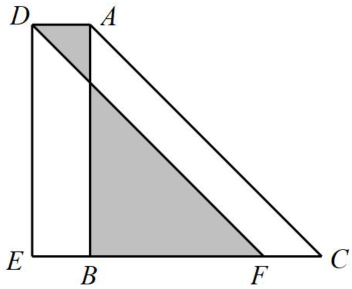
【解析】从图中可以看出，$\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形，所以 $AB = BE$ ，$DC = CE$ ，得 $AB + CD = BC$ ，空地的面积即直角梯形 $ABCD$ 的面积，为：
$(AB + CD) \times BC \div 2 = 20 \times 20 \div 2 = 200$ （平方米）.

4. 平行四边形 *ABCD* 周长为 75 厘米.以 *BC* 为底时高是 14 厘米；以 *CD* 为底时高是 16 厘米.则平行四边形 *ABCD* 的面积为多少？



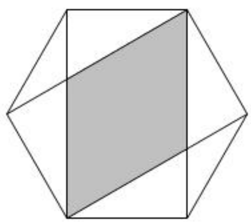
【解析】因为平行四边形面积等于底与对应高的乘积，所以有 14×*BC*=16×*CD*，即 *BC*：*CD*=8：7，而 2×（*BC*+*CD*）=75，所以 *BC*=20，以 *BC* 为底，对应高为 14，20×14=280，所以平行四边形 *ABCD* 的面积为 280 平方厘米.

5. 三角形 *ABC* 是直角边长为 4 厘米的等腰直角三角形，将三角形 *ABC* 向左平移 1 厘米得到三角形 *DEF*，那么，图中两块阴影部分的面积差是多少平方厘米？

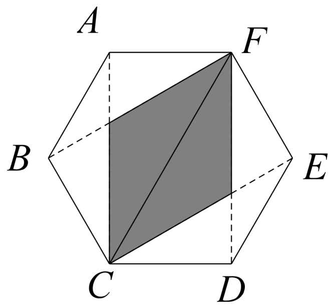


【解析】根据差不变，图中两块阴影部分的面积差等于三角形 *DEF* 和长方形 *ADEB* 的面积之差. $S_{长方形ABED}=1\times4=4$ (平方厘米)，$S_{三角形DEF}=4\times4\div2=8$ (平方厘米).因此阴影部分面积差为 $8-4$=4 (平方厘米).

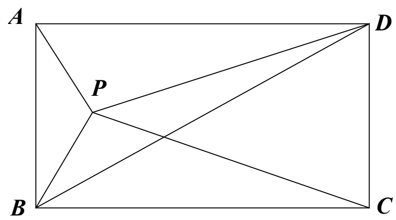
6. 如图，正六边形的面积为 6，那么阴影部分的面积是多少?



【解析】连接 *FC*，根据梯形蝴蝶定理，面积为 $\frac{4}{9}\times6=\frac{8}{3}$

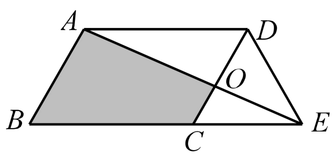


7. 如图，P 为长方形 $ABCD$ 内的一点.三角形 PAB 的面积为 5，三角形 PBC 的面积为 13.请问：三角形 PBD 的面积是多少?

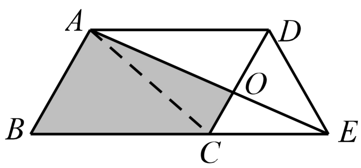


【解析】由于 $ABCD$ 是长方形，所以 $S_{\triangle APD}+S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$，而 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$，所以 $S_{\triangle APD}+S_{\triangle BPC}=S_{\triangle ABD}$，则 $S_{\triangle BPC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBD}$，所以 $S_{\triangle PBD}=S_{\triangle BPC}-S_{\triangle PAB}=13-5=8$.

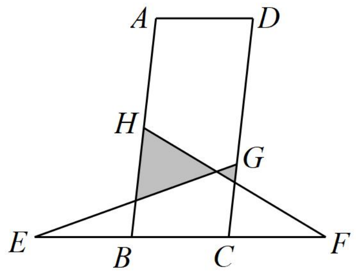
8. 已知 $ABCD$ 是平行四边形，$BC:CE=3:2$，三角形 ODE 的面积为 6 平方厘米．则阴影部分的面积是多少平方厘米?



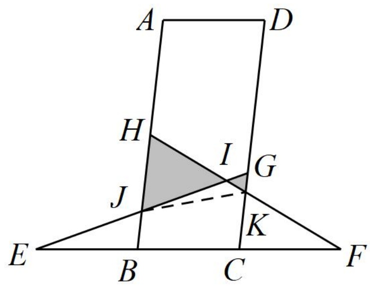
【解析】连接 AC．由于 $ABCD$ 是平行四边形，$BC:CE=3:2$，所以 $CE:AD=2:3$，根据梯形蝴蝶定理，$S_{\Delta COE}:S_{\Delta AOC}:S_{\Delta DOE}:S_{\Delta AOD}=2^2:2\times3:2\times3:3^2=4:6:6:9$，所以 $S_{\Delta AOC}=6$（平方厘米），$S_{\Delta AOD}=9$（平方厘米），又 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}=6+9=15$（平方厘米），阴影部分面积为 $6+15=21$（平方厘米）.



9. （超）题图是一顶帽子的截面图.其中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，H 为 AB 边上的中点，G 为 CD 边上靠近 C 点的三等分点，B、C 为 EF 边上靠近的三等分点，连接 EG、FH,HF 与 EG 相交于平行四边形内一点.已知图中的两个阴影三角形的面积相差 5 平方厘米，那么平行四边形 $ABCD$ 的面积为多少平方厘米?



【解析】如图，设 $AB=CD=12a$，则 $HB=6a$，$CK=3a$，$CG=4a$，所以 $KG=a$，$JB=2a$，$JH=4a$.三角形 KHJ 占平行四边形的面积的 $\frac{1}{6}$，三角形 JGK 占平行四边形的面积的 $\frac{1}{24}$，它们的面积差为 5，所以平行四边形的面积为 $5\div\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)=40$（平方厘米）.



分段计费作业及解析

1. 移动电信公司有两种优惠用户的计划，如下表：

	计划 A	计划 B
每月服务费	40 元	60 元
每月免费通话时间	起始 60 分钟	起始 200 分钟
以后每分钟通话费	0.5 元	0.6 元

请问：当用户的每月通话时间在多少分钟时，两种计划的付费是相等的？

【解析】若通话时间为 60 分钟到 200 分钟之间，则计划 B 的费用为 60 元，计划 A 的费用也为 60 元，则计划 A 中超过 60 分钟的部分为 $(60-40)\div 0.5=40$(分钟)，共 $40+60=100$(分钟)；

当通话时间在 200 分钟以上时，设通话时间为 x 分钟，根据费用相同列方程：

$40+(x-60)\times 0.5=60+(x-200)\times 0.6$

解得：$x=700$

综上：每月通话时间在 100 或 700 分钟时，两种计划的费用相等。

2. 为了增强公民的节约意识，市电力局制定了以下用电收费标准:每户每月用电如果不超过 100 度，那么每度按基本电费 0.53 元收费；超过 100 度而小于 150 度的部分,每度电费要比基本电费增加 20%;超过 150 度的部分，每度电费要比基本电费增加 50%．李明家上月付电费 103.88 元．请你算一算，李明家上月用电多少度？

【解析】由钱数知，用电量超过了 150 度。超过的部分为：

$(103.88-100\times 0.53-50\times 0.53\times 1.2)\div(0.53\times 1.5)=24$(度)；

共 150+24=174（度）

3. 通讯公司移动电话有两种计费方式：

①每月付 40 元月租费，每分钟收通话费 0.36 元；

②不收月租费，每分钟收通话费 0.56 元.

(1)如果每月通话 100 分钟，按计费方式①应该付多少钱？

(2)如果每月通话 300 分钟，哪一种计费方式便宜？

(3)小李买了一部新手机，通讯公司的业务员问小李准备采用哪种计费方式，小李希望你给他出出主意，并说明理由.

【解析】(1)76(元)

(2)第①种计费方式便宜

(3)如果小李每月通话少于 200 分钟，采用第①计费方式；如果小李每月通话等于 200 分钟，两种计费方式一样；如果小李每月通话等于 200 分钟，两种计费方式一样；如果小李每月通话多于 200 分钟，采用第②种计费方式.

4. 某市出租车收费标准如下：

里程	收费/元
3 千米及以下	6.00
3 千米以上，每增加 1 千米(不足 1 千米按 1 千米计算)	1.00

(1)车行驶的里程数为 15 千米时应收费多少元？

(2)现在有 30 元钱，可乘出租车的最大里程数为多少千米？

【解析】(1)分为两段进行计算： $6+1\times(15-2)=18$(元)

(2)易知，最大里程数超过 3 公里，超过 3 公里的部分为：$(30-6)\div 1=24$(千米)

共 $24+3=27$(公里)

5. 2008 年 3 月 1 日起，我国实施新的税率标准，费用扣除标准调高为 2000 元/月，工资、薪金税率表如下：

级别	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2000 元部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元部分	25
…	…	…

表中"全月应缴纳税所得额"是指从月工资、薪金收入中减去 2000 元后的余额，它与相应税率的乘积就是应交的税款数.则在这种税率实行期间：

(1)王先生某月的工资、薪金收入为 4480 元，该月他交纳的税款是多少元？

(2)张先生某月交纳了 1165 元个人所得税，该月张先生工资、薪金收入是多少元？

【答案】（1）247 元；（2）9700 元

【解析】（1）由于 $4480-2000=2480=500+1980=500+1500+480$

所以应交税款为：$500\times0.05+1500\times0.1+480\times0.15=247$ （元）；

（2）工资总额 2500 元时，需缴纳税款 25 元；

工资总额 4000 元时，需缴纳税款 $1500\times10\%+25=175$ （元）；

工资总额 7000 元时，需要缴纳税款 $175+3000\times0.15=625$ （元）；

工资总额为 22000 元时，需要缴纳税款：$15000\times0.2+625=3625$ （元）

所以张先生的工资应该再 7000 到 22000 元之间。由于 $\left(1165\text{-}625\right)\div20\%=2700$ （元）。

所以张先生的工资收入为 9700 元，薪金收入为：9700 元。

6. 龙泉乡水电站按户收取电费，具体规定是：如果每月用电不超过 24 度，就按每度 9 分钱收费；如果超过 24 度，超出的部分按每度 2 角收费。这个月小宇家比小达家多交了 9 角 6 分钱的电费（用电按整度计算）。问：小宇家和小达家各交了多少电费？

【解析】设月用电度数为 x 度，电费为 y 分

则 $y=\begin{cases}9x, & x\le 24\\ 24\times9+20(x-24), & x>24\end{cases}$

先用假设（反证）法判断两家用电量的范围：

若两家都未超过 24 度，则 $9\,|\,x_{宇}-x_{达}=96$，矛盾；

若两家都超过 24 度，则 $20(x_{宇}-x_{达})=96$，与 $x_{宇},x_{达}$ 都是整数矛盾，

所以小宇家用电超过 24 度，小达家用电未超过 24 度，所以

$24\times9+20(x_{宇}-24)-9x_{达}=96$
$\Rightarrow 9x_{达}+360=20x_{宇}\Rightarrow 20\mid x_{达}$

因为 $x_{达}\le 24$，所以 $\begin{cases}x_{达}=20\\x_{宇}=27\end{cases}$，所以小宇家交电费 $24\times9+20\times(27-24)=216+60=276$ 分，即 2 元 7 角 6 分；小达家交电费 $9\times20=180$ 分，即 1 元 8 角

7. 北京市出租车的起步价是 3 公里以内 10 元，3 公里后按每公里 2 元计费，当里程超过 15 公里后，超出部分按每公里 3 元计费。小悦、冬冬两人都从游乐园分别坐出租车回家，小悦比冬冬多花了 23 元。请问：小悦家距离游乐园最远是多少公里？（不足 1 公里按 1 公里计，假定两人回家一路上没有红绿灯，也没有堵车）
【解析】设公里数为 x，费用为 y 元，则

$$y=\begin{cases}10, & x<3\\10+2(x-3), & 3\le x<15\\10+2\times(15-3)+3(x-15), & x\ge15\end{cases}$$

化简得 $y=\begin{cases}10, & x<3\\2x+6, & 3\le x<15\\3x-11, & x\ge15\end{cases}$

设 $x_{悦}=a$， $x_{冬}=b$

为了使小悦家距离游乐场尽量远，则不妨设 $a\ge15$，

若 $3\le b<15$，则 $3a-11-(2b+6)=23\Rightarrow 3a=2b+40\Rightarrow 2\mid a$，由 b 的范围解得 $16\le a\le 23$，显然取 $a=22$
若 $b<15$，则 $3a-11-10=23\Rightarrow a=14<22$
综上，小悦家离游乐园最远 22 公里

8. （超）某商场进行酬宾，规定现金消费每满 50 元返回 10 元礼券，多出不足 50 元部分不计（比如消费 99 元只能返回 1 张 10 元礼券），用礼券产生的消费不参与返券。妈妈看中了 3 件商品，分别是 100 多元、200 多元、300 多元，且都是 10 的倍数，更巧的是，有两件商品的价格之和正好是整百。为了充分利用返券，妈妈打算先买其中的两件，然后兑换返券，这样买第三件商品的时候，就可以用上返券了，当然，如果返券不够买第三件，自己还得再掏一些钱。她合计了一下，这样安排的话，共有三种可能的消费结果：第一种恰好花 640 元，礼券也用完了；另外两种情况都要花 670 元，但最后又返回 40 元礼券。问：三种商品的价格分别是多少元？
【解析】640 元无返券，说明最后加钱不超过 50，必为第一件。

第二、三种合买最少返 100 元，最多返 120 元。所以第一种商品的价钱小于等于 170 元。

最后返 40 元券说明加钱大于等于 200，小于 250。

若最后买第二件商品，前两次返券最少返 80 元，所以第二件商品应为 280 元或 290 元。

若第二件商品为 280 元，则第一件与第三件的价钱和小于 450。最多花 650 元，不成立。

所以第二件商品为 290 元。

若第一件商品为 110 元，则合买一、二可返 80 元，第三次最多为 330 元，最多花 650 元，不成立。

所以第三件商品为 310 元。

此时，易得第一件商品为 160 元。

第十四讲 经济问题综合课后练习

1. 某商场将一套儿童服装按进价的50%加价后，再写上“大酬宾，八折优惠”，结果每套服装仍获利20元．这套服装的进价是多少元？

【答案】100

【解析】实际售价是进价的$1\times\left(1+50\%\right)\times80\%=120\%$，因此获利$20\%$，进价为$20\div20\%=100$元．

2. 有一批商品降价出售，如果减去定价的10%出售，可盈利215元；如果减去定价的20%出售，亏损125元．此商品的购入价是多少元？

【答案】2845

【解析】量率对应，定价为$\left(215+125\right)\div\left(20\%-10\%\right)=3400$元，购入价为$3400\times\left(1-10\%\right)-215=2845$元

3. 商店以每件50元的价格购进一批衬衫，售价为70元，当卖到只剩下7件的时候，商店以原售价的80%售出，最后商店一共获利702元，那么商店一共进了多少件衬衫？

【答案】40

【解析】最后7件每件售价$70\times80\%=56$元，获利$56-50=6$元，因此702元中有$6\times7=42$元是最后7件衣服的利润，余下的$702-42=660$元是其他衣服的利润．原售价卖出每件利润为$70-50=20$元，因此以原价卖出的有$660\div20=33$件，一共进了$33+7=40$件衬衫．

4. 某城市按以下规定收取每月的煤气费：用煤气量如果不超过60立方米，按每立方米0.8元收费；如果超过60立方米，超过部分按每立方米1.2元收费．已知某户4月份的煤气费平均每立方米0.88元，那么4月份该用户使用煤气多少立方米？

【答案】75

【解析】设该用户4月份用了x立方米煤气，则：

$$\begin{aligned}0.8\times60+1.2\times\left(x-60\right)&=0.88x\\0.32x&=24\\x&=75\end{aligned}$$

5. 两个班去旅游．现有甲、乙两个旅行社，每人150元．甲旅行社每人打9折，乙旅行社每班有两个免费名额．

⑴ 若每班18人，选择哪所旅行社比较便宜？

⑵ 若每班22人，选择哪所旅行社比较便宜？

⑶ 当每班多少人时，选择两所旅行社费用相等？

【答案】乙；甲；20

【解析】⑴甲旅行社：$150\times90\%\times18\times2=4860$元，乙旅行社$150\times\left(18-2\right)\times2=4800$元，乙旅行社比较便宜．

⑵ 甲旅行社：$150\times90\%\times22\times2=5940$元，乙旅行社$150\times\left(22-2\right)\times2=6000$元，甲旅行社比较便宜．

⑶ 设每班x人时，两所旅行社费用相等，那么有$2\times150\times90\%\times x=2\times150\times\left(x-2\right)$，解得$x=20$，即每班$20$人时两所旅行社费用相等．

6. 某公司要到外地去推销产品,每件产品成本为3000元．从公司到外地的距离是400千米，

运费为每件产品每运1千米收1.5元．如果在运输及销售过程中产品的损耗是10%，那么公司要想实现25%的利润率，零售价应是每件多少元？
【答案】5000
【解析】假设推销10件产品，运费$400\times1.5\times10=6000$元，总成本$3000\times10+6000=36000$元，损耗后剩下$10\times\left(1-10\%\right)=9$件产品，因此单价为$36000\times\left(1+25\%\right)\div9=5000$元．

7. 某中学高一年级春游，计划租用45座客车若干辆，则有15人没有座位；若租用同样数目的60座客车，则有一辆客车为空车，已知45座客车日租金为220元，60座客车日租金为300元．
（1）高一年级全级一共有多少人？
（2）如果你是年级负责人，怎样租车比较经济合算，说明理由．
【答案】240，1180
【解析】（1）设高一全年级有x人，则：
$$\frac{x-15}{45}=\frac{x}{60}+1$$
$$x=240$$
（2）45座客车平均每人$220\div45=\frac{44}{9}$元，60座客车平均每人$300\div60=5$元，所以尽量用45座客车：4辆45座客车与1辆60座客车最便宜，共1180元．

8. 水果店老板以2元一个的成本买入若干个苹果，按照定价卖了$\frac{4}{5}$后，决定将剩下的苹果进行优惠大处理，5个苹果卖2元，全部卖完之后，发现水果店老板不亏也不赚，请问：苹果最开始的定价为多少元一个？
【答案】2.4
【解析】设苹果最开始定价为x元，苹果有y个．
$$2y=x\times\frac{4}{5}y+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}y$$
$$x=2.4$$
9. 成都青年旅行社“五一”推出甲、乙两种优惠方案：甲：成都一日游，大人每位全票80元，小朋友四折；乙：成都一日游，团队5人以上（含5人）每位六折．
（1）李老师带5名小朋友游览，选哪种方案省钱？
（2）李老师和王老师带4名小朋友游览，选哪种方案省钱？
（3）张三、王五两位小朋友及各自的父母6人游览，选哪种方案省钱？
【解析】甲方案票价：大人每位全票80元，小朋友四折为80×0.4=32（元）；乙方案票价：团体5人以上（含5人）每位六折80×0.6=48（元）．
（1）李老师带5名小朋友游览
甲方案：1×80+80×0.4×5=240（元）；
乙方案：（1+5）×（80×0.6）=288（元）；
240＜288；
选甲方案省钱.
（2）李老师和王老师带4名小朋友游览
甲方案：2×80+80×0.4×4=288（元）；
乙方案：（2+4）×（80×0.6）=288（元）；
288=288；
选甲乙方案都可以.

（3）张三、王五两位小朋友及各自的父母6人游览

甲方案：$4\times80+80\times0.4\times2=384$（元）；

乙方案：$6\times$（80×0.6）$=288$（元）；

$384>288$；

选乙方案省钱.