第一讲分数运算与技巧（一）

知识点拨

分数是五年级数学知识的分水岭，由分数知识的引入，大量我们之前并不熟悉的模块知识开始走上数学的舞台.

1． 分数的意义：一条线段、一个图形、一个物体等都可以看作一个整体，把这个整体平均分成若干份，这样的一份或几份都可以用分数来表示.

2． 单位“1”：一个整体可以用自然数 1 来表示，通常把它叫做单位“1”.（也就是把什么平均分什么就是单位“1”.）

3． 分数单位：把单位“1”平均分成若干份，表示其中一份的数叫做分数单位．如$\frac{4}{5}$的分数单位是$\frac{1}{5}$.

4． 分数与除法

$A\div B=\frac{A}{B}$（B≠0，除数不能为 0，分母也不能够为 0）

例如：$4\div5=\frac{4}{5}$

5． 真分数和假分数、带分数

（1）真分数：分子比分母小的分数叫真分数．真分数<1.

（2）假分数：分子比分母大或分子和分母相等的分数叫假分数．假分数≥1

（3）带分数：带分数由整数和真分数组成的分数．带分数＞1.

（4）真分数＜1≤假分数　　　　真分数＜1＜带分数

6． 假分数与整数、带分数的互化

（1）假分数化为整数或带分数，用分子÷分母，商作为整数，余数作为分子，　如：

$\frac{10}{5}=10\div5=2$　　$\frac{21}{5}=21\div5=4\frac{1}{5}$

（2）整数化为假分数，用整数乘以分母得分子 如：

$2=\frac{8}{4}$　　　　$2\times4=8$（8 作分子）

（3）带分数化为假分数，用整数乘以分母加分子，得数就是假分数的分子，分母不变，

如：$5\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$　　　$5\times5+1=26$

（4）1 等于任何分子和分母相同的分数．如：

$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\ldots=\frac{100}{100}=\ldots$

7． 分数的基本性质：

分数的分子和分母同时乘以或除以相同的数（0 除外），分数的大小不变.

8． 最简分数：分数的分子和分母只有公因数 1，像这样的分数叫做最简分数.

一个最简分数，如果分母中除了 2 和 5 以外，不含其他的质因数，就能够化成有限小数.反之则不可以.

9． 约分：把一个分数化成和它相等，但分子和分母都比较小的分数，叫做约分.

如：$\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$

10． 通分：把异分母分数分别化成和原来相等的同分母分数，叫做通分．如：

$\frac{2}{5}$和$\frac{1}{4}$可以化成$\frac{8}{20}$和$\frac{5}{20}$

11．分数和小数的互化

（1）小数化为分数：数小数位数．一位小数，分母是 10；两位小数，分母是 100…

如：$0.3=\frac{3}{10}$　　$0.03=\frac{3}{100}$　　$0.003=\frac{3}{1000}$

（2）分数化为小数：

方法一：把分数化为分母是 10、100、1000…

如：$\frac{3}{10}=0.3$　　$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=0.6$　　$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0.25$

方法二：用分子÷分母

如：$\frac{3}{4}=3\div4=0.75$

（3）带分数化为小数：

先把整数后的分数化为小数，再加上整数

如：$2\frac{3}{10}=2+0.3=2.3$

12．倒数的定义：如果两个数相乘，乘积为 1，那么这两个数互为倒数．

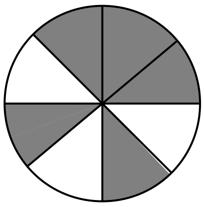
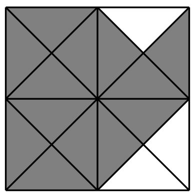
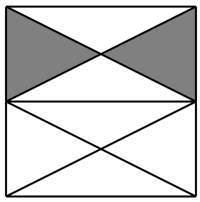
如：1 的倒数还是 1；2 的倒数是$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{7}$的倒数是 7；$\frac{8}{9}$的倒数是$\frac{9}{8}$．

注：0 没有倒数．

例题精讲

课前复习

(1)用分数表示下面各部分阴影部分．

(2)将单位“1”平均分成 10 份，取其中的 7 份，用分数表示为________，这个分数的分子是________，分母是________，它的分数单位是________．

(3)$\frac{7}{12}$表示的意义是将单位“1”平均分成________份，取其中的________份；

$\frac{5}{8}$表示的意义是将单位“1”平均分成________份，取其中的________份．

(4)一根铁丝长 4 米，将其平均分成 5 段，每段占全长的________，每段长________米．

(5)五年级有男生 25 人，女生 23 人，男生人数占全班人数的________．

(6)某班男生人数占全班的$\frac{5}{9}$，女生人数占全班的________，女生人数是男生的________．

补充：分数单位的概念把单位“1”平均分成若干份取其中的一份的数，叫做分数单位，它还有一个名称叫“埃及分数”，历史考证和相关传说，埃及同中国一样，也是世界上著名

的文明古国．人们在考察古埃及历史时注意到像阿基米德这样的数学巨匠，居然也研究过埃及分数．本世纪一些最伟大的数学家也研究埃及分数，例如，沃尔夫数学奖得主，保罗-欧德斯，他提出了著名的猜想$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，难倒了世界上第一流的数学家．

【例1】（1）将下面的假分数转化成带分数或整数．

$$\frac{7}{2},\ \frac{47}{21},\ \frac{64}{15},\ \frac{9}{8},\ \frac{75}{15}$$

（2）将下面的带分数转化为假分数．

$$3\frac{1}{3},\ 2\frac{3}{7},\ 1\frac{4}{5},\ 11\frac{1}{8},\ 10\frac{7}{12}$$

【巩固】（1）将下面的假分数转化成带分数或整数．

$$\frac{7}{4},\ \frac{87}{13},\ \frac{32}{15},\ \frac{9}{7},\ \frac{29}{19}$$

（2）将下面的带分数转化为假分数．

$$5\frac{1}{4},\ 2\frac{5}{9},\ 6\frac{2}{3},\ 7\frac{9}{13},\ 1\frac{7}{15}$$

【例2】（1）将下列分数约分成最简分数：

$$\frac{28}{36},\ \frac{32}{24},\ \frac{38}{57},\ \frac{91}{84}$$

（2）将下面几组分数进行通分：

$$①\frac{1}{6},\frac{3}{8} \qquad ②\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{12} \qquad ③\frac{7}{9},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{7}{12}$$

【巩固】（1）将下列分数约分成最简分数：

$$\frac{80}{14},\ \frac{34}{15},\ \frac{39}{69},\ \frac{91}{77}$$

（2）将下面几组分数进行通分：

$$①\frac{3}{4},\frac{2}{5} \qquad ②\frac{2}{6},\frac{1}{4},\frac{5}{8} \qquad ③\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{2}{5},\frac{7}{10}$$

【例3】将下列分数化为小数，小数化为分数．

（1）0.4=________

（2）0.25=________

（3）0.125=________

（4）$\frac{3}{5}=$________

（5）$\frac{3}{8}=$________

（6）$\frac{25}{4}=$________

【例4】填空：$\frac{9}{(\quad)}=\frac{3}{4}=\frac{(\quad)}{36}=12\div(\quad)=(\quad)$

【巩固】填空：$0.4=\frac{(\quad)}{5}=\frac{10}{(\quad)}=24\div(\quad)=(\quad)\div10$

【例5】求下列各数的倒数：

（1）$\frac{1}{10}$　（2）5　（3）$\frac{4}{3}$　（4）$3\frac{1}{7}$　（5）0.6

【巩固】求下列各数的倒数：

（1）$\frac{1}{3}$　（2）7　（3）$\frac{11}{9}$　（4）$4\frac{2}{11}$　（5）0.75

巅峰挑战

【挑战1】计算：（1） $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$　**（2）** $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}$

【解析】（1）原式$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{32}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{32}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{32}$

$=1-\frac{1}{32}$

$=\frac{31}{32}$

（2）原式$=\frac{1}{2}-\left(\frac{10}{60}+\frac{5}{60}+\frac{3}{60}+\frac{2}{60}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

【挑战2】计算：$1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+4\frac{1}{16}+5\frac{1}{32}+6\frac{1}{64}$

【解析】 原式$=21+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}-\frac{1}{64}\right)$

$=21+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)$

$=21+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}\right)$

$=21+\left(1-\frac{1}{64}\right)$

$=21\frac{63}{64}$

【挑战3】计算：

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\underline{\qquad\qquad}.$$

【解析】

原式$=1\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$

$-1\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{1}{6}$

登封造极

【超越1】分母是 100 的最简真分数一共有多少个？

【解析】 $100=2^2\times 5^2$，所以分子不能是 2 的倍数，也不能是 5 的倍数，1~100 中，2 的倍数有 50 个，5 的倍数有 20 个，但是 2 和 5 共同的倍数有 10 个，所以 2 或 5 的倍数一共是 $50+20-10=60$ 个，所以分母是 100 的最简真分数一共有 $100-60=40$ 个.

【超越2】所有分母小于 30 并且分母是质数的真分数相加，和是_________.

【解析】 小于 30 的质数有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29 共十个，分母为 17 的真分数相加，和等于

$$(\frac{1}{17}+\frac{16}{17})+(\frac{2}{17}+\frac{15}{17})+(\frac{3}{17}+\frac{14}{17})+\cdots\cdots+(\frac{8}{17}+\frac{9}{17})=8=\frac{17-1}{2}.$$

类似地，可以求出其它分母为质数的分数的和.因此，所求的和是

$$\frac{1}{2}+\frac{3-1}{2}+\frac{5-1}{2}+\frac{7-1}{2}+\frac{11-1}{2}+\frac{13-1}{2}+\frac{17-1}{2}+\frac{19-1}{2}+\frac{23-1}{2}+\frac{29-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+1+2+3+5+6+8+9+11+14=59\frac{1}{2}$$

笔记整理

第二讲 分数运算与技巧（二）

知识点拨

运算法则

一、分数的加减法则：

（1）同分母的分数相加减，只把分子相加减，分母不变.

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$$

（2）异分母的分数相加减，先通分，然后再加减.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5}{3\times5}+\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$$

通分即求最小公倍数，上面例子中分母 3 和 5 的最小公倍数是 15，所以通分后分母都为 15．再例：

$$\begin{array}{r|ll} 5 & 30 & 45 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

最小公倍数：$5\times3\times2\times3=90$

$$\frac{7}{30}-\frac{2}{45}=\frac{21}{90}-\frac{4}{90}=\frac{17}{90}$$

二、分数的乘除法则：

（1）分数乘整数法则：用分数的分子和整数相乘的积作分子，分母不变.

例：
$$\frac{2}{7}\times6=\frac{2\times6}{7}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$$
$$\frac{3}{5}\times5=\frac{3\times5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

（2）分数乘分数法则：用分子相乘的积作分子，分母相乘的积作分母.

例：
$$\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times3}{7\times5}=\frac{6}{35}$$
$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{3\times2}{10\times3}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

（3）分数除以整数（0 除外），等于分数乘以这个整数的倒数.

例：
$$\frac{2}{7}\div3=\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{21}$$
$$\frac{3}{10}\div3=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$$

（4）一个数除以分数，等于这个数乘以分数的倒数.

$\frac{2}{7}\div\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{10}{21}$

例：$\frac{3}{10}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{10}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

$2\div\frac{3}{5}=2\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$

注：（1）分数计算到最后，得数必须化成最简分数.

（2）分数的基本性质：分数的分子和分母同时乘以或除以同一个数（0 除外），分数的大小不变.

【教学提示】常见小数分数之间的互化需要背诵：

	$\frac{1}{5}=0.2=20\%$	$\frac{1}{8}=0.125=12.5\%$	
$\frac{1}{2}=0.5=50\%$	$\frac{2}{5}=0.4=40\%$	$\frac{3}{8}=0.375=37.5\%$	$\frac{1}{20}=0.05=5\%$
$\frac{1}{4}=0.25=25\%$	$\frac{3}{5}=0.6=60\%$	$\frac{5}{8}=0.625=62.5\%$	$\frac{1}{25}=0.04=4\%$
$\frac{3}{4}=0.75=75\%$	$\frac{4}{5}=0.8=80\%$	$\frac{7}{8}=0.875=87.5\%$	$\frac{1}{50}=0.02=2\%$

例题精讲

【例1】计算下列各式：

（1）$\frac{3}{7}+\frac{5}{14}$　　　　（2）$\frac{5}{8}+\frac{1}{6}$

（3）$\frac{3}{5}-\frac{2}{15}$　　　　（4）$\frac{5}{9}-\frac{1}{6}$

【巩固】计算下列各式：

（1）$\frac{6}{13}+\frac{5}{26}$　　　　（2）$\frac{5}{6}+\frac{1}{4}$

（3）$\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$　　　　（4）$\frac{5}{12}-\frac{2}{15}$

【例2】计算下列各式：

（1）$\frac{4}{5}\times 3$

（2）$\frac{7}{18}\times\frac{6}{35}$

（3）$\frac{5}{12}\div\frac{5}{4}$

（4）$\frac{12}{13}\div 8$

【巩固】计算下列各式：

（1）$\frac{18}{35}\times\frac{2}{5}$

（2）$\frac{2}{21}\times\frac{7}{8}$

（3）$\frac{15}{27}\div\frac{25}{9}$

（4）$\frac{23}{24}\div\frac{4}{5}$

【例3】计算下列各式：

（1）$\frac{5}{9}\times 9\div\frac{5}{9}\times 9$

（2）$\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)\div\frac{1}{210}$

【巩固】（1）$7\div\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\div\frac{1}{7}$

（2）$\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{24}\times\frac{1}{2}$

【例4】（1）$13\frac{1}{7}-2\frac{23}{33}-1\frac{10}{33}$

（2）$11\frac{2}{7}-2\frac{4}{5}+3\frac{5}{7}-\frac{1}{5}$

（3）$1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{3}$

（4）$3\frac{3}{8}\div6\frac{1}{4}$

【例5】（1）$1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{4}}}$

（2）$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{4}}}}$

【例6】（1）$37\times\frac{1}{7}+37\times\frac{4}{7}+37\times\frac{2}{7}$　　（2）$2015\times\frac{2013}{2014}$

（3）$2009\div2009\frac{2009}{2010}$　　（4）$132\frac{1}{130}\div131$

（5）$41\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+51\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+61\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}$

巅峰挑战

【挑战1】（1） $\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\cdots\left(1-\frac{1}{9}\right)}{0.1+0.2+0.3+\cdots0.9}$

（2） $1\div(2\div3)\div(3\div4)\div\cdots\div(99\div100)$

（3）$\left(2-1\div 2\right)\times\left(2-2\div 3\right)\times\left(2-3\div 4\right)\times\left(2-4\div 5\right)\times\cdots\times\left(2-2003\div 2004\right)$

【解析】（1）原式$=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{8}{9}}{\frac{9}{2}}=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{2}{81}$

（2）原式$=1\div\dfrac{2}{3}\div\dfrac{3}{4}\div\cdots\div\dfrac{99}{100}=1\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{100}{99}=50$

（3）原式$=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{5}{4}\times\dfrac{6}{5}\times\cdots\times\dfrac{2005}{2004}=\dfrac{2005}{2}$

【挑战2】 $\left(1+\dfrac{1}{51}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{51}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{52}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{52}\right)\times\cdots\times\left(1+\dfrac{1}{152}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{152}\right)$

【解析】原式$=\left(1+\dfrac{1}{51}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{52}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{53}\right)\times\cdots\times\left(1+\dfrac{1}{152}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{51}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{52}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{152}\right)$

$=\dfrac{50}{51}\times\dfrac{153}{152}$

$=\dfrac{75}{76}$

登封造极

【超越1】 $(1\dfrac{7}{2007}+3\dfrac{7}{669}+9\dfrac{7}{223})\div(1\dfrac{1}{2007}+3\dfrac{1}{669}+9\dfrac{1}{223})$

【解析】原式$=\left(1+3+9+\dfrac{7}{2007}+\dfrac{7}{669}+\dfrac{7}{223}\right)\div\left(1+3+9+\dfrac{1}{2007}+\dfrac{1}{669}+\dfrac{1}{223}\right)$

$=\left(13+\dfrac{7+21+63}{2007}\right)\div\left(13+\dfrac{1+3+9}{2007}\right)$

$=\dfrac{13\times 2007+91}{2007}\div\dfrac{13\times 2007+13}{2007}$

$=\dfrac{13\times\left(2007+7\right)}{2007}\div\dfrac{13\times\left(2007+1\right)}{2007}$

$=\dfrac{13\times 2014}{2007}\times\dfrac{2007}{13\times 2008}$

$=\dfrac{1007}{1004}$

【超越2】（1）$\dfrac{2014+2013\times2015}{2014\times2015-1}=$________.

（2）$\dfrac{6\times4014+18\times2008+\frac{1}{2}}{3\times4014+3\times6024+\frac{1}{4}}=$ ________.

【解析】（1）原式$=\dfrac{2014+(2014-1)\times2015}{2014\times2015-1}=\dfrac{2014+2014\times2015-2015}{2014\times2015-1}=1$

（2）原式$=\dfrac{2\times3\times4014+2\times9\times2008+2\times\frac{1}{4}}{3\times4014+9\times2008+\frac{1}{4}}=\dfrac{2\times\left(3\times4014+9\times2008+\frac{1}{4}\right)}{3\times4014+9\times2008+\frac{1}{4}}=2$

笔记整理

第三讲 分解质因数与因数个数定理

知识点拨

一、质因数与分解质因数

（1）**质因数**：如果一个质数是某个数的约数，那么就说这个质数是这个数的质因数.

（2）**分解质因数**：把一个合数用质因数相乘的形式表示出来，叫做分解质因数.

例如：$30=2\times3\times5$.其中 2、3、5 叫做 30 的质因数.又如$12=2\times2\times3=2^2\times3$，2、3 都叫做 12 的质因数，其中后一个式子叫做分解质因数的标准式.

（3）分解质因数的方法：**短除法**

例如：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

，（∟是短除法的符号）， 所以$12=2\times2\times3$；

二、因数个数定理

一个整数的约数的个数是在对其严格分解质因数后，将每个质因数的指数(次数)加 1 后所得的乘积.如:1400 严格分解质因数之后为$2^3\times5^2\times7$，所以它的约数有 (3+1)×(2+1)×(1+1)=4×3×2=24 个.(包括 1 和 1400 本身)

三、部分特殊数的分解

$111=3\times37$； $1001=7\times11\times13$； $11111=41\times271$； $10001=73\times137$； $1995=3\times5\times7\times19$； $1998=2\times3\times3\times3\times37$； $2007=3\times3\times223$； $2008=2\times2\times2\times251$； $10101=3\times7\times13\times37$.

约数个数的计算公式是本讲的一个重点和难点，授课时应重点讲解，公式的推导过程是建立在开篇讲过的数字“唯一分解定理”形式基础之上，结合乘法原理推导出来的，不是很复杂，建议给学生推导并要求其掌握. 难点在于公式的逆推，有相当一部分常考的偏难题型考察的就是对这个公式的逆用，即先告诉一个数有多少个约数，然后再结合其他几个条件将原数“还原构造”出来，或者是“构造出可能的最值”.

例题精讲

模块一 分解质因数

【例1】 9009 的所有不同质因数的和是________.

【解析】 因为$9009=9\times1001=3^2\times7\times11\times13$，质因数有 3，7，11，13，它们的和是$3+7+11+13=34$.

【巩固】分解质因数：

（1）280=____________________

（2）429=____________________

（3）1003=____________________

（4）1007=____________________

（5）2009=____________________

（6）11111=____________________

【例2】 四个连续自然数的积是 24024，那么这四个自然数的和为________．

【解析】 把 24024 分解质因数为：$2^3\times3\times7\times11\times13$，这 7 个因数要构成四个连续的自然数，则必有 11、13，中间缺的 12 由 $2\times2\times3$ 构造，剩下的 2×7 正好构造了 14，所以四个数为：11、12、13、14．它们的和为：$11+12+13+14=50$．

【巩固】已知三个连续偶数的积是 5760，那么这三个偶数分别是多少？

【解析】 把 5760 分解质因数为：$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times5$，这几个因数要构成三个连续的偶数，则必有 10 的倍数，又因为必有 9 的倍数，所以考虑这 3 个数中有 18，20，第三个数是 $5760\div20\div18=16$．所以这三个偶数分别是 16、18、20．

【例3】 将一个三位数的个位数字与百位数字对调位置，得到一个新的三位数．已知这两个三位数的乘积等于 52605，那么，这两个三位数的和等于________．

【解析】 把 52605 分解质因数为：$3\times3\times5\times7\times167$．要构成两个三位数，如果 167 单独构成一个三位数，剩下的因数构成 315，不符合题意．如果 167 和 3 构成 501，剩下的因数构成 105，符合题意，则这两个数的和为 $105+501=606$．

【例4】 自然数 a、b、c、d、e 都大于 1，其乘积 $abcde=2000$，则其和 $a+b+c+d+e$ 的最大值是________，最小值是________．

【解析】 $abcde=2000=2\times2\times2\times2\times5\times5\times5$，
要使它们的和最大则应该让其中四个尽量小，另一个尽量大，即
$abcde=2\times2\times2\times2\times5\times5\times5=2\times2\times2\times2\times125$，
所以和最大为 $2+2+2+2+125=133$．
要使它们的和最小则应该让这 5 个数尽量接近，
$abcde=2\times2\times2\times2\times5\times5\times5=4\times4\times5\times5\times5$，所以和最小 $4+4+5+5+5=23$．

【巩固】a、b、c、d 是四个不同的自然数，且 $a\times b\times c\times d=2790$，$a+b+c+d$ 最小是________．

【解析】 首先分解质因数，$2790=2\times3\times3\times5\times31$，包含 5 个质因数．易得 $2\times3=6$ 的值最小，所以四个因数可以是 $2790=6\times3\times5\times31$，$a+b+c+d=6+3+5+31=45$．

模块二 因数个数定理

【例5】 已知 $300=2\times2\times3\times5\times5$，则 300 一共有________个不同的因数．

【解析】 $3\times2\times3=18$ 个

【巩固】2020 的因数有________个．

【解析】 因为 $2020=2^2\times5\times101$，所以约数有 $(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$（个）

【例6】 已知 $300=2\times2\times3\times5\times5$，则 300 的因数中 3 的倍数有________个，6 的倍数有________个．

【解析】 9；6

【巩固】900 的因数中 5 的倍数有________个，9 的倍数有________个.

【解析】 18，9

巅峰挑战

【挑战1】下列两式中积的末尾各有多少个连续的 0？

（1）$1\times2\times3\times\cdots\times49\times50$

（2）$51\times52\times53\times\cdots\times129\times130$

【解析】（1）积 0 的个数取决于乘数中质因数 2 和 5 的个数，偶数数量很多，2 的数量是充足的，有质因数 5 的：5，10，15⋯50，共$50\div5=10$个，其中 25 和 50 中含有两个质因数 5（52），因此共有质因数 5 个数：$10+2=12$个，有 12 个连续的 0.
（2）同（1），有质因数 5 的：55，60，65⋯130，共$130\div5-10=16$个，其中 75，100，125 中含有两个质因数 5（52），125 中含有三个质因数 5（53），因此共有质因数 5 个数：$16+3+1=20$个，有 20 个连续的 0.

【挑战2】把若干个自然数 1、2、3、……连乘到一起，如果已知这个乘积的最末十三位恰好都是零，那么最后出现的自然数最小应该是多少？

【解析】乘积末尾的零的个数是由乘数中质因数 2 和 5 的个数决定的，有一对 2 和 5 乘积末尾就有一个零．由于相邻两个自然数中必定有一个是 2 的倍数，而相邻 5 个数中才有一个 5 的倍数，所以我们只要观察因数 5 的个数就可以了．$5=5\times1$，$10=5\times2$，$15=5\times3$，$20=5\times4$，$25=5\times5$，$30=5\times6$，……，发现只有 25、50、75、100、……这样的数中才会出现多个质因数 5，乘到 55 时共出现$11+2=13$个因数 5，所以至少应当写到 55.

【挑战3】自然数 *N* 有 45 个正因数，*N* 的最小值为________.

【解析】由于$45=45\times1=15\times3=9\times5=5\times3\times3$，根据约数个数公式，自然数 N 可能分解成a^{44}、$a^{14}\times b^2$、$a^8\times b^4$、$a^4\times b^2\times c^2$等形式，在以上各种形式下，N 的最小值分别为2^{44}、$2^{14}\times3^2$、$2^8\times3^4$、$2^4\times3^2\times5^2$，比较这些数的大小，可知$2^{44}>2^{14}\times3^2>2^8\times3^4>2^4\times3^2\times5^2$，所以最小值是$2^4\times3^2\times5^2=3600$.

登峰造极

【超越1】在 1 到 100 中，恰好有 6 个约数的数有多少个？

【解析】$6=6\times1=2\times3$，故 6 只能表示为$(5+1)$或$(1+1)\times(2+1)$，所以恰好有 6 个约数的数要么能表示成某个质数的 5 次方，要么表示为某个质数的平方再乘以另一个质数，100 以内符合前者的只有 32，符合后者的数枚举如下：

$2^2\times3$　$2^2\times5$　$2^2\times7$　$2^2\times11$　$2^2\times13$　$2^2\times17$　$2^2\times19$　$2^2\times23$　⋯8个

$3^2\times2$　$3^2\times5$　$3^2\times7$　$3^2\times11$　⋯4个

$5^2\times2$　$5^2\times3$　⋯2个

$7^2\times2$　⋯1个

所以符合条件的自然数一共有$1+8+4+2+1=16$个.

【超越2】1001 的倍数中，共有________个数恰有 1001 个约数.

【解析】 1001 的倍数可以表示为$1001k$，由于$1001=7\times11\times13$，如果 k 有不同于 7，11，13 的质因数，那么$1001k$ 至少有 4 个质因数，将其分解质因数后，根据数的约数个数的计算公式，其约数的个数为$\left(a_1+1\right)\left(a_2+1\right)\left(a_3+1\right)\left(a_4+1\right)\cdots\left(a_n+1\right)$，其中$n\geq4$．

如果这个数恰有 1001 个约数，则 $\left(a_1+1\right)\left(a_2+1\right)\left(a_3+1\right)\left(a_4+1\right)\cdots\left(a_n+1\right)=1001=7\times11\times13$，但是 1001 不能分解成 4 个大于 1 的数的乘积，所以$n\geq4$时不合题意，即 k 不能有不同于 7，11，13 的质因数．那么$1001k$ 只有 7，11，13 这 3 个质因数．设$1001k=7^a\times11^b\times13^c$，则 $\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=1001$，$a+1$、$b+1$、$c+1$分别为 7，11，13，共有$3!=6$种选择，每种选择对应一个$1001k$，所以 1001 的倍数中共有 6 个数恰有 1001 个约数．

第四讲 加乘原理与复杂枚举

知识点拨

计数模块是高年级学生最为薄弱的模块之一，我们无疑要在 5 年级初就要把基础夯实.

一、加乘原理概念

生活中常有这样的情况：在做一件事时，有几类不同的方法，在具体做的时候，只要采用其中某一类中的一种方法就可以完成，并且这几类方法是互不影响的．那么考虑完成这件事所有可能的做法，就要用到加法原理来解决．还有这样的一种情况：就是在做一件事时，要分几步才能完成，而在完成每一步时，又有几种不同的方法．要知道完成这件事情共有多少种方法，就要用到乘法原理来解决．

二、加乘原理应用

应用加法原理和乘法原理时要注意下面几点：

（1）加法原理是把完成一件事的方法分成几类，每一类中的任何一种方法都能完成任务，所以完成任务的不同方法数等于各类方法数之和．

（2）乘法原理是把一件事分几步完成，这几步缺一不可，所以完成任务的不同方法数等于各步方法数的乘积．

（3）在很多题目中，加法原理和乘法原理都不是单独出现的，这就需要我们能够熟练的运用好这两大原理，综合分析，正确作出分类和分步．

加法原理运用的范围：完成一件事的方法分成几类，每一类中的任何一种方法都能完成任务，这样的问题可以使用加法原理解决．我们可以简记为：“**加法分类，类类独立**”．

乘法原理运用的范围：这件事要分几个彼此互不影响的独立步骤来完成，这几步是完成这件任务缺一不可的，这样的问题可以使用乘法原理解决．我们可以简记为：“**乘法分步，步步相关**”．

例题精讲

模块一　加乘原理运用

【例1】 商店里有 2 种巧克力糖：牛奶味、榛仁味；有 3 种水果糖：苹果味、梨味、橙味．小胖想买一些糖送给他的朋友．

（1）如果小胖只买一种糖，他有几种选法？

（2）如果小胖想买水果糖、巧克力糖各1种，他有几种选法？

【解析】(1) 小胖只买一种糖，完成这件事一步即可完成，有两类办法：第一类是从 2 种巧克力糖中选一种有 2 种办法；第二类是从 3 种水果糖中选一种，有 3 种办法．因此，小胖有 2+3=5 种选糖的方法．

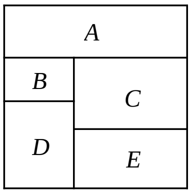
(2)小胖完成这件事要分两步，每步分别有 2 种、3 种方法，因此有 $3\times2=6$ 种方法．

【例2】 从 2，3，5，7，11 这五个数中，任取两个不同的数分别当作一个分数的分子与分母，这样的分数有________个，其中的真分数有________个．

【解析】第一问要用乘法原理，当分子有 5 种可能时，分母有 4 种可能，即 $5\times4=20$ 种，所以这样的分数有 20 个．第二问中，分母为 3 的真分数有 1 个，分母为 5 的真分数

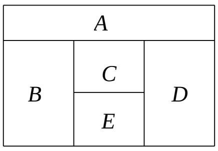
有 2 个，分母为 7 的真分数有 3 个，分母为 11 的真分数有 4 个，所以真分数共有 $1+2+3+4=10$ 个.

【例3】 如图，一张地图上有五个国家 A，B，C，D，E，现在要求用四种不同的颜色区分不同国家，要求相邻的国家不能使用同一种颜色，不同的国家可以使用同—种颜色，那么这幅地图有多少着色方法？



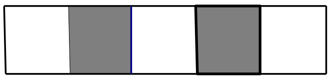
【解析】 第一步，给 A 国上色，可以任选颜色，有四种选择；
第二步，给 B 国上色，B 国不能使用 A 国的颜色，有三种选择；
第三步，给 C 国上色，C 国与 B，A 两国相邻，所以不能使用 A，B 国的颜色，只有两种选择；
第四步，给 D 国上色，D 国与 B，C 两国相邻，因此也只有两种选择；
第五步，给 E 国上色，E 国与 C，D 两国相邻，有两种选择. 共有 $4\times3\times2\times2\times2=96$ 种着色方法.

【巩固】用五种颜色给右图的五个区域染色，每个区域染一种颜色，相邻的区域染不同的颜色. 问：共有多少种不同的染色方法？



【解析】 本题与上一题例 3 表面上十分相似，但解法上却不相同. 因为上一题，不是环形染色问题，而本例涉及到环形染色，所以要分区域 A 与区域 E 的颜色相同与不同两种情况. 当区域 A 与区域 E 颜色相同时，A 有 5 种颜色可选；B 有 4 种颜色可选；C 有 3 种颜色可选；D 也有 3 种颜色可选. 根据乘法原理，此时不同的染色方法有 $5\times4\times3\times3=180$（种）. 当区域 A 与区域 E 颜色不同时，A 有 5 种颜色可选；E 有 4 种颜色可选；B 有 3 种颜色可选；C 有 2 种颜色可选；D 有 2 种颜色可选. 根据乘法原理，此时不同的染色方法有 $5\times4\times3\times2\times2=240$（种）.
再根据加法原理，不同的染色方法共有 $180+240=420$（种）.

【例4】 将 2011，2012，2013，2014，2015 分别填入右图 1×5 的格子中，要求填在黑格里的数比它旁边的两个数都大. 共有________种不同的填法.



【解析】 填在黑格里的数是 5 和 4 时，不同的填法有 $2!\times3!=12$(种)；
填在黑格里的数是 5 和 3 时，不同的填法有 $2\times2=4$(种). 共有不同填法 $12+4=16$(种).

模块二　枚举法

【例5】 6 份同样的礼物全部分给 4 个孩子，使每个孩子至少获得 1 份礼物的不同分法有

________种.

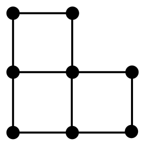
【解析】 $6-4=2$，在先给每个孩子 1 份礼物之后还多出 2 份礼物，这 2 份礼物可以只给 1 个孩子，或者分给 2 个孩子．在前一种情形，得到 $2+1=3$ 份礼物的可以是 4 个孩子中的任意一个，有 4 种分法．在后一种情况下，设这 4 个孩子名为甲、乙、丙、丁，则多得到礼物的 2 个孩子可能是（甲，乙）、(甲，丙)、(甲，丁)、(乙，丙)、(乙，丁)、(丙，丁)，共有 6 种分法．合计有 $4+6=10$ 种分法.

【例6】 满足下面性质的数称为好数，它的个位比十位大，十位比百位大，百位比千位大，并且相邻两位数字差不超过 2．例如 1346 为好数，3579 为好数，但 1456 就不是好数．那么有________四位好数.

【解析】 记千位数字与百位数字之差为 a，百位数字与十位数字之差为 b，十位数字与个位数字之差为 c，则 a、b、c 取值均为 1 或者 2.
如果 a、b、c 都是 2，那么千位数字不能超过 $9-2\times3=3$，有 3 个这样的好数.
如果 a、b、c 中有两个是 2，一个是 1，那么 a、b、c 有三种排列方法，而千位数字又可以有 $9-2-2-1=4$ 种可能，所以有 $3\times4=12$ 个这样的好数.
如果 a、b、c 中有一个是 2，两个是 1，那么 a、b、c 有三种排列方法，而千位数字又可以有 $9-2-1-1=5$ 种可能，所以有 $3\times5=15$ 个这样的好数.
如果 a、b、c 都是 1，那么千位数字不能超过 $9-1\times3=6$，有 6 个这样的好数.
所以，满足题目要求的好数共有 $3+12+15+6=36$ 个.

巅峰挑战

【挑战1】如图，拼在一起的 3 个小正方形共有 8 个顶点（图中的实心圆点），那么通过其中至少 2 个点的直线共有________条.



【解析】 我们按照直线的倾斜程度分类来数．从图中可以看出通过至少两个正方形顶点的水平直线和竖直直线各有 3 条．如图 1，由一个小正方形的对角线延伸出去的直线有 6 条．图 2 说明由 1×2 长方形的对角线延伸出去的直线也有 6 条．合计 $3\times2+6+6=18$ 条.

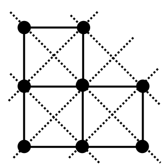


图 1

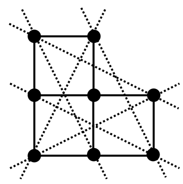
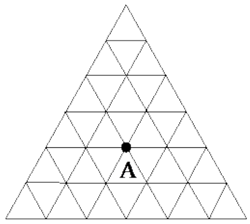


图 2

【挑战2】如图所示，每个小正三角形边长为 1，小虫每步走过 1，从 A 出发，走 4 步恰好回到 *A* 的路有（　　）条．(途中不再回 *A*)



【解析】 因为第一、三步到的点一定是以 A 为中心的六边形的六个顶点，根据一定的规则进行计数：

(1)第一步与第三步是同一个点的情况有：$6\times5=30$（种）；

(2)第一步与第三步不是同一个点的情况有：$4\times6=24$（种）；

所以共有 $30+24=54$（种）.

登峰造极

【超越1】数 1447，1351，1997，…有某些共同点，即，每个数都是以 1 为首位的四位数且每个数都恰好有两个数字相同．那么这样的数一共有________个．

【解析】 第 1 类：两个相同的数字是 1．因为有一个 1 必须在首位，所以另一个 1 有 3 种选择，剩下两位可以在 0、2、3、4、5、6、7、8、9 中选择，有 $9\times8=72$ 种，一共有 $3\times72=216$ 种；

第 2 类：两个相同的数字不是 1．那么这个相同的数字有 9 种选择，剩下一位有 8 种选择，排序的方式有 3 种，所以一共有 $9\times8\times3=216$ 种；

因此，一共有 $216+216=432$ 个满足条件的四位数．

【超越2】某一天中，经理有 4 封信要交给打字员打．每次他都将要打的信放在打字员信堆的上面，打字员有时间就将信堆最上面的信取来打，假定 4 封信按经理放在信堆上时间的先后顺序依次编号为 1，2，3，4，则打字员所有可能的打信顺序共有________种．（如 1234，4321 是可能打信的顺序，但 4123 不可能．）

【解析】 首先需要明确的是：由打字员打信的方式决定了所有排在一封信后面的比其编号小的那些信必须是倒序排列的．通过枚举 1，2，3，4 的各种排列，并逐个检验是否具有上述性质得到所有可能的情况是：1234，1243，1324，1342，1432，2134，2143，2314，2341，2431，3214，3241，3421，4321，共 14 种．

笔记整理

第五讲 分数、小数及整数混合运算

知识点拨

分数是小学阶段的关键知识点，在小学的学习有分水岭一样的阶段性标志，许多难题也是从分数的学习开始遇到的．天下计算唯快不破，计算的至高境界是又准又快，却不一定依照计算技巧．这只有通过不断的计算和揣摩，方可达成！

分数基本运算的常考题型有

（1）分数的四则混合运算

（2）分数与小数混合运算，分化小与小化分的选择

（3）复杂分数的化简

（4）繁分数的计算

分数与小数混合运算的技巧

在分数、小数的四则混合运算中，到底是把分数化成小数，还是把小数化成分数，这不仅影响到运算过程的繁琐与简便，也影响到运算结果的精确度，因此，要具体情况具体分析，而不能只机械地记住一种化法：小数化成分数，或分数化成小数．

技巧 1：一般情况下，在加、减法中，分数化成小数比较方便．

技巧 2：在加、减法中，有时遇到分数只能化成循环小数时，就不能把分数化成小数．此时要将包括循环小数在内的所有小数都化为分数．

技巧 3：在乘、除法中，一般情况下，小数化成分数计算，则比较简便．

技巧 4：在运算中，使用假分数还是带分数，需视情况而定．

技巧 5：在计算中经常用到除法、比、分数、小数、百分数相互之间的变换，把这些常用的数互化数表化对学习非常重要．

$\frac{1}{2}=0.5=50\%$

$\frac{1}{4}=0.25=25\%$

$\frac{3}{4}=0.75=75\%$

$\frac{1}{5}=0.2=20\%$

$\frac{2}{5}=0.4=40\%$

$\frac{3}{5}=0.6=60\%$

$\frac{4}{5}=0.8=80\%$

$\frac{1}{8}=0.125=12.5\%$

$\frac{3}{8}=0.375=37.5\%$

$\frac{5}{8}=0.625=62.5\%$

$\frac{7}{8}=0.875=87.5\%$

$\frac{1}{20}=0.05=5\%$

$\frac{1}{25}=0.04=4\%$

$\frac{1}{50}=0.02=2\%$

例题精讲

【例1】 计算：$\frac{4}{15}\div 0.32+\frac{5}{9}\times 0.375$

【解析】 原式$=\frac{4}{15}\div\frac{8}{25}+\frac{5}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{6}+\frac{5}{24}=1\frac{1}{24}$

【巩固】计算：$5.2\div 3\frac{1}{5}-1\frac{2}{3}\times 0.7$

【解析】原式$=\frac{52}{10}\div\frac{16}{5}-\frac{5}{3}\times\frac{7}{10}=\frac{52}{10}\times\frac{5}{16}-\frac{5}{3}\times\frac{7}{10}=\frac{13}{8}-\frac{7}{6}=\frac{5}{8}-\frac{1}{6}=\frac{11}{24}$

【例2】 计算：$99\times\frac{5}{8}-0.625\times 68+6.25\times 0.1=$________

【解析】原式$=99\times\frac{5}{8}-\frac{5}{8}\times 68+\frac{5}{8}\times 1=\frac{5}{8}\times(99-68+1)=\frac{5}{8}\times 32=20$

【巩固】计算：$2005\times\frac{3}{8}-0.375\times 1949+3.75\times 2.4$

【解析】 原式$=2005\times\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\times 1949+\frac{3}{8}\times 24$

$=\left(2005-1949+24\right)\times\frac{3}{8}$

$=80\times\frac{3}{8}$

$=30$

【例3】 计算：$(20\frac{94}{95}\times 1.65-20\frac{94}{95}+\frac{7}{20}\times 20\frac{94}{95})\times 47.5\times 0.8\times 2.5$

【解析】 原式$=20\frac{94}{95}\times(1.65-1+0.35)\times 47.5\times(0.8\times 2.5)$

$=20\frac{94}{95}\times 47.5\times 2$

$=(20+\frac{94}{95})\times 95$

$=1994$

【例4】 计算：$\left[8.6-3\frac{4}{5}\times\left(3\frac{5}{8}-3.625\right)\right]\div 10=$________

【解析】原式$=\left(8.6-3\frac{4}{5}\times 0\right)\div 10=8.6\div 10=0.86$

【巩固】计算下面两题：

（1）$\left(5\frac{5}{9}-0.8+2\frac{4}{9}\right)\times\left(7.6\div\frac{4}{5}+2\frac{2}{5}\times 1.25\right)=$__________

【解析】原式$=\left(5\frac{5}{9}+2\frac{4}{9}-0.8\right)\times\left((7.6+2.4)\times\frac{5}{4}\right)$

$$=(8-0.8)\times\left(10\times\frac{5}{4}\right)$$
$$=(8-0.8)\times 12.5$$
$$=8\times 12.5-0.8\times 12.5$$
$$=100-10$$
$$=90$$

（2）$\frac{1}{4}\times\left(4.85\div\frac{5}{18}-3.6+6.15\times 3\frac{3}{5}\right)+\left[5.5-1.75\times\left(1\frac{2}{3}+\frac{19}{21}\right)\right]$

【解析】本题观察发现除以$\frac{5}{18}$相当于乘以3.6则公因数就出来了

$$\frac{1}{4}\times\left(4.85\div\frac{5}{18}-3.6+6.15\times 3\frac{3}{5}\right)+\left[5.5-1.75\times\left(1\frac{2}{3}+\frac{19}{21}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(4.85\times 3.6-1\times 3.6+6.15\times 3.6\right)+\left(5.5-\frac{7}{4}\times\frac{5}{3}-\frac{7}{4}\times\frac{19}{21}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(4.85-1+6.15\right)\times 3.6+\left(5.5-\frac{35}{12}-\frac{19}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times 36+5.5-\frac{54}{12}=9+5.5-4.5=10$$

【例5】 计算：$\frac{3\frac{3}{4}\times 0.2}{1.35}\times 5.4$

【解析】 根据题意，有：$\frac{3\frac{3}{4}\times 0.2}{1.35}\times 5.4=\frac{\frac{15}{4}\times\frac{1}{5}}{\frac{27}{20}}\times\frac{27}{5}=\frac{15}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=3$

【巩固】计算$\frac{3\frac{3}{4}\times 0.2}{1.38}\times 5.84$

【解析】原式$=\frac{3\frac{3}{4}\times 0.2}{1.38}\times 5.84$

$$=\frac{\frac{15}{4}\times\frac{1}{5}}{\frac{69}{50}}\times 5\frac{21}{25}$$
$$=\frac{15}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{50}{69}\times\frac{146}{25}$$
$$=\frac{73}{23}$$

【例6】 解方程：$\frac{2018}{2019}\times 2020=\frac{2018}{2019}+x$

【解析】 $\frac{2018}{2019}\times 2020=\frac{2018}{2019}+x$

$$\frac{2018}{2019}\times 2020-\frac{2018}{2019}=x$$

$$\frac{2018}{2019}\times\left(2020-1\right)=x$$

$$2018=x$$

$$x=2018$$

【巩固】解方程：$5-\frac{x}{3}=\frac{x-5}{2}$

【解析】$5-\frac{x}{3}=\frac{x-5}{2}$

$$\left(5-\frac{x}{3}\right)\times 6=\left(\frac{x-5}{2}\right)\times 6$$

$$30-2x=3x-15$$

$$45=5x$$

$$x=9$$

巅峰挑战

【挑战1】 计算：$\frac{1}{2004^2-2003\times\left(2004^2+2005\right)}=$________.

【解析】 原式$=\frac{1}{2004^3-2003\times\left(2004^2+2005\right)}$

$$=\frac{1}{2004^3-2003\times 2004^2-2003\times 2005}$$

$$=\frac{1}{2004^2-2003\times 2005}$$

$$=\frac{1}{2004^2-2003\times(2004+1)}$$

$$=\frac{1}{2004^2-2003\times 2004-2003}$$

$$=\frac{1}{2004\times(2004-2003)-2003}$$

$$=\frac{1}{2004-2003}=1$$

【挑战2】 如果$15.6\div\left[2\frac{2}{3}\times\left(1.625+\triangledown\right)-1\frac{1}{10}\right]-\frac{4}{15}\div\frac{2}{3}=3\frac{3}{5}$**，则**$\triangledown=$________.

【解析】 原式可化为

$$15.6\div\left[\frac{8}{3}\times\left(\frac{13}{8}+\triangledown\right)-1.1\right]=4$$

$$3.9=\frac{8}{3}\times\left(\frac{13}{8}+\triangledown\right)-1.1$$

$$5=\frac{13}{3}+\frac{8}{3}\triangledown$$

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{3}\triangledown$$

$$\triangledown=\frac{1}{4}$$

登峰造极

【超越1】 计算： $\dfrac{9\frac{1}{4}\times9.8+9.25\div5-2.5}{6\frac{3}{4}\div3}-\left(\dfrac{5}{16}+0.125\right)\times64$

【解析】 原式 $=\dfrac{9.25\times9.8+9.25\times0.2-2.5}{\frac{27}{4}\times\frac{1}{3}}-\dfrac{5}{16}\times64-\dfrac{1}{8}\times64$

$=\dfrac{92.5-2.5}{\frac{9}{4}}-20-8$

$=90\times\dfrac{4}{9}-28$

$=12$

【超越2】计算： $3\frac{3}{5}\times2345+5555\div\dfrac{25}{256}+654.3\times36$

【解析】 原式 $=3.6\times2345+1111\times\dfrac{256}{5}+6543\times3.6$

$=3.6\times(2345+6543)+1111\times\dfrac{256}{5}$

$=3.6\times8888+1111\times\dfrac{256}{5}$

$=3.6\times8888+8888\times\dfrac{32}{5}$

$=8888\times(3.6+\dfrac{32}{5})$

$=88880$

笔记整理

第六讲 比与比例（1）

知识点拨

一、比的基本概念：

（一）比：a,b 是两个数或两个同类的量，将 a 与 b 相除，叫做 a 与 b 的比.

记作 $a:b$ 或写作 $\frac{a}{b}$.其中 $b\neq 0$,读作 a 比 b 或 a 与 b 的比.

a 叫做比的**前项**，b 叫做比的**后项**，前项 a 除以后项 b 所得的**商**叫作**比值**.

（二）比、分数和除法的关系：

比的前项相当与分数的分子和除式中的被除数；

比的后项相当于分数的分母和除式中的除数；

比值相当于分数的分数值和除式中的商.

$$\begin{cases} \text{比：前项：后项=比值} \\ \text{分数：}\dfrac{\text{分子}}{\text{分母}}=\text{分数值} \\ \text{除：被除数}\div\text{除数=商} \end{cases}$$

（三）比的基本性质：

比的前项和后项同时乘以或除以相同的数（0 除外），比值不变.即

$a:b=ka:kb=\frac{a}{k}:\frac{b}{k}(k\neq 0)$.运用这个性质，可以把比化为最简整数比.

（四）连比的性质：

1）如果 $a:b=m:n,b:c=n:k$.那么 $a:b:c=m:n:k$

2）如果 $k\neq 0$，那么 $a:b:c=ak:bk:ck=\frac{a}{k}:\frac{b}{k}:\frac{c}{k}$

二、比例的应用：

（一） 如果 $a:b=c:d$，那么说 a、b、c、d 成比例，也就是表示两个比相等的式子叫做比例，其中 a、b、c、d 分别叫做第一、二、三、四比例项，第一比例项 a 和第四比例项 d 叫做比例外项，第二比例项 b 和第三比例项 c 叫做比例内项.

如果两个比例内项相同，即 $a:b=b:c$，那么把 b 叫做 a 和 c 的比例中项.

（二）比例的基本性质

如果 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$,即两个外项的积等于两个内向的积.

（三）**解比例**

根据比例的基本性质，如果已知比例中的任何三项，就可以求出这个数比例中的另外

一个未知项.求比例中的未知项，叫做解比例.

例题精讲

模块一　比例的认识

【例1】求下列各个比的比值.

（1）$1\frac{4}{5}:\frac{2}{7}$　　（2）18 秒∶1.5 分钟

【解析】（1）$6\frac{3}{10}$；（2）$\frac{1}{5}$

【巩固】化简下列各比.

（1）0.65:1.3　　（2）1.25 米∶375 厘米

【解析】（1）1∶2;（2）1：3

【例2】（1）比的后项是$\frac{5}{7}$，　比值是$\frac{3}{2}$　，那么比的前项是________.

（2）把 20 克糖溶入 100 克水中，糖与糖水的比为________.

（3）如果一只鸡重 2.6 千克，一个鸡蛋重 50 克，那么鸡的重量是鸡蛋的重量的________倍，鸡蛋的重量是鸡的重量的________（填几分之几）.

【解析】（1）$\frac{15}{14}$；（2）1：6;（3）52,$\frac{1}{52}$

【巩固】（1）从学校到书城，小明走了 30 分钟，小强走了 25 分钟，小明与小强的平均速度的比值是________.

（2）3 与 2 之比的比值是 1.5，还有几对数的比值是 1.5？请写出三对：__________________.

【解析】（1）$\frac{5}{6}$；（2）答案不唯一；

【例3】解下列方程.

（1）$x:3\frac{1}{2}=2$　　（2）$3\frac{1}{2}:x=2$

（3）$x:4.8=5:2$　　（4）$\frac{20}{x}=\frac{4}{11}$

【解析】（1）$x=7$；（2）$x=\frac{7}{4}$；（3）$x=12$；（4）$x=55$

【巩固】 (1)小明的爸爸身高 1.76 米.如果小明与他爸爸的身高之比为 19:22，那么小明的身高是________.

(2)在ΔABC中，$\angle B$∶$\angle A$＝3∶5，若$\angle A$＝45 度，则$\angle B$＝________.

(3)已知$x:2y=3:4$，则$x:y$＝________.

【解析】（1）1.52 米；(2)27°；（3）3:2

模块二　划连比

【例4】(1)已知$a:b=2:3$，$b:c=4:5$，求$a:b:c$.

(2)已知$x:y=0.75:2\frac{1}{2}$，$y:z=5:3\frac{3}{4}$，求$x:y:z$.

【解析】(1)$8:12:15$;(2)6∶20∶15

【巩固】已知$a:b=5:18$，$b:c=27:40$，求$a:b:c$.

【解析】15∶54∶80

【例5】甲、乙、丙三个数，已知甲:$(乙+丙)=4:3$，乙:丙$=2:7$，求甲:乙:丙.

【解析】 由乙:丙$=2:7$可得到乙:$(乙+丙)=2:9$，丙:$(乙+丙)=7:9$，而甲:$(乙+丙)=4:3$，所以：甲：乙：丙= $\frac{4}{3}:\frac{2}{9}:\frac{7}{9}$=12:2:7.

【例6】已知甲、乙、丙三个数，甲的一半等于乙的 2 倍也等于丙的$\frac{2}{3}$，那么甲的$\frac{2}{3}$、乙的 2 倍、丙的一半这三个数的比为多少？

【解析】甲的一半、乙的 2 倍、丙的$\frac{2}{3}$这三个数的比为 1：1：1，所以甲、乙、丙这三个数的比为$\left(1\div\frac{1}{2}\right):(1\div 2):\left(1\div\frac{2}{3}\right)$即$2:\frac{1}{2}:\frac{3}{2}$，化简为 4：1：3，那么甲的$\frac{2}{3}$、乙的 2 倍、丙的一半这三个数的比为$\left(4\times\frac{2}{3}\right):(1\times 2):\left(3\times\frac{1}{2}\right)$即$\frac{8}{3}:2:\frac{3}{2}$，化简为 15：12：9.

巅峰挑战

【挑战1】纸箱里有红绿黄三色球，红色球的个数是绿色球的$\frac{3}{4}$，绿色球的个数与黄色球个数的比是 4：5，已知绿色球与黄色球共 81 个，问三色球各有多少个？

【解析】 红：绿=3：4，绿：黄=4：5，那么红：绿：黄=3：4：5，那么 1 份=$81\div(4+5)$=9 个，红：9×3=27 个，绿：9×4=36 个，黄：9×5=45 个.

【挑战2】一种药水是用药物和水按 3：400 配制成的.

（1）要配制这种药水 1612 千克，需要药粉多少千克？

（2）用水 60 千克，需要药粉多少千克？

（3）用 48 千克药粉，可配制成多少千克的药水？

【解析】（1）$1612\div(3+400)\times3=12$ 千克；（2）$60\div400\times3=0.45$ 千克；（3）$48\div3\times(3+400)=6448$ 千克

【挑战3】圆珠笔和铅笔的价格比是 $4:3$，20 支圆珠笔和 21 支铅笔共用 71.5 元．问圆珠笔的单价是每支多少元？

【解析】解：设圆珠笔每支 $4x$ 元，铅笔每支 $3x$ 元．

$$20\times4x+21\times3x=71.5$$
$$x=0.5$$

每支圆珠笔的单价为：$4\times0.5=2$（元）．

登峰造极

【超越1】某俱乐部男、女会员的人数之比是 $3:2$，分为甲、乙、丙三组．已知甲、乙、丙三组的人数比是 $10:8:7$，甲组中男、女会员的人数之比是 $3:1$，乙组中男、女会员的人数之比是 $5:3$．求丙组中男、女会员人数之比．

【解析】以总人数为 1，则甲组男会员人数为 $\frac{10}{10+8+7}\times\frac{3}{3+1}=\frac{3}{10}$，女会员为 $\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$，乙组男会员为 $\frac{8}{10+8+7}\times\frac{5}{5+3}=\frac{1}{5}$，女会员为 $\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$；丙组男会员为 $\frac{3}{3+2}-\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{10}$，女会员为 $\frac{2}{3+2}-\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{25}\right)=\frac{9}{50}$；所以，丙组中男、女会员人数之比为 $\frac{1}{10}:\frac{9}{50}=5:9$．

【超越2】已知甲、乙、丙三个班总人数的比为 $3:4:2$，甲班男、女生的比为 $5:4$，丙班男、女生的比为 2:1，而且三个班所有男生和所有女生的比为 $13:14$，则

（1）乙班男、女生人数的比是多少？

（2）如果甲班男生比乙班女生少 12 人，那么甲、乙、丙三个班各有多少人？

【解析】(1)因为所有男生和女生的比为 13:14，总共 27 份；据总人数不变统一份数，甲乙丙三个班总人数的比为 $9:12:6$：则丙班男女生之比为 4：2；那么乙班男生占：13-5-4=4 份，乙班女生占：14-4-2=8 份，那么乙班男女生人数的比为 $1:2$．

(2)甲乙丙三个班总人数之比为 $9:12:6$ 时，甲班男生比乙班女生少 12 人，少 3 份，则一份对应 4 人，所以甲班=36 人；乙班=48 人；丙班=24 人．

第七讲 比与比例（2）

知识点拨

一、按比例分配与和差关系

（一）按比例分配

例如：将 x 个物体按照 $a:b$ 的比例分配给甲、乙两个人，那么实际上甲、乙两个人各自分配到的物体数量与 x 的比分别为 $a:(a+b)$ 和 $b:(a+b)$，所以甲分配到 $\dfrac{ax}{a+b}$ 个，乙分配到 $\dfrac{bx}{a+b}$ 个.

（二）已知两组物体的数量比和数量差，求各个类别数量的问题

例如：两个类别 A、B，元素的数量比为 $a:b$（这里 $a>b$），数量差为 x，那么 A 的元素数量为 $\dfrac{ax}{a-b}$，B 的元素数量为 $\dfrac{bx}{a-b}$，所以解题的关键是求出 $(a-b)$ 与 a 或 b 的比值.

二、比例题目常用解题方式和思路

解答分数应用题关键是正确理解、运用单位“1”．题中如果有几个不同的单位“1”，必须根据具体情况，将不同的单位“1”，转化成统一的单位“1”，使数量关系简单化，达到解决问题的效果．在解答分数应用题时，要注意以下几点：

（1）题中有几种数量相比较时，要选择与各个已知条件关系密切、便于直接解答的数量为单位“1”.

（2）若题中数量发生变化的，一般要选择不变量为单位“1”.

（3）应用正、反比例性质解答应用题时要注意题中某一数量是否一定，然后再确定是成正比例，还是成反比例．找出这些具体数量相对应的分率与其他具体数量之间的正、反比例关系，就能找到更好、更巧的解法.

（4）题中有明显的等量关系，也可以用方程的方法去解.

（5）赋值解比例问题

例题精讲

模块三　比例与分配

【例1】一个三角形三个内角的度数比是 1：1：2，这个三角形的最大内角是______度．如果其中较短的边长 5 厘米，这个三角形的面积是______平方厘米.

【解析】三角形内角和为 180 度，因此最大内角 $180\times\dfrac{2}{1+1+2}=90$（度）．根据角度之比可知，这是一个等腰直角三角形，短边边长为 5 厘米，因此面积为 $5\times5\div2=12.5$（平方厘米）.

【巩固】出生人口的男女比例是 51：50，A 市新出生婴儿 10403 例，其中男孩有______

人，女孩有________人．

【解析】 男孩有：$10403\times\frac{51}{51+50}$=5253 人；女孩有：$10403\times\frac{50}{50+51}$=5150 人．

【例2】大胖，中胖，小胖三位小朋友储蓄钱数之比是 1：3：4，他们储蓄的平均数是 320 元，中胖储蓄了多少元？

【解析】 三人的储蓄总数为 320×3=960（元），所以中胖的存款是 $960\div(1+3+4)\times3=360$（元）．

【巩固】制作同种零件，1 分钟内：甲可以完成 6 个，乙可以完成 5 个，丙可以完成 4 个，现在共有 1590 个零件制造任务分配给他们，要求在相同时间内完成，每个人应该分配多少个零件？

【解析】甲：乙：丙= 6：5：4，1 份=$1590\div\left(6+5+4\right)=106$ 个，那么甲：$106\times6=636$ 个，乙：$106\times5=530$ 个，丙：$106\times4=424$ 个．

模块四　　比例应用题

【例3】已知小胖、中胖和大胖的体重之比为 4:6:7，其中大胖比小胖重 27 千克．请问，中胖的体重是多少千克？

【解析】 中胖的体重为 $27\div(7-4)\times6=54$（千克）．

【巩固】三个小队共植树 210 棵，第一小队植了总数的 $\frac{2}{5}$，第二小队与第三小队植树的比为 2：5，这三个小队各植树多少棵？

【解析】 第一小队植树 $210\times\frac{2}{5}=84$（棵）．

第二、三小队共植树 $210-84=126$（棵），（或：$210\times(1-\frac{2}{5})=126$ 棵）．

第二小队植树 $126\times\frac{2}{2+5}=36$（棵），第三小队植树 $126\times\frac{5}{2+5}=90$（棵）．

【例4】（1）小胖与大胖原有糖果数之比为 2:3．若小胖又获得 7 颗糖果，那么两人糖果数之比变为 5:6．求小胖原有的糖果数量．

（2）若干学生参加数学比赛，其中男女生人数之比为 8：5.后来新加入 20 名女生，此时女生人数占总人数的 $\frac{5}{11}$.请问最终参赛的学生总人数是多少？

【解析】 （1）大胖的糖果数量在两个比中分别对应 3 份和 6 份．根据题意，大胖的糖果数没有发生变化，我们将大胖糖果数量统一调整成 $[3,6]=6$（份），因此可将 $2:3$ 看成是 $4:6$．小胖对应的份数从 4 份变成 5 份，增加了 1 份，相当于增加 7 颗．因此 1 份对应 7 颗糖果，因此小胖原有 $4\times7=28$（颗）糖果．

（2）男生人数不变，原来：男:女=8:5=24:15,现在男:女=6:5=24:20,1 份=$20\div\left(20-15\right)=4$ 人，总人数：$\left(24+20\right)\times4=176$ 人.

【巩固】大胖和小胖原有钱数之比为 5:7．若大胖又获得了 26 元钱，那么两人钱数之比变为 4:3，求大胖原有的钱数．

【解析】30 元.

【例5】上下两层书架放书本数比是 4:3，如果从上层取出 80 本放到下层，则本数比为 4:5，

那么上下两层原来分别放有图书多少本？

【解析】 总量不变，原来 4+3=7 份，现在 4+5=9 份，[7，9]=63，原来上：下=4:3=36:27，现在上：下=4:5=28:35,上层取 80 本，1 份$=80\div\left(36-28\right)=10$本，原来上层：$36\times10=360$本，下层：$27\times10=270$本.

【巩固】大胖和小胖原有钱数之比为 5:7．若小胖给了大胖 10 元钱后，两人的钱数之比变为$1:1$，问原来小胖有多少钱？

【解析】70 元.

【例6】小胖与大胖原有糖果数之比为 2:3．他们还有一个弟弟太胖，太胖从两人手中各拿走了 4 块糖果，两人的糖果数之比变为 5:8，求两人原有的糖果数.

【解析】 两个比的差调整为一致，$\left[1,3\right]=3$，$2:3=6:9$，但$6:9$到$5:8$各项只减少了1，因此继续将两个比的前后项同时扩大 4 倍，得到：$24:36$与$20:32$，恰好满足条件，因此两人原有 24 粒与 36 粒.

【巩固】大胖和小胖原有钱数之比为$5:7$．两人都花了 10 元钱买积分卡，两人的钱数之比变为$2:3$，求两人原有的钱数.

【解析】大胖 50 元，小胖 70 元.

巅峰挑战

【挑战1】甲、乙两人原有的钱数之比为$6:5$，后来甲又得到 180 元，乙又得到 30 元，这时甲、乙钱数之比为 18:11，求原来两人的钱数之和为多少？

【解析】 方法一：两人原有钱数之比为$6:5$，如果甲得到 180 元，乙得到 150 元，那么两人的钱数之比仍为$6:5$，现在甲得到 180 元，乙只得到 30 元，相当于少得到了 120 元，现在两人钱数之比为$18:11$，可以理解为：两人的钱数分别增加 180 元和 150 元之后，钱数之比为$18:15$，然后乙的钱数减少 120 元，两人的钱数之比变为$18:11$，所以 120 元相当于 4 份，1 份为 30 元，后来两人的钱数之和为$30\times(18+15)=990$元，所以原来两人的总钱数之和为$990-180-150=660$元.
方法二：方程法.设甲、乙原来各有$6x$、$5x$元，那么有$(6x+180):(5x+30)=18:11$，解比例方程得$x=60$，原来共有$60\times(6+5)=660$（元）.

【挑战2】两个同样容器中各装满盐水.第一个容器中盐与水的比是 2∶3，第二个容器中盐与水的比是 3∶4，把这两个容器中的盐水混合起来，则混合溶液中盐与水的比是什么？

【解析】$\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\right):\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{7}\right)=29:41$.

登峰造极

【超越1】甲、乙、丙三人共有积分卡 100 多张．甲先分一些积分卡给其他两人，使得乙、丙的积分卡各增加 1 倍；接着，乙拿出一些积分卡给另外两人，使得甲、丙两人的积分卡各增加 2 倍；最后，丙拿出一些积分卡给甲和乙，使得甲、乙的积分卡

各增加 3 倍，此时甲、乙、丙三人的积分卡数量之比是$1:2:3$**．那么原来三人各有积分卡多少张？**

【解析】 列表倒推，设最终甲乙丙的积分卡数依次是 $a,2a,3a$ ，列下述表格（自上至下依次为从最终状态到最初状态）

甲	乙	丙
a	$2a$	$3a$
$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{21}{4}a$
$\frac{a}{12}$	$\frac{25}{6}a$	$\frac{7}{4}a$
$\frac{73}{24}a$	$\frac{25}{12}a$	$\frac{7}{8}a$

显然有：$\begin{cases}100<6a<200\\24\mid a\end{cases}\Rightarrow a=24$ ，所以，原来甲有 73 张，乙有 50 张，丙有 21 张．

第八讲 工程问题初步

知识点拨

工程问题是小学数学应用题教学中的重点，是分数应用题的引申与补充，是培养学生抽象逻辑思维能力的重要工具．工程问题是把工作总量看成单位“1”的应用题，它具有抽象性，认知起来比较困难．建立正确概念是解决工程应用题的关键．

工程问题的基本概念定义：工程问题是指用分数来解答有关工作总量、工作时间和工作效率之间相互关系的问题．

工作总量：一般抽象成单位“1”

工作效率：单位时间内完成的工作量

三个基本公式：

工作总量=工作效率×工作时间；

工作效率=工作总量÷工作时间；

工作时间=工作总量÷工作效率．

例题精讲

【例1】 工厂有 450 个零件需要加工，如果甲单独做需要 30 天完成，如果乙单独做需要 15 天完成，那么他们两人合作需要多少天完成？

【解析】 甲每天完成 $450\div30=15$ 个，乙每天完成 $450\div15=30$ 个，两人合作每天能完成 $15+30=45$ 个，所以两人合作的话，需要 $450\div45=10$ 天能够完成．

【巩固】一条路一共 500 千米，甲单独修需要 20 天时间完成，乙单独修需要 25 天时间完成．如果甲、乙合作需要多少时间？

【解析】 甲每天完成 $500\div20=25$ 千米，乙每天完成 $500\div25=20$ 千米，两人合作每天能完成 $25+20=45$ 千米，两人合作，需要 $500\div45=\frac{100}{9}$ 天能够完成．

【例2】 一项工程，甲单独做需要 28 天时间，乙单独做需要 21 天时间，如果甲、乙合作需要多少时间？

【解析】 将整个工程的工作量看作“1”个单位，那么甲每天完成总量的 $\frac{1}{28}$，乙每天完成总量的 $\frac{1}{21}$，两人合作每天能完成总量的 $\frac{1}{28}+\frac{1}{21}=\frac{1}{12}$，所以两人合作的话，需要 $1\div\frac{1}{12}=12$ 天能够完成．

【巩固】一项工程，甲单独做需要 21 天时间，甲、乙合作需要 12 天时间，如果乙单独做需要多少时间？

【解析】 将整个工程的工作量看作“1”个单位，那么甲每天完成总量的$\frac{1}{21}$，甲、乙合作每天完成总量的$\frac{1}{12}$，乙单独做每天能完成总量的$\frac{1}{12}-\frac{1}{21}=\frac{1}{28}$，所以乙单独做 28 天能完成．

【例3】一件工程，甲、乙两人合作 8 天可以完成，乙、丙两人合作 6 天可以完成，丙、丁两人合作 12 天可以完成．那么甲、丁两人合作多少天可以完成?

【解析】甲、乙，乙、丙，丙、丁合作的工作效率依次是$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{12}$.对于工作效率有$(甲，乙)+(丙，丁)-(乙，丙)=(甲，丁)$．即$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$，甲、丁合作的工作效率为$\frac{1}{24}$．所以，甲、丁两人合作 24 天可以完成这件工程．

【例4】一项工程，甲单独做 40 天完成，乙单独做 60 天完成．现在两人合作，中间甲因病休息了若干天，所以经过了 27 天才完成．问甲休息了几天？

【解析】 法一：在整个过程中，乙没有休息，所以乙一共干了 60 天，完成了全部工程的$\frac{1}{60}\times 27=\frac{9}{20}$，还有$1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$是甲做的，所以甲干了$\frac{11}{20}\div\frac{1}{40}=22$（天），休息了$27-22=5$（天）．

法二：假设中间甲没有休息，则两人合作 27 天，应完成全部工程的$(\frac{1}{40}+\frac{1}{60})\times 27=\frac{9}{8}$，超过了单位“1”的$\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$，则甲休息了$\frac{1}{8}\div\frac{1}{40}=5$（天）．

【巩固】一项工程，甲队单独完成需 40 天．若乙队先做 10 天，余下的工程由甲、乙两队合作，又需 20 天可完成．如果乙队单独完成此工程，需要多少天？

【解析】甲每天完成$\frac{1}{40}$，甲乙合作中，甲一共完成$\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$，所以乙也一共完成$\frac{1}{2}$，乙每天完成$\frac{1}{60}$，乙单独做要 60 天．

【例5】甲、乙两队合作挖一条水渠要 30 天完成，若甲队先挖 4 天后，再由乙队单独挖 16 天，共挖了这条水渠的$\frac{2}{5}$．如果这条水渠由甲、乙两队单独挖，各需要多少天？

【解析】 法一：甲、乙合作完成工程的$\frac{2}{5}$需要：$30\times\frac{2}{5}=12$(天)．甲队先做 4 天，比合作少了$12-4=8$(天)；乙队后做16天，比合作多了$16-12=4$(天)，所以甲队做8天相当于乙队做 4 天，甲、乙两队工作效率的比是$4:8=1:2$．甲队单独工作需要：$30+30\times 2=90$(天)；乙队单独工作需要：$30+30\div 2=45$(天)．

法二：我们知道，甲乙合作，每天可以完成工程的$\frac{1}{30}$，而题目中给定的“甲队先挖 4 天，再由乙队单独挖 16 天”，相当于甲乙两队先合作 4 天，然后再由乙队单独挖 12 天，于是两队合作 4 天，可以完成工程的$\frac{1}{30}\times 4=\frac{2}{15}$，也就是说乙队$12$天挖了$\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$，于是乙队的工作效率为$\frac{4}{15}\div 12=\frac{1}{45}$，那么甲队的工作效率就是

$\frac{1}{30}-\frac{1}{45}=\frac{1}{90}$，即甲队单独做需要 90 天，乙队单独做需要 45 天．工程问题里面也经常用到比例，是因为工程问题的基本数量关系是乘法关系．

【例6】甲、乙两人共同加工一批零件，8 小时可以完成任务．如果甲单独加工，便需要 12 小时完成．现在甲、乙两人共同生产了 $2\frac{2}{5}$ 小时后，甲被调出做其他工作，由乙继续生产了 420 个零件才完成任务．问乙一共加工零件多少个?

【解析】 乙单独加工，每小时加工 $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$，甲调出后，剩下工作乙需做 $(1-2\frac{2}{5}\times\frac{1}{8})\div\frac{1}{24}=\frac{84}{5}$ 时，所以乙每小时加工零件 $420\div\frac{84}{5}=25$(个)，则 $2\frac{2}{5}$ 小时加工 $25\times2\frac{2}{5}=60$(个)，所以乙一共加工零件 $420+60=480$(个)．

巅峰挑战

【挑战1】甲、乙、丙三人分别做同一件工作，甲需 1.5 小时，乙需要 2 小时，丙需要 3 小时 20 分，求甲、乙、丙的工作效率的比.

【解析】 总工作量相同，工作效率之比=时间的反比，

甲：乙：丙 $=\frac{1}{1.5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3\frac{20}{60}}=20:15:9$．

【挑战2】有一项工程，有三个工程队来争夺施工权利，已知甲乙丙三个工程队都是工作时间长短来付费的，甲、乙两队合作，10 天可以全部完工，共需要支付 18000 元，由乙、丙两队合作，20 天可以完工，共需要支付 12000 元，由甲、丙两队合作，12 天可以完成，共需要支付 15000，如果该工程只需要一个工程队承建，如果只能一个队伍单独施工，那么最快的比最慢的会早完工_________天．需要支付速度最快的队伍_________元.

【解析】 甲乙丙的工效和为 $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}\right)\div2=\frac{7}{60}$，所以甲的工效为 $\frac{7}{60}-\frac{1}{20}=\frac{1}{15}$，乙的工效为 $\frac{7}{60}-\frac{1}{12}=\frac{1}{30}$，丙的工效为 $\frac{7}{60}-\frac{1}{10}=\frac{1}{60}$，所以从时间上考虑，应该选择甲，会比丙早完工 $60-15=45$ 天，同样的道理，甲乙丙的每日工资之和是 $(\frac{18000}{10}+\frac{12000}{20}+\frac{15000}{12})\div2=1825$（元），所以甲的每日费用为 $1825-600=1225$（元），乙的费用为 $1825-1250=575$（元），丙的费用为 $1825-1800=25$（元），所以需要支付速度最快的队伍 $1225\times15=18375$（元）.

登峰造极

【超越1】有两个同样的仓库，搬运完一个仓库的货物，甲需 6 小时，乙需 7 小时，丙需 14 小时．甲、乙同时开始各搬运一个仓库的货物．开始时，丙先帮甲搬运，后来又

去帮乙搬运，最后两个仓库的货物同时搬完．则丙帮甲________小时，帮乙________小时．

【解析】 整个搬运的过程，就是甲、乙、丙三人同时开始同时结束，共搬运了两个仓库的货物，所以它们完成工作的总时间为 $2\div(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14})=\frac{21}{4}$ 小时．

在这段时间内，甲、乙各自在某一个仓库内搬运，丙则在两个仓库都搬运过．

甲完成的工作量是 $\frac{1}{6}\times\frac{21}{4}=\frac{7}{8}$，所以丙帮甲搬了 $1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$ 的货物，丙帮甲做的时间为 $\frac{1}{8}\div\frac{1}{14}=1\frac{3}{4}$ 小时，那么丙帮乙做的时间为 $\frac{21}{4}-1\frac{3}{4}=3\frac{1}{2}$ 小时．

【超越2】一项工程，甲 15 天做了 $\frac{1}{4}$ 后，乙加入进来，甲、乙一起又做了 $\frac{1}{4}$，这时丙也加入进甲、乙、丙一起做完．已知乙、丙的工作效率的比为 3：5，整个过程中，乙、丙工作的天数之比为 2：1，问题中情形下做完整个工程需多少天？

【解析】 方法一：先把整个工程分为三个阶段：①、②、③；且易知甲的工作效率为 $\frac{1}{60}$．又乙、丙工作的天数之比为 $(②+③):③=2:1$，所以有②阶段和③阶段所需的时间相等．即甲、乙合作完成的 $\frac{1}{4}$ 的工程与甲、乙、丙合作完成 $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ 的工程所需的时间相等．所以对于工作效率有：(甲+乙)×2=(甲+乙+丙)，甲+乙=丙，那么有丙-乙=$\frac{1}{60}$ 又由乙、丙的工作效率的比为 3：5，易知乙的工作效率为 $\frac{3}{120}$，丙工作效率为：$\frac{5}{120}$．那么这种情形下完成整个工程所需的时间为：

$15+\frac{1}{4}\div(\frac{1}{60}+\frac{3}{120})+\frac{1}{2}\div(\frac{1}{60}+\frac{8}{120})=15+6+6=27$ 天．

方法二：显然甲的工作效率为 $\frac{1}{60}$，设乙的工作效率为 $3x$，那么丙的工作效率为 $5x$．所以有乙工作的天数为 $\frac{1}{4}\div(\frac{1}{60}+3x)+\frac{1}{2}\div(\frac{1}{60}+8x)$，丙工作的天数 $\frac{1}{2}\div(\frac{1}{60}+8x)$．

且有 $\frac{1}{4}\div(\frac{1}{60}+3x)+\frac{1}{2}\div(\frac{1}{60}+8x)=2\times\frac{1}{2}\div(\frac{1}{60}+8x)$．即

$\frac{1}{4}\div(\frac{1}{60}+3x)=\frac{1}{2}\div(\frac{1}{60}+8x)$，解得 $x=\frac{1}{120}$．所以乙的工作效率为 $\frac{3}{120}$ 丙的工作效率为 $\frac{5}{120}$．那么这种情形下完成整个工程所需的时间为：

$15+\frac{1}{4}\div\left(\frac{1}{60}+\frac{3}{120}\right)+\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{60}+\frac{8}{120}\right)=15+6+6=27$天．

【挑战1】一项工程，甲先做若干天后由乙继续做，丙在工程完成 $\frac{1}{2}$ 时前来帮忙，待工程完成 $\frac{5}{6}$ 时离去，结果恰按计划完成任务，其中乙做了工程总量的一

半．如果没有丙的参与，仅由乙接替甲后一直做下去，将比计划推迟$3\frac{1}{3}$天完成；如果全由甲单独做，则可比计划提前6天完成．还知道乙的工作效率是丙的3倍，问：计划规定的工期是多少天？

【解析】丙在工程完成一半时前来帮忙，待工程完成$\frac{5}{6}$时离去，所以乙、丙合做了全部工程的$\frac{1}{3}$；如果丙不来帮忙，这$\frac{1}{3}$的工程由乙独做，那么乙完成这$\frac{1}{3}$的工程时间将比乙、丙合做多用$\frac{10}{3}$天．由于乙的工效是丙的工效的3倍，乙、丙合做的工效之和为乙独做的$\frac{4}{3}$倍，那么乙独做所用的时间为乙、丙合做所用时间的$\frac{4}{3}$倍，所以乙、丙合做这$\frac{1}{3}$的工程所用的时间为$\frac{10}{3}\div(\frac{4}{3}-1)=10$天．那么乙的工效为$\frac{1}{3}\div10\div(1+\frac{1}{3})=\frac{1}{40}$．由于在丙来帮忙的情况下乙共做了工程总量的一半，所以乙工作的天数为$\frac{1}{2}\div\frac{1}{40}=20$天，其中有10天是乙、丙在合做，另外10天(被分成了前后两段)乙一个人独做．那么乙、丙共完成了全部工程的$\frac{1}{2}+\frac{1}{40}\times\frac{1}{3}\times10=\frac{7}{12}$，根据题意，这$\frac{7}{12}$的工程如果由甲独做，只需要$20-6=14$天，那么甲的工效为$\frac{7}{12}\div14=\frac{1}{24}$．甲完成全部工程需要24天．由于全部由甲独做可比计划提前6天完成，所以原计划工期是$24+6=30$天．

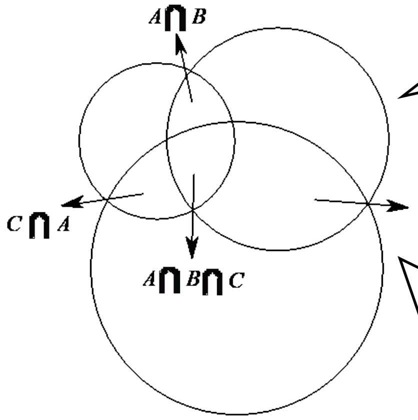
第九讲 容斥原理综合

知识点拨

单独的来看容斥原理这讲，在考试里考察看似并不常见，但是仔细分析，容斥原理是贯穿了整个数学板块，他可以和各个知识点组合考察，变成难题

A类、B类与C类元素个数的总和$=A$类元素的个数$+B$类元素个数$+C$类元素个数$-$既是A类又是B类的元素个数$-$既是B类又是C类的元素个数$-$既是A类又是C类的元素个数$+$同时是A类、B类、C类的元素个数．用符号表示为：

$A\bigcup B\bigcup C=A+B+C-A\bigcap B-B\bigcap C-A\bigcap C+A\bigcap B\bigcap C$．图示如下：



图中小圆表示A的元素的个数，中圆表示B的元素的个数，大圆表示C的元素的个数．

1．先包含：$A+B+C$

重叠部分$A\bigcap B$、$B\bigcap C$、$C\bigcap A$重叠了2次，多加了1次．

2．再排除：$A+B+C-A\bigcap B-B\bigcap C-A\bigcap C$

重叠部分$A\bigcap B\bigcap C$重叠了3次，但是在进行$A+B+C-A\bigcap B-B\bigcap C-A\bigcap C$计算时都被减掉了．

3．再包含：$A\bigcap B\bigcap C$

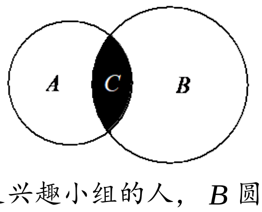
$A+B+C-A\bigcap B-B\bigcap C-A\bigcap C+A\bigcap B\bigcap C$．

在解答有关包含排除问题时，我们常常利用圆圈图(韦恩图)来帮助分析思考．

例题精讲

模块一　　容斥原理基础

【例1】实验小学四年级二班，参加语文兴趣小组的有 28 人，参加数学兴趣小组的有 29 人，有 12 人两个小组都参加．这个班有多少人参加了语文或数学兴趣小组？



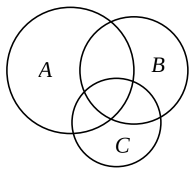
【解析】如图所示，A圆表示参加语文兴趣小组的人，B圆表示参加数学兴趣小组的人，A与B重合的部分C(阴影部分)表示同时参加两个小组的人．图中A圆不含阴影的部分表示只参加语文兴趣小组未参加数学兴趣小组的人，有$28-12=16$(人)；

图中 B 圆不含阴影的部分表示只参加数学兴趣小组未参加语文兴趣小组的人，有 $29-12=17$ (人).

方法一：由此得到参加语文或数学兴趣小组的有：$16+12+17=45$ (人).

方法二：根据包含排除法，直接可得： 参加语文或数学兴趣小组的人＝参加语文兴趣小组的人＋参加数学兴趣小组的人－两个小组都参加的人，即：$28+29-12=45$ (人).

【例2】某班学生手中分别拿红、黄、蓝三种颜色的小旗，已知手中有红旗的共有 45 人，手中有黄旗的共有 34 人，手中有蓝旗的共有 20 人．其中手中有红、黄、蓝三种小旗的有 8 人．而手中只有红、黄两种小旗的有 9 人，手中只有黄、蓝两种小旗的有 4 人，手中只有红、蓝两种小旗的有 3 人，那么这个班共有多少人？



【解析】 如图，用 A 圆表示手中有红旗的，B 圆表示手中有黄旗的，C 圆表示手中有蓝旗的．如果用手中有红旗的、有黄旗的与有蓝旗的相加，发现手中只有红、黄两种小旗的各重复计算了一次，应减去，手中有三种颜色小旗的重复计算了二次，也应减去，那么，全班人数为：$(45+34+20)-(9+4+3)-8\times2=67$ (人).

【例3】50 名同学面向老师站成一行．老师先让大家从左至右按 1，2，3，…，49，50 依次报数；再让报数是 4 的倍数的同学向后转，接着又让报数是 6 的倍数的同学向后转．问：现在面向老师的同学还有多少名?

【解析】 在转过两次后，面向老师的同学分成两类：第一类是标号既不是 4 的倍数，又不是 6 的倍数；第二类是标号既是 4 的倍数又是 6 的倍数．

1～50 之间，4 的倍数有 $\left[\frac{50}{4}\right]=12$,6 的倍数有 $\left[\frac{50}{6}\right]=8$，即是 4 的倍数又是 6 的倍数的数一定是 12 的倍数，所以有 $\left[\frac{50}{12}\right]=4$．于是，第一类同学有 $50-12-8+4=34$ 人，第二类同学有 4 人，所以现在共有 $34+4=38$ 名同学面向老师．

【例4】在 1 至 2020 这 2020 个自然数中，能被 6 或 10 整除的数有多少个？能被 6 或 7 或 10 整除的数有多少个？

【解析】（1）471 个；（2）692 个

【巩固】在从 1 至 1000 的自然数中，既不能被 5 除尽，又不能被 7 除尽的数有多少个?

【解析】1～1000 之间，5 的倍数有$\left[\frac{1000}{5}\right]$=200 个，7 的倍数有$\left[\frac{1000}{7}\right]$=142 个，因为既是 5 的倍数，又是 7 的倍数的数一定是 35 的倍数，所以这样的数有$\left[\frac{1000}{35}\right]$=28 个．所以既不能被 5 除尽，又不能被 7 除尽的数有$1000-200-142+28=686$个．

模块二　容斥原理中最值问题

【例5】甲、乙、丙同时给 100 盆花浇水．已知甲浇了 78 盆，乙浇了 68 盆，丙浇了 58 盆，那么 3 人都浇过的花最少有多少盆?

【解析】只考虑甲乙两人情况，有甲、乙都浇过的最少为：$78+68-100=46$盆，此时甲单独浇过的为$78-46=32$盆，乙单独浇过的为$68-46=22$盆；欲使甲、乙、丙三人都浇过的花最少时，应将丙浇过的花尽量分散在两端．于是三者都浇过花最少为$58-32-22=4$盆．

【例6】某数学竞赛共 160 人进入决赛，决赛共四题，做对第一题的有 136 人，做对第二题的有 125 人，做对第三题的有 118 人，做对第四题的有 104 人．在这次决赛中至少有____得满分．

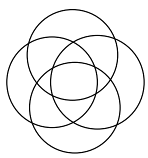
【解析】未得满分的人都做对 3 道题时得满分的人最少：
$136+125+118+104-160\times 3=3$(人)

巅峰挑战

【挑战1】在 1 至 2020 这 2020 个自然数中，恰好是 3、5、7 中两个数的倍数的数共有________个．

【解析】1 到 2020 这 2020 个自然数中，3 和 5 的倍数有$\left[\frac{2020}{15}\right]$=134 个，3 和 7 的倍数有$\left[\frac{2020}{21}\right]$=96 个，5 和 7 的倍数有$\left[\frac{2020}{35}\right]$=57 个，3、5 和 7 的倍数有$\left[\frac{2020}{105}\right]$=19 个．所以，恰好是 3、5、7 中两个数的倍数的共有$134-19+96-19+57-19=230$个．

【挑战2】将 1～13 这 13 个数字分别填入如图所示的由四个大小相同的圆分割成的 13 个区域中，然后把每个圆内的 7 个数相加，最后把四个圆的和相加，问：和最大是多少？



【解析】越是中间，被重复计算的越多，最中心的区域被重复计算四次，将数字按从大到小依次填写于被重复计算多的区格中，最大和为：

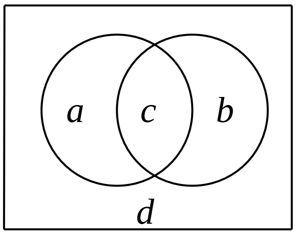
$13\times 4+(12+11+10+9)\times 3+(8+7+6+5)\times 2+(4+3+2+1)=240$.

登峰造极

【超越1】一次数学测验，甲答错题目总数的$\frac{1}{4}$，乙答错3道题，两人都答错的题目是题目总数的$\frac{1}{6}$．求甲、乙都答对的题目数.

【解析】(法一)设共有n道题．由右图知d即为所求，并有关系式$\begin{cases} a+c=\frac{n}{4}(1) \\ c+b=3(2) \\ c=\frac{n}{6}(3) \end{cases}$由（1）（3）知,$n$是4和6的公倍数，即12的倍数．将（3）代入（2），有$b=3-\frac{n}{6}$，由于b是非负整数，所以$n=12$，由此求出$c=2$，$b=1$，$a=1$.又由$a+b+c+d=n$，得到$d=n-(a+b+c)=8$.

（法二）显然两人都答错的题目不多于3道，所以题目总数只可能是6、12、18，其中只有12，能使甲答错题目总数是整数．甲一共答错3道，两人都错的是2道，甲错乙对的是1道，所以甲乙都对的有$12-3-1=8$道.



【超越2】全班有60个同学，喜欢足球的有$\frac{2}{3}$，喜欢篮球的有$\frac{3}{4}$，喜欢羽毛球的有$\frac{4}{5}$，三项都喜欢的有22个同学，问：三项都不喜欢的最多有多少个同学？

【解析】喜欢足球：$60\times\frac{2}{3}$=40个，喜欢篮球：$60\times\frac{3}{4}$=45个，喜欢羽毛球：$60\times\frac{4}{5}$=48个.只喜欢足球和篮球有x个，只喜欢篮球和羽毛球有y个，只喜欢足球和羽毛球有z个，只喜欢足球有a个，只喜欢篮球有b个，只喜欢羽毛球有c个，根据题目信息：$\begin{cases} x+a+z=40-22=18 \\ y+b+x=45-22=23 \\ z+c+y=48-22=26 \end{cases}$，至少喜欢一项的：$40+45+48-(x+y+z)-2\times22$人，三项都不喜欢人数最多，也就是只喜欢两个的人数尽量多，

40-22+45-22+48-22=67人，67÷2=33人⋯1人，除去三项都喜欢的，还有60-22=38人，三项都不喜欢38-33-1=4人.

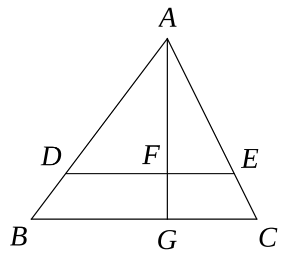
第十讲 相似模型

知识点拨

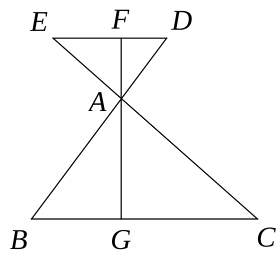
五年级后我们会深入对几何模块的学习，几何模块在一开始会扮演一个我们学习中拦路虎的形象，很难掌握．但是随着不断的对图形认识的加强，最后同学们会自豪的说：几何题中无难题！

相似三角形模型

(一)金字塔模型



(二) 沙漏模型



① $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{AF}{AG}$

② $S_{\triangle ADE}$： $S_{\triangle ABC}=AF^2:AG^2$

所谓的相似三角形，就是形状相同，大小不同的三角形(只要其形状不改变，不论大小怎样改变它们都相似)，与相似三角形相关的常用的性质及定理如下：

（1）相似三角形的一切对应线段的长度成比例，并且这个比例等于它们的相似比；

（2）相似三角形的面积比等于它们相似比的平方；

（3）连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线．

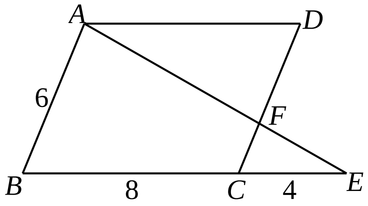
三角形中位线定理：三角形的中位线长等于它所对应的底边长的一半．

相似三角形模型，给我们提供了三角形之间的边与面积关系相互转化的工具．

在小学数学里，出现最多的情况是因为两条平行线而出现的相似三角形．

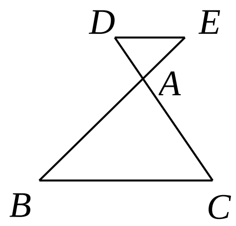
例题精讲

【例1】平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=6$， $BC=8$，延长 BC 至 E，使 $CE=4$，求 CF ．



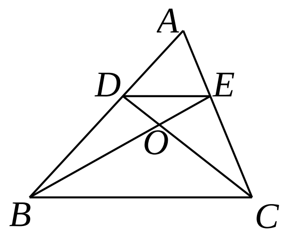
【解析】 因为 $\frac{CF}{AB}=\frac{CE}{BE}=\frac{4}{4+8}=\frac{1}{3}$，所以 $CF=\frac{1}{3}\times 6=2$.

【巩固】 如图，DE 平行 BC，且 $AD=2$， $AC=5$， $DE=3$，求 BC 的长.



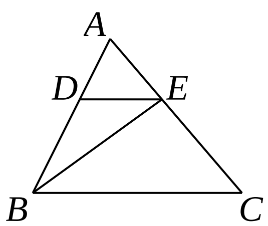
【解析】 由金字塔模型得 $AD:AC=DE:BC=2:5$，所以 $BC=3\times 5\div 2=7.5$.

【综合】 如图，已知 DE 平行 BC， $BO:EO=3:2$，那么 $AD:AB=$________.



【解析】 由沙漏模型得 $BO:EO=BC:DE=3:2$，再由金字塔模型得 $AD:AB=DE:BC=2:3$.

【例2】 DE 平行 BC，若 $AD:DB=2:3$，那么 $S_{\Delta ADE}:S_{\Delta ECB}=$________.

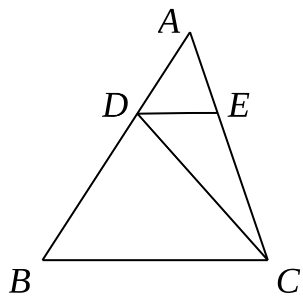


【解析】 根据金字塔模型 $AD:AB=AE:AC=DE:BC=2:(2+3)=2:5$，

$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=2^2:5^2=4:25$，

设 $S_{\triangle ADE}=4$ 份，则 $S_{\triangle ABC}=25$ 份，$S_{\triangle BEC}=25\div 5\times 3=15$ 份，$\therefore S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ECB}=4:15$.

【巩固】 DE 平行 BC，若 $AD:DB=1:2$，那么 $S_{\Delta DEC}:S_{\Delta DBC}=$________.

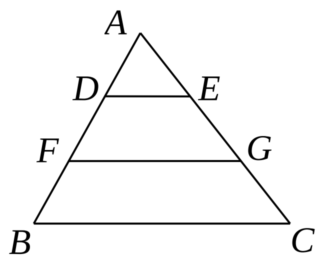


【解析】 根据金字塔模型 $AD:AB=AE:EC=1:(1+2)=1:3$，$S_{\Delta ADE}:S_{\Delta ABC}=1^2:3^2=1:9$，

设 $S_{\Delta ADE}=1$ 份，则 $S_{\Delta ABC}=9$ 份，$S_{\Delta DEC}=2$ 份，$S_{\Delta DBC}=9-1-2=6$ 份，

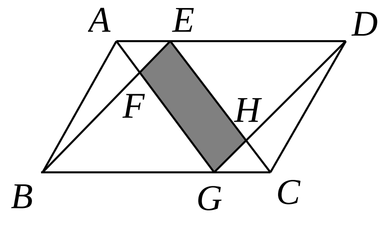
$\therefore S_{\Delta DEC}:S_{\Delta DBC}=2:6=1:3$.

【例3】如图，$\triangle ABC$ 中，DE、FG、BC 互相平行，$AD=DF=FB$，则 $S_{\triangle ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGCB}=$_________.



【解析】 设 $S_{\triangle ADE}=1$份，根据面积比等于相似比的平方，所以 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle AFG}=AD^2:AF^2=1:4$，$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=AD^2:AB^2=1:9$，因此 $S_{\triangle AFG}=4$ 份，$S_{\triangle ABC}=9$ 份，进而有 $S_{四边形DEGF}=3$ 份，$S_{四边形FGCB}=5$ 份，所以 $S_{\triangle ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGCB}=1:3:5$.

【例4】如图，四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 都是平行四边形，四边形 $ABCD$ 的面积是 16，$BG:GC=3:1$，则四边形 $EFGH$ 的面积＝________.



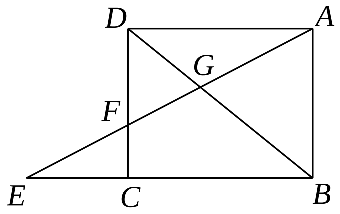
【解析】 因为 $FGHE$ 为平行四边形，所以 $EC//AG$，所以 $AGCE$ 为平行四边形.

$BG:GC=3:1$，那么 $GC:BC=1:4$，所以 $S_{\square AGCE}=\frac{1}{4}\times S_{\square ABCD}=\frac{1}{4}\times 16=4$.

又 $AE=GC$，所以 $AE:BG=GC:BG=1:3$，根据沙漏模型，

$FG:AF=BG:AE=3:1$，所以 $S_{\square FGHE}=\frac{3}{4}S_{\square AGCE}=\frac{3}{4}\times 4=3$.

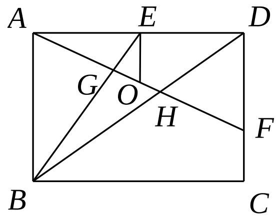
【例5】如右图，长方形 $ABCD$ 中， $EF=16$，$FG=9$，求 AG 的长.



【解析】 又因为 $DF \parallel AB$， $\frac{DG}{GB}=\frac{FG}{GA}$，所以 $\frac{AG}{GE}=\frac{FG}{GA}$，即 $AG^2=GE\cdot FG=25\times9=225=15^2$，所以 $AG=15$.

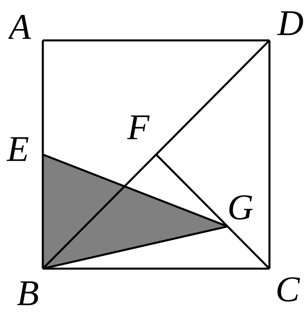
巅峰挑战

【挑战1】如图，长方形 $ABCD$ 中，E 为 AD 的中点，AF 与 BE 、BD 分别交于 G 、H ，OE 垂直 AD 于 E ，交 AF 于 O ，已知 $AH=5\text{ cm}$ ， $HF=3\text{ cm}$ ，求 AG .



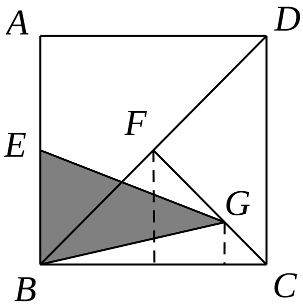
【解析】 由于 $AB \parallel DF$ ，利用相似三角形性质可以得到 $AB:DF=AH:HF=5:3$ ，
又因为 E 为 AD 中点，那么有 $OE:FD=1:2$ ，
所以 $AB:OE=5:\frac{3}{2}=10:3$ ，利用相似三角形性质可以得到
$AG:GO=AB:OE=10:3$ ，
而 $AO=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}\times(5+3)=4(\text{cm})$ ，所以 $AG=4\times\frac{10}{13}=\frac{40}{13}(\text{cm})$.

【挑战2】设正方形的面积为1，右图中 E、F 分别为 AB、BD 的中点，$GC=\frac{1}{3}FC$ ，求阴影部分面积.



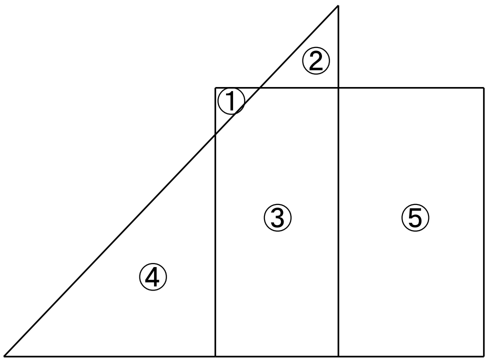
【解析】 画 FH 垂直 BC 于 H, GI 垂直 BC 于 I, 根据相似三角形定理 $CG:CF=CI:CH=1:3$,

又因为 $CH=HB$，所以 $CI:CB=1:6$，即 $BI:CB=(6-1):6=5:6$，三角形 BGE 的面积 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{24}$.

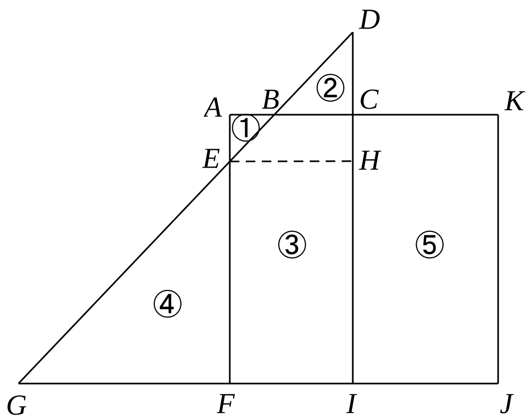


登峰造极

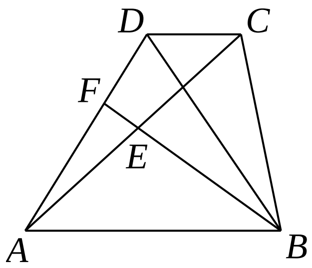
【超越1】一个等腰直角三角形和一个正方形如图摆放，①、②、③这三块的面积比依次为 $1:4:41$．那么，④、⑤这两块的面积比是______．



【解析】 如图∵ $S_{(1)}:S_{(2)}=1:4$，∴ $AB:BC=1:2$，∴ $S_{\Delta ABE}:S_{BCHE}=1:5$，
$S_{EHIF}:S_{AEHC}=(41-5):(1+5)=6:1$，$EF:AE=6:1$，又∵ $AE:CD=1:2$，
∴ $AF:CD=7:2$
∴ $AF:AC=AF:DH=7:3$ ∴ $S_{(4)}:S_{(5)}=\left(\frac{1}{2}\times6\times6\right):\left[(7-3)\times7\right]=9:14$.



【超越2】 梯形 $ABCD$ 的面积为 12，$AB=2CD$，E 为 AC 的中点，BE 的延长线与 AD 交于 F，四边形 $CDFE$ 的面积是________．

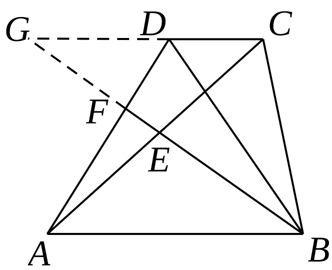


【解析】 延长 BF、CD 相交于 G．

由于 E 为 AC 的中点，根据相似三角形性质，$CG=AB=2CD$，$GD=\frac{1}{2}GC=\frac{1}{2}AB$，再根据相似三角形性质，$AF:FD=AB:DG=2:1$，$GF:GB=1:3$，而 $S_{\Delta ABD}:S_{\Delta BCD}=AB:CD=2:1$，

所以 $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times12=4$，$S_{\Delta GBC}=2S_{\Delta BCD}=8$．

又 $\frac{S_{\Delta GDF}}{S_{\Delta GBC}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，$S_{\Delta EBC}=\frac{1}{2}S_{\Delta GBC}$，所以 $S_{CDFE}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)S_{\Delta GBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta GBC}=\frac{8}{3}$．



笔记整理

第十一讲 扶梯问题

知识点拨

扶梯问题与流水行船问题十分相像，区别只在与这里的速度并不是我们常见的“千米每小时”，或者“米每秒”，而是“每分钟走多少个台阶”，或是“每秒钟走多少个台阶”. 从而在扶梯问题中“总路程”并不是求扶梯有多少“千米”或者多少“米”，而是求扶梯的“静止时可见台阶总数”

（1）当人顺着扶梯的运动方向走台阶时，相当与流水行船中的“顺水行驶”，这里的水速就是扶梯自身的台阶运行速度．有：

人的速度+扶梯速度=人在扶梯上的实际速度；

扶梯静止可见台阶总数=时间×人速+时间×扶梯速=人走的台阶数+扶梯自动运行的台阶数.

（2）当人沿着扶梯逆行时，有：

人的速度-扶梯速度=人在扶梯上的实际速度；

扶梯静止可见台阶总数=时间×人速-时间×扶梯速=人走的台阶数-扶梯自动运行的台阶数.

例题精讲

【例1】电扶梯有 120 级并向上运行，速度是 1 级/秒，小兰想要上楼，她的速度是 2 级/秒. 问她经过了多少级楼梯？

【解析】解：$120\div\left(1+2\right)=120\div3=40$（秒），$40\times2=80$（级）.

【巩固】电扶梯有 120 级并向上运行，速度是 1 级/秒,小兰想要下楼，她的速度是 2 级/秒. 问她经过了多少级楼梯？

【解析】解：$120\div\left(2\text{-}1\right)=120\div1=120$（秒），$120\times2=240$（级）.

【例2】小胖站着不动乘电动扶梯上楼需 30 秒,小胖如果在乘电动扶梯的同时继续向上走需 12 秒,那么电动扶梯不动时，小胖徒步沿扶梯上楼需多少秒？

【巩固】小胖在乘电动扶梯的同时继续向上走需 12 秒到达楼上，小胖如果在乘电动扶梯的同时逆着向下走需 24 秒到达楼下（千万别模仿！）那么电动扶梯不动时，小胖徒步沿扶梯上楼需多少秒？

【解析】(1）电梯每秒完成$\frac{1}{30}$，电梯加小胖徒步上楼每秒完成$\frac{1}{12}$，小胖徒步上楼每秒完成

$\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{1}{20}$，所以小胖徒步上楼需$1\div\frac{1}{20}=20$(秒)

（2）小胖徒步走的速度是$(\frac{1}{12}+\frac{1}{24})\div 2=\frac{1}{16}$所以小胖徒步上楼需$1\div\frac{1}{16}=16$(秒)

【例3】在地铁车站中，从站台到地面有一架向上的自动扶梯．小强乘坐扶梯时，如果每秒向上迈一级台阶，那么他走过 20 级台阶后到达地面；如果每秒向上迈两级台阶，那么走过 30 级台阶到达地面．从站台到地面有________级台阶．

【解析】小强每秒走一阶，需要$20\div 1=20$秒；每秒走 2 阶，需要$30\div 2=15$秒．

设电梯每秒钟需要走x阶，由电梯长度可得：$20\times(1+x)=15\times(2+x)$，解得$x=2$．

那么扶梯长度为$20\times(1+2)=60$（阶）．

本题非常类似于“牛吃草问题”，如将题目改为：

“在地铁车站中，从站台到地面有一架向上的自动扶梯．小强乘坐扶梯时，如果每秒向上迈一级台阶，那么他走过 20 秒后到达地面；如果每秒向上迈两级台阶，那么走过 15 秒到达地面．问：从站台到地面有多少级台阶？”

采用牛吃草问题的方法，电梯$20-15=5$秒内所走的阶数等于小强多走的阶数：$2\times 15-1\times 20=10$阶，电梯的速度为$10\div 5=2$阶/秒，扶梯长度为$20\times(1+2)=60$（阶）．

【巩固】顺顺在天府广场站搭一座电扶梯下楼．如果他向下走 14 阶，则需时 30 秒即可由电扶梯顶到达底部；如果他向下走 28 阶，则需时 18 秒即可由电扶梯顶到达底部．请问这座电扶梯有几阶？

【解析】 首先从题中可以看出两种情况下顺顺的速度是不相同的，否则两次走过的阶数之比为 1：2，时间之比也应该为 1：2 才对．

既然顺顺的速度有变化，那么应该考虑其中的不变量，也就是电扶梯的速度不变．假设这座电扶梯有x阶，那么在第一种情况下电扶梯走了$(x-14)$阶，第二种情况下电扶梯走了$(x-28)$阶，根据电扶梯的速度相同可得$\frac{x-14}{30}=\frac{x-28}{18}$，解得$x=49$．即这座电扶梯有 49 阶．

【例4】在地铁车站中，从站台到地面架设有向上的自动扶梯．小强想逆行从上到下，如果每秒向下迈两级台阶，那么他走过 100 级台阶后到达站台；如果每秒向下迈三级台阶，那么走过 75 级台阶到达站台．自动扶梯有多少级台阶?

【解析】设 50 秒扶梯向上走x级，则 25 秒走$\frac{x}{2}$级．由扶梯长度可得$100-x=75-\frac{x}{2}$．

解得$x=50$．扶梯长$100-50=50$(级)．

【巩固】沿着匀速上升的自动扶梯，某人从顶部走到底部共走了 120 级，他用同样的行走速度从底部走到顶部共走了 40 级，请问这部自动扶梯落在外面的部分有多少级？

【解析】 解：顺向走 40 级，逆向走 120 级，他用同样的行走速度，顺向的时间：逆的时间＝40：120＝1：3，120－40＝80（级），单位时间内扶梯卷入的级数是：80÷（1+3）＝20（级），所以扶梯落在外面的部分：20×3＝60（级）

【例5】有两个顽皮的小孩子逆着自动扶梯行驶的方向行走．该扶梯共有 150 级台阶，男孩每秒可以走 3 级台阶，女孩每秒可以走 2 级台阶，结果从扶梯的一端到达另一端，女孩走了 300 秒，请问男孩走了多少秒？

【解析】 用电梯的台阶数除以300秒，就是女孩的速度，由于是逆着电梯运动的方向，所以电梯的速度就是2减去女孩的速度，然后用3减去电梯的速度就是男孩的速度，最后用台阶数除以男孩的速度就是男孩用的时间．解：$2-150\div300=2-0.5=1.5$（级）；$3-1.5=1.5$（级）；$150\div1.5=100$（秒）；

【例6】商场的自动扶梯匀速由下往上行驶，两个孩子在行驶的扶梯上下走动，女孩由下往上走，男孩由上往下走，结果女孩走了40级到达楼上，男孩走了80级到达楼下．如果男孩单位时间内走的扶梯级数是女孩的2倍，则当该扶梯静止时，可看到的扶梯梯级有多少级？

【解析】 当电梯静止时，无论是由下往上，还是由上往下，两个孩子走的阶数都是电梯的可见阶数．当电梯运行时，女孩所走的阶数与电梯同时间内所走的阶数之和等于电梯可见阶数，男孩所走的阶数与电梯同时间内所走的阶数之差也等于电梯可见阶数．

因为男孩的速度是女孩速度的2倍，所以男孩走80阶到达楼下与女孩走40阶到达楼上所用时间相同，则在这段时间内，电梯所走的阶数也相同．有：

$40+$电梯走的阶数$=80-$电梯走的阶数，可得电梯走的阶数为$\left(80-40\right)\div2=20$（阶），

所以电梯可见阶数为$40+20=60$（阶）．

巅峰挑战

【挑战1】由于干旱，河道变窄，一条小船与一条大船在10千米狭窄河道相遇，必须倒船让行，两船才能继续航行．如果小船速度是大船速度的2倍，两船倒船的速度都是它们各自速度的$\frac{1}{3}$，小船倒船的路程是大船倒船路程的4倍，已知小船的速度是25千米/小时，那么两船均要通过这段河道最少共需多少小时？（不考虑船的长度）

【解析】 解：它们相遇的地方为：$10\times\frac{1}{4+1}=2$（千米），即小船离河道边8千米，大船2千米；大船速度为$25\div2=12.5$（千米/小时）．则有两种方案：

方案一：大船倒，小船进则时间为：

$$2\div\left(12.5\times\frac{1}{3}\right)+10\div\left(25\div2\right)=1.28\text{（小时）；}$$

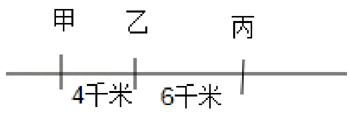
方案二小船倒，大船进：

$$8\div\left(25\times\frac{1}{3}\right)+10\div25=1.36\text{（小时）；}$$

1.36小时＞1.28小时，所以最短的时间为1.28小时．

【挑战2】甲、乙、丙三人骑车同时出发沿某公路直行，出发时丙在甲前10千米，乙在丙后6千米；甲、乙、丙三人骑车的速度分别为20千米/时、18千米/时、16千米/时，那么经过多少小时甲和乙、丙的距离相等．

【解析】原来三者的位置：



（1）乙和丙处于相同的位置，即乙追上丙时的情况：$6\div(18-16)=6\div2=3$（小时）；

（2）当甲处在乙和丙中间时，后来的三者的状态：设 x 小时后后，甲在乙丙中间：

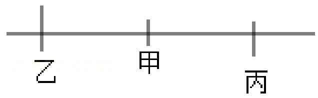
$10-6=4$（千米）

$$20x-4-18x=10+16x-20x$$

$$2x-4=10-4x$$

$$6x=14$$

$$x=\frac{7}{3}$$



综上：经过 $\frac{7}{3}$ 小时和 3 小时时甲和乙、丙的距离相等．

登峰造极

【超越1】甲在商场中乘自动扶梯从一层到二层，并在顺扶梯运行方向向上走，同时乙站在速度相等的并排扶梯从二层到一层．当甲乙处于同一高度时，甲反身向下走，结果他走了 60 级到达一层．如果他到了顶端再从“上行扶梯”返回，则要往下走 80 级．那么，自动扶梯不动时甲从下到上要走多少级？

【解析】 首先，由于第一种情况下甲往下走时走的总台阶数是第二种情况下的 $60\div80=\frac{3}{4}$，也就是说在相同时间内，自动扶梯由上往下走了两层高度的 $\frac{1}{4}$，而甲和自动扶梯共同走了两层高度的 $\frac{3}{4}$，说明第一种情况下，甲乙相遇时甲的高度是两层之间高度的 $\frac{3}{4}$．那么可知甲和自动扶梯的速度和与自动扶梯的速度之比是 $\frac{3}{4}:\left(1-\frac{3}{4}\right)=3:1$，说明甲走动的速度是扶梯速度的 2 倍．

如果甲沿着扶梯向下走，那么整体的速度就和自动扶梯的速度一样，是整体向上走时速度的 $\frac{1}{3}$，所用的时间就是向上走所用时间的 3 倍，那么甲所走的台阶数就是向上时所走台阶数的 3 倍．因此甲向上走时实际走了 $80\div3=\frac{80}{3}$ 级台阶．甲走 $\frac{80}{3}$ 级台阶的同时自动扶梯向上移动了 $\frac{40}{3}$ 级台阶，因此如果扶梯不动，甲从下到上要走 $\frac{80}{3}+\frac{40}{3}=40$ 级台阶．

【超越2】甲乙两班学生到少年宫参加活动，但只有一辆车接送．甲班学生坐车从学校出发的同时乙班学生开始步行，车到途中某处甲班学生下车步行，车立即返回接乙班学生上车，并直接开往少年宫．已知学生步行速度为每小时 4 千米，汽车载学生时速度为每小时 40 千米，空车时速度为每小时 50 千米．要使两班学生同时到达少年宫，甲班学生应步行全程的几分之几？

【解析】 由于两个班的同学都是一段路步行一段路乘车，而乘车的速度比步行快，中间又没有停留，因此要同时到达少年宫，两个班的同学步行的路程一定要一样长．解：设全程为 1，乙班走的路程为 x，（甲所走的路程也应为 x）则可得方程：

$$\frac{x}{4}=\frac{1-x}{40}+\frac{1-2x}{50}$$

$$50x=9-13x$$

$$63x=9$$

$$x=\frac{1}{7}$$

即甲班学生也走了全程的$\frac{1}{7}$．

第十二讲 发车问题

知识精讲

发车问题要注意的是两车之间的距离是不变的，车队的等距离前进.

常见发车问题解题方法:

（一）三个基本公式

（1）车距=（车速+人速）×相遇时间间隔

（2）车距=（车速-人速）×追及时间间隔

（3）车距=车速×汽车发车间隔

（二）解题技巧

（1）一般间隔发车问题：用 3 个公式迅速作答；

（2）求到达目的地后相遇和追及的公共汽车的辆数.

标准方法是：画图——尽可能多的列 3 个公式,结合 $s=v\times t$,以及植树问题数数.

例题精讲

【例1】附小学生上学要乘 8 路公交车和 74 路公交车，8 路公交车早上 6：00 开始发车，以后每 4 分钟发一辆车，74 路公交车早上也是 6：00 发车，以后每 6 分钟发一辆车，问从 6：00 到 7：00，这两路车共同发车几次？

【解析】先求 4 和 6 的最小公倍数，[4,6]=12,即第一次与第二次同时发车的间隔时间为 12 分钟，$60\div12+1=6$（次）.

【巩固】如果早上 6 时 44 路开始发车，以后每隔 10 分钟发一辆车；6 时 15 分 26 路开始发车，以后每隔 15 分钟发一辆车，6 时 25 分 87 路开始发车，以后每隔 7 分钟发一辆车．你知道这三种车下一次同时发车的时间吗？

在表中填写三种车发车的时间，并写出三种车下一次同时发车的时间是：

车站	起点	发车时间
44 路	6：00	
26 路	6：15	
87 路	6：25	

【解析】 根据每路车发车时间的间隔，分别推算三种车发车的时间，然后找出相同的发车时间，即为下一次同时发车的时间.

车站	起点	发车时间
44 路	6：00	6：10，6：20：6：30，6：40，6：50，7：00
26 路	6：15	6：30，6：45，7：00
87 路	6：25	6：32，6：39，6：46，6：53，7：00

从上表中可以看出，三种车下一次同时发车的时间是 7：00.

【例2】顺顺放学后，沿某路公共汽车路线以不变速度步行回家，该路公共汽车也以不变速度不停地运行．已知顺顺步行的速度是每秒 1 米，公共汽车的速度是每秒 9 米，每 9 分钟就有辆公共汽车从后面超过他，那么每多少分钟会有一辆公共汽车与顺顺迎面相遇？

【解析】 7.2 分，发出的相邻两车之间的距离总是固定的，由这一条件，我们可以得到：$\left(\text{车速-人速}\right)\times9\times60=4320\text{米}$．所以每隔 $4320\div\left(1+9\right)=432\text{秒}=7.2\text{分}$，车与小高迎面相遇．

【例3】小明以每小时 30 千米的速度骑自行车回家，沿途该公共汽车每 12 分就有一辆车从后面超过他，每 4 分钟就遇到迎面开来的一辆车．如果公共汽车按相等的时间间隔，以同一速度不停地行驶，问：公共汽车速度是多少？那么公共汽车发车时间间隔是多少分？

【解析】 把两辆公交车之间的距离看作单位“1”，则小明和公共汽车的速度差是$\frac{1}{12}$，因为这时是追及问题；小明和公共汽车的速度和是$\frac{1}{4}$，因为这时是相遇问题；那么公共汽车的速度是：$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)\div2=\frac{1}{6}$，所以公共汽车发车时间间隔是：$1\div\frac{1}{6}=6$（分钟）.

【巩固】大胖放学后沿某路公共汽车路线以每分钟 40 米的速度步行回家，途中每隔 9 分钟就有辆公共汽车从后面超过他，每隔 6 分钟就遇到迎面开来的一辆公共汽车．如果公共汽车按相等的时间间隔发车，并以相同的速度行驶，那么该路公共汽车每隔多少分钟发一次车？

【解析】 假设大胖在路上向前行走了 18（6、9 的最小公倍数）分钟后，立即回头再走 18 分钟，回到原地．这时在前 18 分钟他迎面遇到$18\div6=3$辆车，后 18 分钟有$18\div9=2$辆车追上他．那么在两个 18 分钟里他共遇到朝同一方向开来的 5 辆车，所以发车的时间为$18\times2\div\left(3+2\right)=7.2$分钟．

【例4】某人以匀速行走在一条公路上,公路的前后两端每隔相同的时间发一辆公共汽车.他发现每隔 15 分钟有一辆公共汽车追上他;每隔 10 分钟有一辆公共汽车迎面驶来擦身而过.问公共汽车每隔多少分钟发车一辆?

【解析】 这类问题一般要求两个基本量：相邻两电车间距离、电车的速度．是人与电车的相遇与追及问题，他们的路程和（差）即为相邻两车间距离，设两车之间相距 S，根据公式得 $S=(V_{人}+V_{车})\times10\min$，$S=(V_{车}-V_{人})\times15\min$，

那么 $(V_{人}+V_{车})\times10=(V_{车}-V_{人})\times15$，解得 $V_{车}=5V_{人}$，

所以发车间隔 $T=\frac{S}{V_{车}}=\frac{(V_{人}+V_{车})\times10}{V_{车}}=\frac{(\frac{1}{5}V_{车}+V_{车})\times10}{V_{车}}=12\frac{V_{车}}{V_{车}}=12$ 分钟

【巩固】小胖放学后，沿某路公共汽车路线以不变速度步行回家，该路公共汽车也以不变速度不停地运行．每隔 30 分钟就有辆公共汽车从后面超过他，每隔 20 分钟就遇到

迎面开来的一辆公共汽车．问：该路公共汽车每隔多少分钟发一次车？

【解析】假设小胖在路上向前行走了60（20、30的最小公倍数）分钟后，立即回头再走60分钟，回到原地．这时在前60分钟他迎面遇到$60\div20=3$辆车，后60分钟有$60\div30=2$辆车追上他.那么在两个60分钟里他共遇到朝同一方向开来的5辆车，所以发车的时间为$60\times2\div(3+2)=24$分钟.

【例5】在一条马路上，小明骑车与小光同向而行，小明骑车速度是小光速度的3倍，每隔10分钟有一辆公共汽车超过小光，每隔20分由一辆公共汽车超过小明，如果公共汽车从始发站每次间隔同样的时间发一辆车，那么相邻两车间隔多少分钟？

【解析】解：设每两辆公共汽车间隔（即追及路程）为1，由此可以得出:

公共汽车与小光的速度之差为：$1\div10=\frac{1}{10}$，

公共汽车与小明的速度差为：$1\div20=\frac{1}{20}$．因为小明骑车速度是小光速度的3倍，

所以小光的速度为：$\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{20}\right)\div(3-1)=\frac{1}{40}$，则公共汽车的速度是$\frac{1}{40}+\frac{1}{10}=\frac{1}{8}$，

$1\div\frac{1}{8}=1\times8=8$（分钟），

【例6】从电车总站每隔一定时间开出一辆电车.甲与乙两人在一条街上沿着同一方向步行.甲每分钟步行82米，每隔10分钟遇上一辆迎面开来的电车；乙每分钟步行60米，每隔10分15秒遇上迎面开来的一辆电车.问：电车的速度是多少？电车总站每隔多少分钟开出一辆电车？

【解析】这类问题一般要求两个基本量：相邻两电车间距离、电车的速度.甲与电车属于相遇问题，他们的路程和即为相邻两车间距离，根据公式得$S=(V_{甲}+V_{车})\times10\min$，类似可得$S=(V_{车}+V_{乙})\times10.25\min$，那么$(V_{乙}+V_{车})\times10.25=(V_{车}+V_{甲})\times10$，即$(60+V_{车})\times10.25=(82+V_{车})\times10$，解得$V_{车}$=820米/分，因此发车间隔为9020÷820=11分钟.

【巩固】从电车总站每隔一定时间开出一辆电车．甲与乙两人在一条街上反方向步行．甲沿电车发车方向每分钟步行60米，每隔20分钟有一辆电车从后方超过自己；乙每分钟步行80米，每隔10分遇上迎面开来的一辆电车．那么电车总站每隔多少分钟开出一辆电车？

【解析】$(V_{车}-60)\times20=(V_{车}+80)\times10$，所以$V_{车}=200$，所以电车总站每隔$(200+80)\times10\div200=14$（分钟）开出一辆电车.

巅峰挑战

【挑战1】一路电车的起点站和终点站分别是甲站和乙站，每隔5分钟有一辆电车从甲站发出开往乙站，全程要走15分钟，有一个人从乙站出发沿电车路线骑车前往甲站，他出发的时候，恰好有一辆电车到达乙站，在路上他又遇到了10辆迎面开来的电车才到达甲站，这时候恰好又有一辆电车从甲站开出．那么他从乙站到甲站用了多少分钟？

【解答】 解：由题意可得骑车人一共看见 12 辆电车，因每隔 5 分钟有一辆电车开出，而全程需 15 分，所以骑车人从乙站出发时，第 4 辆车正从甲站开出，骑车人到达甲站时，第 12 辆车正从甲站开出，所以，骑车人从乙站到甲站所用时间就是第 4 辆电车从甲开出到第 12 辆电车由甲开出之间的时间，即 $(12-4)\times5=40$（分）．

【挑战2】甲、乙两地是电车始发站，每隔一定时间两地同时各发出一辆电车，小张和小王分别骑车从甲、乙两地出发，相向而行．每辆电车都隔 6 分钟遇到迎面开来的一辆电车；小张每隔 8 分钟遇到迎面开来的一辆电车；小王每隔 9 分钟遇到迎面开来的一辆电车．已知电车行驶全程是 45 分钟，那么小张与小王在途中相遇时他们已行走了________分钟．

【解析】 由题意可知，

两辆电车之间的距离 = 电车行 12 分钟的路程

= 电车行 8 分钟的路程 + 小张行 8 分钟的路程

= 电车行 9 分钟的路程 + 小王行 9 分钟的路程

由此可得，小张速度是电车速度的 $\frac{12-8}{8}=\frac{1}{2}$，小王速度是电车速度的 $\frac{12-9}{9}=\frac{1}{3}$，小张与小王的速度和是电车速度的 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，所以他们合走完全程所用的时间为电车行驶全程所用时间的 $\frac{6}{5}$，即 $45\times\frac{6}{5}=54$ 分钟，所以小张与小王在途中相遇时他们已行走了 54 分钟

【挑战3】A 城每隔 30 分钟有直达班车开往 B 镇，速度为每小时 60 千米；小王骑车从 A 城去 B 镇，速度为每小时 20 千米．当小王出发 30 分钟时，正好有一趟班车（这是第一趟）追上并超过了他；当小王到达 B 镇时，第三趟班车恰好与他同时到达．A、B 间路程为________千米．

【解析】 由于班车速度是小王速度的 3 倍，所以当第一趟班车追上并超过小王的那一刻，由于小王已出发 30 分钟，所以第一趟班车已出发 $30\div3=10$ 分钟；再过 50 分钟，第三趟班车出发，此时小王已走了 $30+50=80$ 分钟，从此刻开始第三趟班车与小王同向而行，这是一个追及问题．由于班车速度是小王速度的 3 倍，所以第三趟班车走完全程的时间内小王走了全程的 $\frac{1}{3}$，所以小王 80 分钟走了全程的 $\frac{2}{3}$，A、B 间路程为：$20\times\frac{80}{60}\div\frac{2}{3}=40$（千米）．

登封造极

【超越1】某人乘坐观光游船沿顺流方向从 A 港到 B 港．发现每隔 40 分钟就有一艘货船从后面追上游船，每隔 20 分钟就会有一艘货船迎面开过，已知 A、B 两港间货船的发船间隔时间相同，且船在静水中的速度相同，均是水速的 7 倍，那么货船发出的时间间隔是________分钟．

【解析】 由于间隔时间相同，设顺水两货船之间的距离为“1”，逆水两货船之间的距离为 $(7-1)\div(7+1)=\frac{3}{4}$．所以，货船顺水速度－游船顺水速度 $=\frac{1}{40}$，即货船静水速度－游船静水速度 $=\frac{1}{4}$，货船逆水速度＋游船顺水速度 $=\frac{3}{4}\times\frac{1}{20}=\frac{3}{80}$，即货船静水速

度十游船静水速度$=\frac{3}{80}$，可以求得货船静水速度是$\left(\frac{1}{40}+\frac{3}{80}\right)\div 2=\frac{1}{32}$，货船顺水速度是$\frac{1}{32}\times\left(1+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{28}$，所以货船的发出间隔时间是$1\div\frac{1}{28}=28$分钟．

【超越2】甲站有车26辆，乙站有30辆．从上午8点开始，每隔5分由甲站向乙站开出一辆，每隔7.5分由乙站向甲站开出一辆，都经过1小时到达对方车站，问：（1）最早在什么时刻，乙站车辆数是甲站的3倍？（2）从上午8点到中午12点，乙站车辆数是甲站的3倍的时候总共有多少分钟？

【解析】 解：

（1）因为8点到9点甲乙两站正在陆续发车，从9点以后（或者8点55分以后）从甲站到乙站的路上总有$60\div 5=12$辆车在跑，从乙站到甲站上也总有$60\div 7.5=8$辆车在跑，一共有20辆车在路上，在站的汽车一共有$30+26-12-8=36$辆.

当乙站车辆数是甲站的3倍时，也就是把再站的车看作4份，乙站占3份，乙站应有汽车$36\div(3+1)\times 3=27$辆.

9点时，乙站有汽车$30-9+1=22$辆，差5辆，

而每小时乙站会到站12辆，离站8辆，每小时增加4辆车，因此10点时，乙站应有汽车26辆，再过5分钟，会又有一辆车进站，就是27辆，所以最早在10点5分，乙站车辆数是甲站的3倍.

（2）5与7.5的最小公倍数是15，当15分钟过后，开走了2辆，开来了3辆，多一辆，由27辆，变成28辆.

第十三讲 鸟头模型

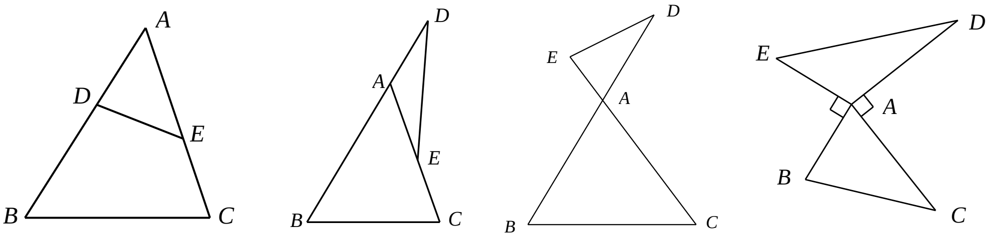
知识点拨

小学阶段多数几何题目解法都需要用到几个图形之间的比例关系，鸟头模型就是其中之一.

两个三角形中有一个角**相等**或**互补**，这两个三角形叫做**共角三角形**.

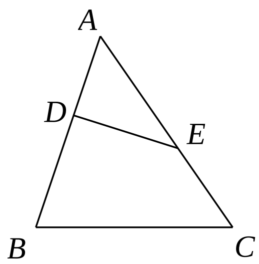
共角三角形的面积比等于对应角(相等角或互补角)两夹边的乘积之比.

如图在$\triangle ABC$中，D,E分别是AB,AC上的点如图，或D在BA的延长线上，E在AC上，则$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{AB\times AC}{AD\times AE}$

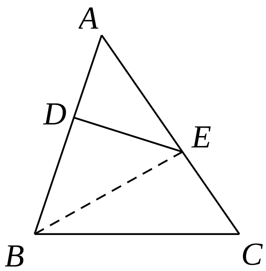


例题精讲

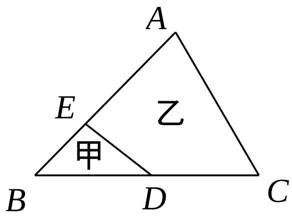
【例1】如图在$\triangle ABC$中，D,E分别是AB,AC上的点，且$AD:AB=2:5$，$AE:AC=4:7$，$S_{\triangle ADE}=16$平方厘米，求$\triangle ABC$的面积.



【解析】连接BE，$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABE}=AD:AB=2:5=(2\times 4):(5\times 4)$，$S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABC}=AE:AC=4:7=(4\times 5):(7\times 5)$，所以$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=(2\times 4):(7\times 5)$，设$S_{\triangle ADE}=8$份，则$S_{\triangle ABC}=35$份，$S_{\triangle ADE}=16$平方厘米，所以1份是2平方厘米，35份就是70平方厘米，$\triangle ABC$的面积是70平方厘米. 由此我们得到一个重要的定理，共角定理：共角三角形的面积比等于对应角(相等角或互补角)两夹边的乘积之比.



【例2】如图，三角形 ABC 被分成了甲、乙两部分，$BD=DC=4$，$BE=3$，$AE=6$．乙部分面积是甲部分面积的几倍？



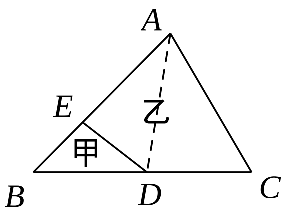
【解析】 连接 AD．

$\because BE=3$，$AE=6$

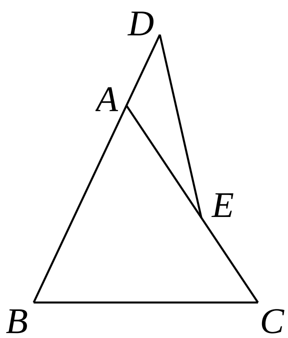
$\therefore AB=3BE$，$S_{\triangle ABD}=3S_{\triangle BDE}$

又$\because BD=DC=4$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=6S_{\triangle BDE}$，$S_{乙}=5S_{甲}$．



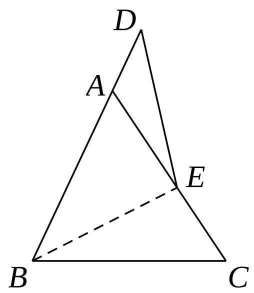
【例3】如图在 $\triangle ABC$ 中，D 在 BA 的延长线上，E 在 AC 上，且 $AB:AD=5:2$，$AE:EC=3:2$，$S_{\triangle ADE}=12$ 平方厘米，求 $\triangle ABC$ 的面积.



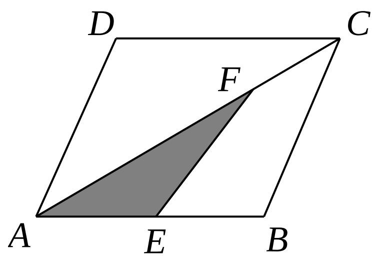
【解析】 连接 BE，$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABE}=AD:AB=2:5=(2\times3):(5\times3)$

$S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABC}=AE:AC=3:(3+2)=(3\times5):[(3+2)\times5]$，

所以 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=(3\times2):[5\times(3+2)]=6:25$，设 $S_{\triangle ADE}=6$ 份，则 $S_{\triangle ADE}=25$ 份，$S_{\triangle ADE}=12$ 平方厘米，所以 1 份是 2 平方厘米，25 份就是 50 平方厘米，$\triangle ABC$ 的面积是 50 平方厘米．由此我们得到一个重要的定理，共角定理：共角三角形的面积比等于对应角(相等角或互补角)两夹边的乘积之比．

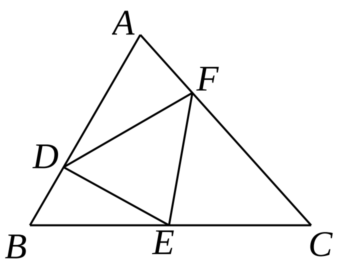


【例4】如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 AB 的中点，$AF=2CF$，三角形 AFE(图中阴影部分)的面积为 8 平方厘米．平行四边形的面积是多少平方厘米？



【解析】 连接 FB．三角形 AFB 面积是三角形 CFB 面积的 2 倍，而三角形 AFB 面积是三角形 AEF 面积的 2 倍，所以三角形 ABC 面积是三角形 AEF 面积的 3 倍；又因为平行四边形的面积是三角形 ABC 面积的 2 倍，所以平行四边形的面积是三角形 AFE 面积的 $(3\times2)=6$ 倍．因此，平行四边形的面积为 $8\times6=48$ (平方厘米)．

【例5】已知 $\triangle DEF$ 的面积为 7 平方厘米，$BE=CE,AD=2BD,CF=3AF$，求 $\triangle ABC$ 的面积．



【解析】 $S_{\triangle BDE}:S_{\triangle ABC}=(BD\times BE):(BA\times BC)=(1\times1):(2\times3)=1:6$，

$S_{\triangle CEF}:S_{\triangle ABC}=(CE\times CF):(CB\times CA)=(1\times3):(2\times4)=3:8$

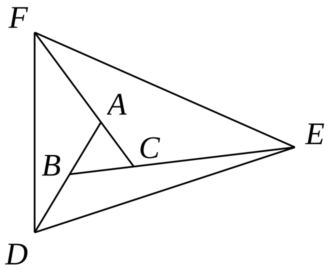
$S_{\triangle ADF}:S_{\triangle ABC}=(AD\times AF):(AB\times AC)=(2\times1):(3\times4)=1:6$

设 $S_{\triangle ABC}=24$ 份，则 $S_{\triangle BDE}=4$ 份，$S_{\triangle ADF}=4$ 份，$S_{\triangle CEF}=9$ 份，

$S_{\Delta DEF}=24-4-4-9=7$ 份，恰好是 7 平方厘米，所以 $S_{\triangle ABC}=24$ 平方厘米

【例6】如图，已知三角形 ABC 面积为 1，延长 AB 至 D，使 $BD=AB$；延长 BC 至 E，使

$CE=2BC$；延长 CA 至 F，使 $AF=3AC$，求三角形 DEF 的面积.



【解析】 (法1)本题是性质的反复使用.

连接 AE、CD.

$\because \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DBC}}=\dfrac{1}{1}$，$S_{\Delta ABC}=1$，

$\therefore S_{\Delta DBC}=1$.

同理可得其它，最后三角形 DEF 的面积 $=18$.

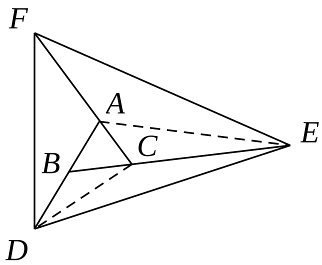
(法2)用共角定理$\because$在 ΔABC 和 ΔCFE 中，$\angle ACB$ 与 $\angle FCE$ 互补，

$\therefore \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta FCE}}=\dfrac{AC\cdot BC}{FC\cdot CE}=\dfrac{1\times 1}{4\times 2}=\dfrac{1}{8}$.

又 $S_{\Delta ABC}=1$，所以 $S_{\Delta FCE}=8$.

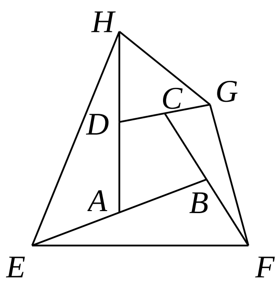
同理可得 $S_{\Delta ADF}=6$，$S_{\Delta BDE}=3$.

所以 $S_{\Delta DEF}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta FCE}+S_{\Delta ADF}+S_{\Delta BDE}=1+8+6+3=18$.



巅峰挑战

【挑战1】如图,四边形 *EFGH* 的面积是 66 平方米,$EA=AB$,$CB=BF$,$DC=CG$,$HD=DA$,求四边形 *ABCD* 的面积.



【解析】 连接 BD．由共角定理得 $S_{\triangle BCD}:S_{\triangle CGF}=(CD\times CB):(CG\times CF)=1:2$，即 $S_{\triangle CGF}=2S_{\triangle CDB}$

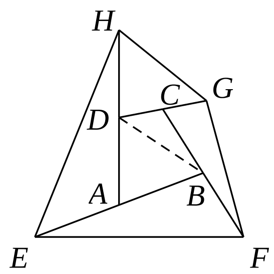
同理 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle AHE}=1:2$，即 $S_{\triangle AHE}=2S_{\triangle ABD}$

所以 $S_{\triangle AHE}+S_{\triangle CGF}=2(S_{\triangle CBD}+S_{\triangle ADB})=2S_{四边形ABCD}$

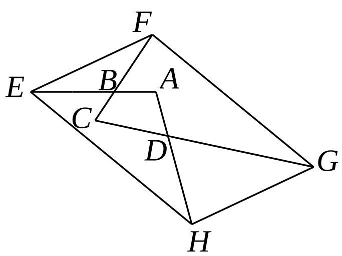
连接 AC，同理可以得到 $S_{\triangle DHG}+S_{\triangle BEF}=2S_{四边形ABCD}$

$S_{四边形EFGH}=S_{\triangle AHE}+S_{\triangle CGF}+S_{\triangle HDG}+S_{\triangle BEF}+S_{四边形ABCD}=5S_{四边形ABCD}$

所以 $S_{四边形ABCD}=66\div 5=13.2$ 平方米.



【挑战2】如图，将四边形 $ABCD$ 的四条边 AB、CB、CD、AD 分别延长两倍至点 E、F、G、H，若四边形 $ABCD$ 的面积为 5，则四边形 $EFGH$ 的面积是________.



【解析】 连接 AC、BD．

由于 $BE=2AB$，$BF=2BC$，于是 $S_{\Delta BEF}=4S_{\Delta ABC}$，同理 $S_{\Delta HDG}=4S_{\Delta ADC}$．

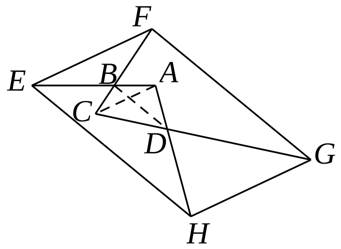
于是 $S_{\Delta BEF}+S_{\Delta HDG}=4S_{\Delta ABC}+4S_{\Delta ADC}=4S_{ABCD}$．

再由于 $AE=3AB$，$AH=3AD$，于是 $S_{\Delta AEH}=9S_{\Delta ABD}$，同理 $S_{\Delta CFG}=9S_{\Delta CBD}$．

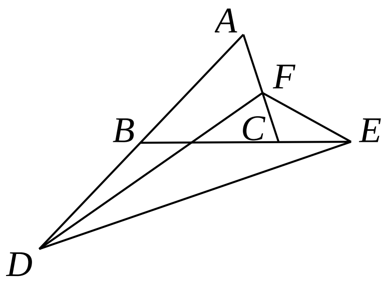
于是 $S_{\Delta AEH}+S_{\Delta CFG}=9S_{\Delta ABD}+9S_{\Delta CBD}=9S_{ABCD}$．

那么

$S_{EFGH}=S_{\Delta BEF}+S_{\Delta HDG}+S_{\Delta AEH}+S_{\Delta CFG}-S_{ABCD}=4S_{ABCD}+9S_{ABCD}-S_{ABCD}=12S_{ABCD}=60$



【超越1】如图，在$\triangle ABC$中，延长AB至D，使$BD=AB$，延长BC至E，使$CE=\frac{1}{2}BC$，F是AC的中点，若$\triangle ABC$的面积是2，则$\triangle DEF$的面积是多少？



【解析】∵在$\triangle ABC$和$\triangle CFE$中，$\angle ACB$与$\angle FCE$互补，

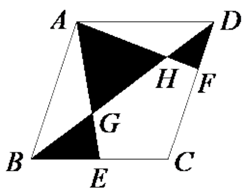
∴$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCE}}=\frac{AC\cdot BC}{FC\cdot CE}=\frac{2\times 2}{1\times 1}=\frac{4}{1}$，

又$S_{\triangle ABC}=2$，所以$S_{\triangle FCE}=0.5$，

同理可得$S_{\triangle ADF}=2$，$S_{\triangle BDE}=3$．

所以$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CEF}+S_{\triangle DEB}-S_{\triangle ADF}=2+0.5+3-2=3.5$．

【超越2】如图，在平行四边形$ABCD$中，$BE=EC$，$CF=2FD$．求阴影面积与空白面积的比．



【解析】∵$BE=EC$，$CF=2FD$，∴$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}$，$S_{\triangle ADF}=\frac{1}{6}S_{四边形ABCD}$．

∵$AD=2BE$，所以$AG=2GE$，

所以$S_{\triangle BGE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABE}=\frac{1}{12}S_{四边形ABCD}$，$S_{\triangle ABG}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABE}=\frac{1}{6}S_{四边形ABCD}$．

同理可得，$S_{\triangle ADH}=\frac{1}{8}S_{四边形ABCD}$，$S_{\triangle DHF}=\frac{1}{24}S_{四边形ABCD}$．

因为$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$，所以空白部分的面积$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8})S_{四边形ABCD}=$

$\frac{2}{3}S_{四边形ABCD}$，所以阴影部分的面积是$\frac{1}{3}S_{四边形ABCD}$．

$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=1:2$，所以阴影面积与空白面积的比是$1:2$．

第十四讲 钟表问题

知识点拨

一、时钟问题基础知识：

时钟问题有别于其他行程问题是因为它的速度和总路程的度量方式不再是常规的米每秒或者千米每小时，而是 2 个指针“每分钟走多少角度”或者“每分钟走多少小格”. 对于正常的时钟：

（1）整个钟面为 360 度，有 12 个大格，每个大格为 30 度；60 个小格，每个小格为 6 度.

（2）**分针速度：**每分钟走 1 小格，每分钟走 6 度

时针速度：每分钟走 $\frac{1}{12}$ 小格，每分钟走 0.5 度

注意：时钟问题可以看做是一个特殊的圆形轨道上 2 人追及或相遇问题，不过这里的两个“人”分别是时钟的分针和时针.要把时钟问题当做行程问题来看，分针快，时针慢，所以分针与时针的问题，通常就是他们之间的追及问题.

二、学习技巧：

1）理解时钟问题里的路程、速度、时间几个量之间的关系；
2）能够熟练做出时钟问题的行程图．并从图中找出路程和或者路程差；
3）时钟的周期问题

例题精讲

【例1】当时钟表示 1 点 45 分时，时针和分针所成的钝角是多少度？

【解析】142.5 度

【巩固】在 16 点 16 分这个时刻，钟表盘面上时针和分针的夹角是_______度.

【解析】16 点的时候夹角为 120 度，每分钟，分针转 6 度，时针转 0.5 度，16：16 的时候夹角为 $120-6\times16+0.5\times16=32$ 度.

【例2】（1）请问时针每分钟走多少度？分针每分钟走多少度？

（2）请问每隔多少分钟，时针分针重合一次？

【解析】（1）0.5°；6°

（2）$65\frac{5}{11}$

【例3】有一座时钟现在显示 10 时整．那么，经过多少分钟，分针与时针第一次重合；再经过多少分钟，分针与时针第二次重合?

【解析】 在 10 点时，时针所在位置为刻度 10，分针所在位置为刻度 12；当两针重合时，分针必须追上 50 个小刻度，设分针速度为“1”，有时针速度为“$\frac{1}{12}$”，于是需要时间：$50\div(1-\frac{1}{12})=54\frac{6}{11}$．所以，**再过 $54\frac{6}{11}$ 分钟**，时针与分针将第一次重合．第二次重合时显然为 12 点整，所以再经过 $(12-10)\times60-54\frac{6}{11}=65\frac{5}{11}$ 分钟，时针与分针第二次重合．标准的时钟，每隔 $65\frac{5}{11}$ 分钟，时针与分针重合一次．

【巩固】求下午 3 点之后时针分针第一次重合的具体时间．

【解析】根据题意可知，3 点时，时针与分针成 90 度，第一次重合需要分针追 90 度，$90\div(6-0.5)=16\frac{4}{11}$（分）

【例4】求 8 点之后时针分针第一次垂直的具体时间．

【解析】 8 点 $27\frac{3}{11}$ 分

【巩固】2 点钟以后，什么时刻分针与时针第一次成直角？

【解析】根据题意可知，2 点时，时针与分针成 60 度，第一次垂直需要 90 度，即分针追了 90+60=150（度），$150\div(6-0.5)=27\frac{3}{11}$（分）

【例5】4 点与 5 点之间，什么时刻时钟的分针和时针在一条直线？

【解析】 4 点 $21\frac{9}{11}$ 分或 4 点 $54\frac{6}{11}$ 分

【例6】邹老师在早晨 6 到 7 点之间起床时发现，钟面上的“6”字恰好在时针与分针的正中央．请问这时的具体时间．

【解析】 6 点 $27\frac{9}{13}$ 分

巅峰挑战

【挑战1】大胖上午 8 点要到学校上课，可是家里的闹钟早晨 6 点 10 分就停了，他上足发条但忘了对表就急急忙忙上学去了，到学校一看还提前了 10 分．中午 12 点放学，

大胖回到家一看钟才 11 点整．如果大胖上学、下学在路上用的时间相同，那么，他家的闹钟停了多少分？

【解析】 根据题意可知，大胖从上学到放学一共经过的时间是 290 分钟（11 点减去 6 点 10 分），在校时间为 250 分钟（8 点到 12 点，再加上提前到的 10 分钟），所以上下学共经过 $290-250=40$（分钟），即从家到学校需要 20 分钟，所以从家出来的时间为 7：30（$8{:}00-10分-20分$），即他家的闹钟停了 1 小时 20 分钟，即 80 分钟．

【挑战2】在一段时间里，时针、分钟、秒针转动的圈数之和恰好是 1466 圈，那么这段时间有________秒.

【解析】 解：它们的速度比为 1:12:720,所以秒针转了 $1466\div(720+12+1)\times3600=86400$ 秒.

【挑战3】一只每天快 5 分钟的钟，现在将它的时间对准，这只钟下次显示准确时间需要经过几天？

【解析】 标准时间过 24 小时，这个钟，就要多走 5 分钟，速度差是 5 分钟/天，下次显示准确时间说明快钟要比标准钟快 12 小时，12 小时共 $12\times60=720$ 分钟，那么需要 $720\div5=144$ 天．

登峰造极

【超越1】小明家有两个旧挂钟，一个每天快 20 分，另一个每天慢 30 分．现在将这两个旧挂钟同时调到标准时间，它们至少要经过多少天才能再次同时显示标准时间？

【解析】 快的挂钟与标准时间的速度差是 20 分/天，慢的挂钟与标准时间的速度差是 30 分/天，快的每标准一次需要 $12\times60\div20=36(天)$，慢的每标准一次需要 $12\times60\div30=24(天)$，24 与 36 的最小公倍数是 72，所以它们至少要经过 72 天才能再次同时显示标准时间．

【超越2】某黑心老板的计时钟比标准钟慢，他的计时钟按标准时间每 72 分钟分针与时针重合一次．工人师傅要按照这样的计时钟每天工作 8 小时．他规定：8 小时内的计时工资为 4 元，8 小时外超时工资为原计时工资的 2 倍．那么，工人师傅按这样的计时钟工作八小时，被这个黑心老板克扣了多少钱?

【解析】 先研究时针和分针经过多长时间重合一次，可以参照追及问题的思路列式解答．$1\div\left(1-\dfrac{1}{12}\right)=12/11$（小时），$\dfrac{12}{11}\times60=\dfrac{720}{11}$（分钟） 分析：将一圈看成总路程“1”，那么分针每小时行“1”，时针每小时行“$\dfrac{1}{12}$”，假设从 12 时分针和时针在同一地点（重合），那么路程差即“1”，速度差即“$\left(1-\dfrac{1}{12}\right)$”，路程差除以速度差等于追及时间，然后乘 60 转化成分钟．

$72\div\dfrac{720}{11}=\dfrac{11}{10}$ 分析：这一步计算出黑心老板的时间相当于标准时间的 $\dfrac{11}{10}$．

$8\times\dfrac{11}{10}=8.8$ (小时) 分析：标准时间 8 小时在黑心老板那里实际工作了 8.8 小时．即用上述第二步骤中的单位“1”标准时间乘 $\dfrac{11}{10}$ 即等于对应的黑心老板处实际

的工作时间．$\left(8.8-8\right)\times 4\times 2=6.4$（元）

家庭作业

第一讲 分数计算与技巧家庭作业（一）

【作业1】将下面的假分数化成带分数或整数.

$$\frac{7}{4},\frac{37}{16},\frac{25}{13},\frac{10}{7},\frac{36}{9}$$

【解析】$1\frac{3}{4},2\frac{5}{16},1\frac{12}{13},1\frac{3}{7},4$

【作业2】将下面的带分数化成假分数.

$$4\frac{1}{5},3\frac{2}{7},6\frac{4}{11},13\frac{1}{6},9\frac{5}{8}$$

【解析】$\frac{21}{5},\frac{23}{7},\frac{70}{11},\frac{79}{6},\frac{77}{8}$

【作业3】将下面的分数化成小数.

$$\frac{3}{10},\ \frac{37}{100},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{8}{5}$$

【解析】0.3，0.37，0.5，0.2，1.6

【作业4】将下面的分数化为最简分数.

$$\frac{8}{10},\frac{25}{100},\frac{4}{16},\frac{27}{81},\frac{4}{124}$$

【解析】$\frac{4}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{31}$

【作业5】填空：$6=\frac{(\quad)}{3}=\frac{30}{(\quad)}$

【解析】$6=\frac{(18)}{3}=\frac{30}{(5)}$

【作业6】已知：$\frac{2}{a}=\frac{a}{b}=\frac{1}{7}$，则 $a+b=$________.

【解析】$a=14$，$b=98$，那么 $a+b=14+98=112$

【作业7】写出下列各数的倒数.

$$（1）\frac{1}{8}\quad（2）\frac{2}{5}\quad（3）100\quad（4）5\frac{1}{3}$$

【解析】（1）8，（2）$\frac{5}{2}$，（3）$\frac{1}{100}$，（4）$5\frac{1}{3}=\frac{5\times3+1}{3}=\frac{16}{3}$，所以它的倒数是 $\frac{3}{16}$

【作业8】写出下列各数的倒数.

$$（1）6\quad（2）\frac{18}{13}\quad（3）\frac{4}{7}\quad（4）100\frac{21}{23}$$

【解析】（1）$\frac{1}{6}$，（2）$\frac{13}{18}$，（3）$\frac{7}{4}$，（4）$100\frac{21}{23}=\frac{100\times23+21}{23}=\frac{2321}{23}$，所以它的倒数是 $\frac{23}{2321}$

第二讲 分数计算与技巧家庭作业（二）

【作业1】计算：（1）$5-\frac{9}{11}-\frac{13}{11}$　　（2）$\frac{4}{9}+\frac{7}{10}+\frac{5}{9}+\frac{3}{10}$

【解析】 （1）原式$=5-\left(\frac{9}{11}+\frac{13}{11}\right)=5-2=3$

（2）原式$=\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{7}{10}+\frac{3}{10}\right)=1+1=2$

【作业2】计算：（1）$\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}$　　（2）$1\frac{2}{3}\div4\frac{1}{6}$

【解析】（1）$\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$　　（2）$1\frac{2}{3}\div4\frac{1}{6}=\frac{5}{3}\div\frac{25}{6}=\frac{5}{3}\times\frac{6}{25}=\frac{2}{5}$

【作业3】$36\times\frac{1}{4}+1\div\frac{2}{5}$

【解析】原式$=36\times\frac{1}{4}+1\times\frac{5}{2}$

$=9+\frac{5}{2}$

$=11\frac{1}{2}$

【作业4】$4\times5\frac{3}{4}+5\times6\frac{4}{5}+6\times7\frac{5}{6}+7\times8\frac{6}{7}+8\times9\frac{7}{8}$

【解析】原式$=4\times(5+\frac{3}{4})+5\times(6+\frac{4}{5})+6\times(7+\frac{5}{6})+7\times(8+\frac{6}{7})+8\times(9+\frac{7}{8})$

$=4\times5+3+5\times6+4+6\times7+5+7\times8+6+8\times9+7$

$=245$

【作业5】$\frac{4}{7}\times23\frac{12}{13}+16\times\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{4}{13}$

【解析】原式$=\frac{4}{7}\times23\frac{12}{13}+4\times\frac{4}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{13}$

$=\frac{4}{7}\times\left(23\frac{12}{13}+4+\frac{1}{13}\right)$

$=16$

【作业6】$9\frac{7}{8}\times8+8\frac{6}{7}\times7+7\frac{5}{6}\times6+6\frac{4}{5}\times5$

【解析】原式$=\left(9+\frac{7}{8}\right)\times8+\left(8+\frac{6}{7}\right)\times7+\left(7+\frac{5}{6}\right)\times6+\left(6+\frac{4}{5}\right)\times5$

$=9\times8+\frac{7}{8}\times8+8\times7+\frac{6}{7}\times7+7\times6+\frac{5}{6}\times6+6\times5+\frac{4}{5}\times5$

$=72+7+56+6+42+5+30+4$

$=222$

【作业7】$\left[1-\left(\dfrac{1}{12-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{10}\right)\times 2\dfrac{1}{2}\right]\div\dfrac{25}{11}$

【解析】原式$=\left[1-\left(\dfrac{2}{23}+\dfrac{1}{10}\right)\times\dfrac{5}{2}\right]\times\dfrac{11}{25}$

$=\dfrac{49}{92}\times\dfrac{11}{25}$

$=\dfrac{539}{2300}$

【作业8】$\left(9\dfrac{2}{7}+7\dfrac{2}{9}\right)\div\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{9}\right)$

【解析】原式$=\left(\dfrac{65}{7}+\dfrac{65}{9}\right)\div\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{9}\right)$

$=65\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)\div\left[5\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)\right]$

$=13$

第三讲 分解质因数与因数个数定理家庭作业

【作业1】分解质因数：

（1）90=________　　　　（2）576=________

（3）2002=________　　　（4）30000=________

【解析】（1）$90=2\times3^2\times5$；（2）$576=2^6\times3^2$；（3）$2002=2\times7\times11\times13$；（4）$30000=2^4\times3\times5^4$

【作业2】已知两个自然数的积是35，差是2，则这两个自然数的和是_______.

【解析】35=1×35=5×7，5、7 差 2，两个自然数的和是 5+7=12.

【作业3】三个连续自然数的乘积是210，求这三个数是多少？

【解析】210 分解质因数：$210=2\times3\times5\times7$，可知这三个数是5、6和7.

【作业4】A，B都是整数，A大于B，且$A\times B=2009$,那么$A-B$的最大值为__________，最小值为__________.

【解析】$2009=2009\times1=287\times7=49\times41$

最大值为$2009-1=2008$

最小值为$49-41=8$

【作业5】2008 的因数有________个.

【解析】因为$2008=2^3\times251$，所以约数有$(3+1)\times(1+1)=8$（个）.

【作业6】筐中有 60 个苹果，将它们全部都取出来，分成偶数堆，使得每堆的个数相同．问：有多少种分法？

【解析】方法一：偶数 60 的约数中，偶数有 8 个，即：2，4，6，10，12，20，30，60 因此有 8 种分法.

方法二：偶数个约数，即 60÷2=30 的所有约数，$30=2\times3\times5$，所以共有$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)$=8 个约数.

【作业7】数 360 的约数有多少个?

【解析】360 分解质因数：$360=2\times2\times2\times3\times3\times5=2^3\times3^2\times5$；根据约数个数公式，所以约数有$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$（个）.

【作业8】两个连续奇数的乘积是111555，这两个奇数之和是多少?

【解析】111555 分解质因数：$111555=3\times3\times5\times37\times67=(3\times3\times37)\times(5\times67)=333\times335$，所以和为668.本讲不仅要求学生熟练掌握分解质因数，而且要注意一些技巧，例如本题中的$111=3\times37$.

【作业9】已知 5 个人都属牛，他们年龄的乘积是 589225，那么他们年龄的和为多少？

【解析】基本思路与上题一样，重点还是在“1”这个因数的使用上，所以分解因数得到$589225=1\times13\times25\times37\times49$，五个人的年龄和为 125 岁.

【作业10】 有两个整数，它们的和恰好是两个数字相同的两位数，它们的乘积恰好是三个数字相同的三位数．求这两个整数分别是多少？

【解析】两位数中，数字相同的两位数有 11、22、33、44、55、66、77、88、99 共九个，它们中的每个数都可以表示成两个整数相加的形式，例如$33=1+32=2+31=3+30=\cdots\cdots=16+17$，共有 16 种形式，如果把每个数都这样分解，再相乘，看哪两个数的乘积是三个数字相同的三位数，显然太繁琐了．可以从乘积入手，因为三个数字相同的三位数有 111、222、333、444、555、666、777、888、999，每个数都是 111 的倍数，而$111=37\times3$，因此把这九个数表示成一个两

位数与一个一位数或两个两位数相乘时，必有一个因数是37或37的倍数，但只能是37的2倍(想想为什么？)3倍就不是两位数了．

把九个三位数分解：$111=37\times3$、$222=37\times6=74\times3$、$333=37\times9$、$444=37\times12=74\times6$、$555=37\times15$、$666=37\times18=74\times9$、$777=37\times21$、$888=37\times24=74\times12$、$999=37\times27$．

把两个因数相加，只有$(74+3)=77$和$(37+18)=55$的两位数字相同．所以满足题意的答案是74和3，37和18．

【作业11】 恰有8个约数的两位数有________个．

【解析】根据约数个数公式，先将8进行分解：$8=1\times8=2\times4=2\times2\times2$，所以恰有8个约数的数至多有3个不同的质因数，分解质因数后的形式可能为A^7，A^1B^3，$A^1B^1C^1$．其中由于$2^7=128>100$，所以A^7形式的没有符合条件的两位数；A^1B^3形式中，B不能超过3，即可能为2或3，有2×3^3、3×2^3、5×2^3、7×2^3、11×2^3，共5个；$A^1B^1C^1$形式的有$2\times3\times5$、$2\times3\times7$、$2\times3\times11$、$2\times3\times13$、$2\times5\times7$，共5个．所以共有$5+5=10$个符合条件的数．

第四讲 复杂枚举和加乘原理家庭作业

【作业1】从北京到广州可以选择直达的飞机和火车，也可以选择中途在上海或者武汉作停留，已知北京到上海、武汉和上海、武汉到广州除了有飞机和火车两种交通方式外还有汽车．问，从北京到广州一共有多少种交通方式供选择？

【解析】从北京转道上海到广州一共有$3\times3=9$种方法，从北京转道武汉到广州一共也有$3\times3=9$种方法供选择，从北京直接去广州有2种方法，所以一共有$9+9+2=20$种方法．

【作业2】如果从3本不同的语文书、4本不同的数学书、5本不同的外语书中选取2本不同学科的书阅读，那么共有多少种不同的选择？

【解析】因为强调2本书来自不同的学科，所以共有三种情况：来自语文、数学：$3\times4=12$；来自语文、外语：$3\times5=15$；来自数学、外语：$4\times5=20$；所以共有$12+15+20=47$种．

【作业3】由数字1，2，3可以组成多少个没有重复数字的自然数？

【解析】因为有1，2，3共3个数字，因此组成的数有3类：组成一位数；组成二位数；组成三位数．它们的和就是问题所求．

（1）组成一位数：有3个；

（2）组成二位数：由于数字不可以重复使用，组成二位数分两步完成；第一步排十位数，有3种方法；第二步排个位数有2种方法，因此由乘法原理，有$3\times2=6$个；

（3）组成三位数：与组成二位数道理相同，有$3\times2\times1=6$个三位数；

所以，根据加法原理，一共可组成$3+6+6=15$个数．

【作业4】从1到100的所有自然数中，不含有数字4的自然数有多少个?

【解析】从1到100的所有自然数可分为三大类，即一位数，两位数，三位数．

一位数中，不含4的有8个，它们是1、2、3、5、6、7、8、9;

两位数中，不含4的可以这样考虑：十位上，不含4的有1、2、3、5、6、7、8、9这八种情况．个位上，不含4的有0、1、2、3、5、6、7、8、9这九种情况，要确定一个两位数，可以先取十位数，再取个位数，应用乘法原理，这时共有$8\times9=72$个数不含4.

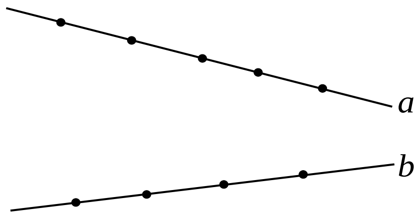
三位数只有100.

所以一共有$8+8\times9+1=81$个不含4的自然数．

【作业5】由1，2，3，4，5五个数字组成的不同的五位数有120个，将他们从大到小排列起来，第95个数是___________

【解析】5打头的有24个，4打头24个，3打头24个，2打头24个，正好96个，第96个数是21345，第95个是21354.

【作业6】线a，b上分别有5个点和4个点，以这些点为顶点可以画出多少个三角形？



【解析】画三角形需要在一条线上找1个点，另一条线上找2个点，本题分为两种情况：

（1）在a线上找一个点，有5种选取法，在b线上找两个点，有$4\times3\div2=6$种根据乘法原理，一共有：$5\times6=30$个三角形；

（2）在 b 线上找一个点，有 4 种选取法，在 a 线上找两个点，有 $5\times4\div2=10$ 种根据乘法原理，一共有：$4\times10=40$ 个三角形；

因此根据加法原理，一共可以画出：30+40=70 个三角形．

【作业7】某信号兵用红，黄，蓝，绿四面旗中的三面从上到下挂在旗杆上的三个位置表示信号．每次可挂一面，二面或三面，并且不同的顺序表示不同的信号．一共可以表示出多少种不同的信号？

【解析】由于每次可挂一面、二面或三面旗子，我们可以根据旗杆上旗子的面数分三类考虑：

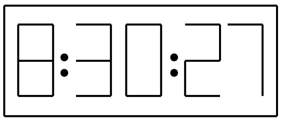
第一类，可以从四种颜色中任选一种，有 4 种表示法；

第二类，要分两步完成：第一步，第一面旗子可以从四种颜色中选一种，有 4 种选法；第二步，第二面旗子可从剩下的三种中选一种，有 3 种选法．根据乘法原理，共有 4×3=12 种表示法；

第三类，要分三步完成：第一步，第一面旗子可以从四种颜色中选一种，有 4 种选法；第二步，第二面旗子可从剩下的三种中选一种，有 3 种选法；第三步，第三面旗子可从剩下的两种颜色中选一种，有 2 种选法．根据乘法原理，共有 4×3×2=24 种表示法．

根据加法原理，一共可以表示出 4+12+24=40 种不同的信号．

【作业8】一种电子表在 8 点 30 分 27 秒时，显示的数字如图所示，那么从 8 点到 9 点这段时间里，此表显示的 5 个数字都不同的情况一共有________种．



【解析】为方便表述，我们从左到右命名为第 1~5 位．首先首位数字一定是 8，其余 4 位数字可以分为 4 步，又因为第 2 位和第 4 位的数字取值都是 0~5，第 3 位和第 5 位都是 0~9，所以首先考虑范围少的：

（1）第 2 位可取 0~5，共 6 种；

（2）第 1 步取了的数字第 4 位不能再取，所以只有 5 种取法；

（3）第 1、2 步取过的不能再取，并且不能取 8，所以只有 $10-2-1=7$ 种；

（4）第 1、2、3 步取过的不能再取，并且不能取 8，所以只有 $10-3-1=6$ 种；

根据乘法原理，一共有 $6\times5\times7\times6=1260$ 种．

第五讲 分数、小数及整数混合运算家庭作业

【作业1】计算： $0.7\times1\frac{4}{9}+2\frac{3}{4}\times15+0.7\times\frac{5}{9}+\frac{1}{4}\times15$

【解析】原式$=0.7\times(1\frac{4}{9}+\frac{5}{9})+(\frac{1}{4}+2\frac{3}{4})\times15=0.7\times2+3\times15=46.4$

【作业2】计算： $3.5\times0.8+5.5\times\frac{4}{5}+0.8$

【解析】原式$=3.5\times0.8+5.5\times\frac{4}{5}+0.8$

$=0.8\times(3.5+5.5+1)$

$=8$

【作业3】计算： $6.8\times\frac{8}{25}+0.32\times4.2-8\div25=$__________.

【解析】原式$=6.8\times\frac{8}{25}+\frac{8}{25}\times4.2-\frac{8}{25}=\frac{8}{25}\times(6.8+4.2-1)=\frac{8}{25}\times10=3\frac{1}{5}$.

【作业4】计算： $1.6-\frac{2}{3}+2.25\div3\frac{3}{8}=$__________.

【解析】原式$=1.6-\frac{2}{3}+\frac{9}{4}\div\frac{27}{8}$

$=1.6-\frac{2}{3}+\frac{9}{4}\times\frac{8}{27}$

$=1.6-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$

$=1.6$

【作业5】计算： $0.9\times2.84+2\frac{21}{25}\times33.6+2.84\times40.5$

【解析】原式$=0.9\times2\frac{21}{25}+2\frac{21}{25}\times33.6+2\frac{21}{25}\times40.5$

$=2\frac{21}{25}\times(0.9+33.6+40.5)$

$=2\frac{21}{25}\times75$

$=\left(2+\frac{21}{25}\right)\times75$

$=2\times75+\frac{21}{25}\times75$

$=150+63$

$=213$

【作业6】计算： $0.4\times\left[\frac{11}{52}\div2\frac{3}{4}\times(4.3-1.8)\right]\times26=$__________.

【解析】原式$=0.4\times\left[\frac{11}{52}\div\frac{11}{4}\times2.5\right]\times26$

$=0.4\times\left[\frac{11}{52}\times\frac{4}{11}\times2.5\right]\times26$

$=0.4\times2.5\times\frac{1}{13}\times26$

$=2$

【作业7】计算：$\left[2-\left(5.55\times1\frac{1}{3}-2\frac{7}{10}\div0.2\right)\right]\div0.9$

【解析】原式$=\left[2-\left(\frac{37}{5}-\frac{27}{2}\right)\right]\times\frac{10}{9}$

$=2\times\frac{10}{9}-\frac{37}{5}\times\frac{10}{9}+\frac{27}{2}\times\frac{10}{9}$

$=\frac{20}{9}-\frac{74}{9}+15$

$=9$

【作业8】计算：（$2\frac{1}{2007}\times3.6+3\frac{3}{5}\times7\frac{2006}{2007}$**）**$\div\frac{3}{4}\div\frac{3}{5}$

【解析】原式$=10\times3.6\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{3}$

$=36\times\frac{20}{9}$

$=80$

【作业9】如果$\frac{1}{2}x\div7.5=0.16\div1\frac{7}{8}$**成立，那么**$75x+8=$**________.**

【解析】解：$\frac{1}{2}x\div7.5=0.16\div1\frac{7}{8}$

$\frac{x}{2}\times\frac{2}{15}=\frac{4}{25}\times\frac{8}{15}$

$\frac{x}{15}=\frac{32}{25\times15}$

$x=\frac{32}{25}$

所以$75x+8=75\times\frac{32}{25}+8=104$

第六讲 比与比例（1）家庭作业

【作业1】求比值：

（1）$3\frac{1}{5}:1\frac{1}{7}$　　　　（2）0.03：0.28

（3）48 分：0.4 时　　　　（4）3 吨：200 千克

【解析】（1）$\frac{14}{5}$；（2）$\frac{3}{28}$；（3）2;（4）15

【作业2】已知 $a:b=7:24$，$c:b=23:18$，**求** $a:b:c$.

【解析】21∶72∶92

【作业3】求下列各式中的 *x* 的值：

（1）$8.4:x=1.5$　　　　（2）$\frac{2}{5}:\frac{7}{15}=x$

（3）$x:3\frac{1}{2}=2\frac{1}{3}$　　　　（4）$\frac{1}{3}:x=1\frac{1}{6}$

【解析】（1）$\frac{28}{5}$；（2）$\frac{6}{7}$；（3）$\frac{49}{6}$；（4）$\frac{2}{7}$

【作业4】利用下列已知条件，求 $a:b:c$.

（1）已知 $a:b=5:9, b:c=4:9$

（2）已知 $a:b=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}, b:c=0.3:0.2$

【解析】（1）$20:36:81$;（2）9：6：4.

【作业5】若 $\frac{1}{2}a=3b$**,那么 *a* 与 *b* 的比是多少？**

【解析】6:1.

【作业6】小明买 4 支圆珠笔花了 2.4 元，买了 3 支铅笔花了 1.5 元，求圆珠笔与铅笔的单价的比.

【解析】圆珠笔：2.4÷4=0.6 元，铅笔：1.5÷3=0.5 元，单价比 6：5.

【作业7】甲、乙两人各自在电脑里输入一篇 1500 字的文章，甲的打字速度与乙的打字速度之比为 4：3.如果甲每分钟打字 240 个，那么甲、乙两人各用多少时间打这篇文章？

【解析】甲用的时间是 $1500\div 240=\frac{25}{4}$ 分钟，甲的时间是乙的时间的 $\frac{3}{4}$，乙用的时间是 $\frac{25}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{25}{3}$ 分钟.

【作业8】某校某班中参加排球队与乒乓球队的人数之比为 2：3.参加排球队与足球队的人数之比为 3：1.已知这个班有 18 人参加乒乓球队.这个班参加足球队的有几人?

【解析】排球：乒乓球：足球=6：9：2，乒乓球有 18 人，足球：18÷9×2=4 人.

第七讲 比与比例（2）家庭作业

【作业1】水果店运来了西瓜和哈密瓜共234个．如果西瓜和哈密瓜的个数比为$5:4$，那么水果店运来西瓜和哈密瓜各多少个？

【解析】 西瓜$234\times\frac{5}{5+4}=130$个，哈密瓜$234\times\frac{4}{5+4}=104$个．

【作业2】甲、乙两个班共种树若干棵，已知甲班种的棵数的$\frac{1}{4}$等于乙班种的棵数的$\frac{1}{5}$，且乙班比甲班多种树24棵，甲、乙两个班各种树多少棵?

【解析】甲、乙两班种树棵数之比为：$\frac{1}{5}:\frac{1}{4}=4:5$，甲班种树棵数为：$24\div(5-4)\times4=96$(棵)，乙班种树棵数为： $24\div(5-4)\times5=120$(棵)．

【作业3】小新、小志、小刚三人拥有的藏书数量之比为$3:4:6$，三人一共藏书52本，求他们三人各自的藏书数量．

【解析】根据题意可知，他们三人各自的藏书数量分别占三人藏书总量的$\frac{3}{3+4+6}$、$\frac{4}{3+4+6}$、$\frac{6}{3+4+6}$，所以小新拥有的藏书数量为$52\times\frac{3}{3+4+6}=12$本，小志拥有的藏书数量为$52\times\frac{4}{3+4+6}=16$本，小刚拥有的藏书数量为$52\times\frac{6}{3+4+6}=24$本．

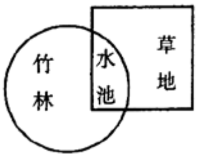
【作业4】甲、乙、丙三个数，已知$甲:(乙+丙)=2:3$，$乙:丙=4:9$，求甲:乙:丙.

【解析】 由$乙:丙=4:9$可得到，$乙:(乙+丙)=4:13$，$丙:(乙+丙)=9:13$，而$甲:(乙+丙)=2:3$，所以， $甲:乙:丙=\frac{2}{3}:\frac{4}{13}:\frac{9}{13}=26:12:27$．

【作业5】已知甲、乙、丙三个数，甲的$\frac{1}{3}$等于乙的4倍也等于丙的$\frac{1}{2}$，那么甲的$\frac{2}{3}$、乙的２倍、丙的一半这三个数的比为多少？（化为最简整数比）

【解析】把乙看成一份，乙的4倍就是4份，那么甲就是12份，丙就是8份，所以甲、乙、丙这三个数的比为$12:1:8$，那么甲的$\frac{2}{3}$、乙的2倍、丙的一半这三个数的比为$\left(12\times\frac{2}{3}\right):(1\times2):\left(8\times\frac{1}{2}\right)=8:2:4=4:1:2$．

【作业6】下图是一个园林的规划图，其中，正方形的$\frac{3}{4}$是草地；圆的$\frac{6}{7}$是竹林；竹林比草地多占地450平方米．问：水池占多少平方米?



【解析】 正方形的$\frac{3}{4}$是草地，那如果水池占 1 份，草地的面积便是 3 份；圆的$\frac{6}{7}$是竹林，水池占 1 份，竹林的面积是 6 份．从而竹林比草地多出的面积是$6-3=3$份．3 份的面积是 450 平方米，可见 1 份面积是$450\div3=150$（平方米），即水池面积是 150 平方米．

【作业7】有 429 名小学生参加夏令营，其中男生和女生的人数比为$7:6$，后来又有一些女生报名参加，这时男生和女生的人数比变为$11:10$．那么后来报名的女生有多少人？

【解析】 男生人数不变，有$429\times\frac{7}{7+6}$=231 人，原有女生：$429\times\frac{6}{7+6}$=198 人，来了一些女生之后的女生人数是$231\div11\times10=210$人，所以后来报名的女生有$210-198=12$人．

【作业8】甲乙两校参加数学竞赛的人数之比是$7:8$，获奖人数之比是$2:3$，两校各有 320 人未获奖，那么两校参赛的学生共有________人．

【解析】 方法一：设甲、乙两校参加希望杯的学生人数各有$7x$人，$8x$人．根据题意列方程得$(7x-320):(8x-320)=2:3$，解得$x=64$．两校参加人数为$7x+8x=15x=960$人．

方法二：因为$7-2=5$，$8-3=5$．所以设甲乙两校各有 7 份，8 份人，校参加人数为$320\div5\times(7+8)=960$（人）

第八讲 工程问题初步家庭作业

【作业1】甲、乙两辆车运一堆重150吨的煤．如果只有甲车运，那么6小时运完；如果只有乙车运，那么15小时运完．如果甲、乙；两车一起运，需要多少小时运完？

【解析】甲每小时运：$150\div6=25$吨，乙每小时运：$150\div15=10$吨．如果两车一起，需要$150\div(25+10)=\frac{30}{7}$(时)．

【作业2】甲、乙两名工人合作生产一批零件，6天可以完成任务．如果甲单独生产，10天可以完成；如果乙单独生产这批零件需要多少天？

【解析】乙的工效：$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$所以乙单独完成要15天．

【作业3】有一条公路，甲队独修需10天，乙队独修需12天，丙队独修需15天．现在让三个队合修，但中间甲队撤离到另外工地，结果一共用了6天把这条公路修完．当甲队撤出后，乙、丙两队又共同修了几天才完成？

【解析】乙和丙完成的工作总量为$6\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)=\frac{9}{10}$，

故甲做的工作量：$1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$，

故甲的工作时间$=\frac{1}{10}\div\frac{1}{10}=1$天；

所以，乙丙又合作天数为$6-1=5$（天）．

【作业4】一项工作，甲单独做20天可以完成，乙单独做30天可以完成．现在两人合做，用16天完成了工作，已知在这16天中甲休息了2天，乙休息了若干天．那么乙休息了多少天？

【解析】甲的工效是$\frac{1}{20}$，乙的工效是$\frac{1}{30}$．甲完成了：$\frac{1}{20}\times(16-2)=\frac{7}{10}$，乙工作的天数是：$\left(1-\frac{7}{10}\right)\div\frac{1}{30}=9$天，所以乙休息了$16-9=7$天．

【作业5】一项工作，甲单独做20小时完成，乙单独做12小时完成，丙单独做15小时完成，现在三人合作，但甲中途有事退出了，结果一共用了6小时完成，甲只做了多少小时？

【解析】甲的工效是$\frac{1}{20}$，乙的工效是$\frac{1}{12}$，丙的工效是$\frac{1}{15}$．乙、丙完成了：$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)\times6=\frac{9}{10}$，甲工作的时间是：$\left(1-\frac{9}{10}\right)\div\frac{1}{20}=2$小时．

【作业6】装配车间的师徒两人加工同样多的零件．当师傅完成了一半时，徒弟完成了120个．当师傅完成了任务时，徒弟完成了五分之四．这批零件共有多少个？

【解析】师傅第一次完成了一半，徒弟完成了 120 个，师傅第二次完成一半时；徒弟也完成了 120 个，这时徒弟完成了 $120+120=240$ 个，因其完成了 $\frac{4}{5}$，徒弟总共需要加工：$240\div\frac{4}{5}=300$ 个，师徒两人加工数相同，一共有：$300\times 2=600$ 个.

【作业7】某工厂接到一项加工 855 个零件的任务，要求加工时间不超过 10 天．工厂安排 5 名工人完成此项任务，前 2 天加工了 135 个．已知这 2 天中有 1 人因事请假 1 天，照这样的工作效率，如果以后几天无人请假，工厂能否按期完成加工任务？若不能完成，工厂最少需要安排几人增援？

【解析】一个工人一天可加工 $135\div(5\times 2-1)=15$（个），剩余零件还需要 $(855-135)\div(5\times 15)=9.6$（天）．$2+9.6>10$，所以不能按期完成任务．如果要按期完成，则剩下的 720 个零件需要 8 天完成，所以每天完成 $720\div 8=90$(个)．又因为每人可加工 15 个零件，所以每天需要 $90\div 15=6$(人)，因此每天还要增加 1 人.

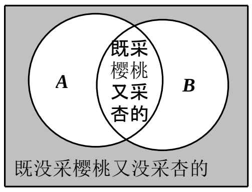
【作业8】甲、乙、丙三人去完成植树任务，已知甲植一棵树的时间，乙可以植两棵树，丙可以植三棵树．他们先一起工作了 5 天，完成全部任务的 $\frac{1}{3}$，然后丙休息了 8 天，乙休息了 3 天，甲没休息，最后一起完成任务．问：从开始植树算起，共用了多少天才完成任务？

【解析】法 1：甲、乙、丙的工效之比为 1:2:3，他们一天的工效和为：$\frac{1}{3}\div 5=\frac{1}{15}$，则甲、乙、丙的工效分别为：$\frac{1}{15}\times\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{90}$、$\frac{1}{90}\times\frac{2}{1+2+3}=\frac{1}{45}$、$\frac{1}{90}\times\frac{3}{1+2+3}=\frac{1}{30}$．丙休息的 8 天中，甲没休息完成的量为：$\frac{1}{90}\times 8=\frac{4}{45}$，乙工作了 $8-3=5$ 天完成的量为：$\frac{1}{45}\times 5=\frac{1}{9}$，到这时过去 $5+8=13$ 天，剩下的工作量共为：$1\text{-}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{45}+\frac{1}{9}\right)=\frac{7}{15}$，三人一起还需要的时间为：$\frac{7}{15}\div\frac{1}{15}=7$ 天，最终，总时间为：$5+8+7=20$ 天.

法 2：设完成任务需要 x 天，甲、乙、丙的工效之比为 1:2:3，他们一天的工效和为：$\frac{1}{3}\div 5=\frac{1}{15}$，则甲、乙、丙的工效分别为：$\frac{1}{15}\times\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{90}$、$\frac{1}{90}\times\frac{2}{1+2+3}=\frac{1}{45}$、$\frac{1}{90}\times\frac{3}{1+2+3}=\frac{1}{30}$．甲完成工作的量为：$\frac{x}{90}$；乙完成工作的量为：$\frac{1}{45}\times(x-3)$；丙完成工作的量为：$\frac{1}{30}\times(x-8)$，所以有：$\frac{x}{90}+\frac{1}{45}\times(x-3)+\frac{1}{30}\times(x-8)=1$，解得 $x=20$.

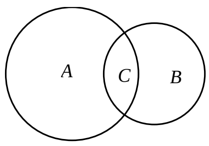
第九讲 容斥原理综合家庭作业

【作业1】在 46 人参加的采摘活动中，只采了樱桃的有 18 人，既采了樱桃又采了杏的有 7 人，既没采樱桃又没采杏的有 6 人，问：只采了杏的有多少人？



【解析】 如图，用长方形表示全体采摘人员 46 人，A 圆表示采了樱桃的人数，B 圆表示采了杏的人数．长方形中阴影部分表示既没采樱桃又没采杏的人数．
由图中可以看出，全体人员是至少采了一种的人数与两种都没采的人数之和，则至少采了一种的人数为：$46-6=40$(人)，而至少采了一种的人数＝只采了樱桃的人数＋两种都采了的人数＋只采了杏的人数，所以，只采了杏的人数为：$40-18-7=15$(人)．

【作业2】科技活动小组有 55 人．在一次制作飞机模型和制作舰艇模型的定时科技活动比赛中，老师到时清点发现：制作好一架飞机模型的同学有 40 人，制作好一艘舰艇的同学有 32 人．每个同学都至少完成了一项制作．问两项制作都完成的同学有多少人？



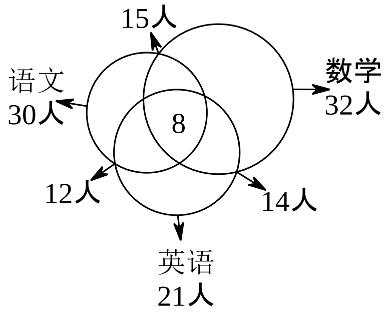
【解析】 因为 $40+32=72$，$72>55$，所以必有人两项制作都完成了．由于每个同学都至少完成了一项制作，根据包含排除法可知：全组人数$=40+32-$完成了两项制作的人数，即 $55=72-$完成了两项制作的人数．所以，完成了两项制作的人数为：$72-55=17$(人)．

【作业3】求在 1 至 100 的自然数中能被 3 或 7 整除的数的个数．

【解析】 A：1～100 中 3 的倍数，$100\div3=33\cdots1$，有 33 个；
B：1～100 中 7 的倍数，$100\div7=14\cdots\cdots2$，有 14 个；
1～100 中 3 和 7 的公倍数，即 21 的倍数，$100\div21=4\cdots\cdots16$，有 4 个．依据公式，1～100 中 3 的倍数或 7 的倍数共有 $33+14-4=43$ 个，则能被 3 或 7 整除的数的个数为 43 个．

【作业4】全班同学对语文、数学、英语三科中至少有一门感兴趣，其中 30 人喜欢语文，32 人喜欢数学，21 人喜欢英语，既喜欢语文又喜欢数学的有 15 人，既喜欢数学又喜欢英语的有 14 人，既喜欢语文又喜欢英语的有 12 人，三门都喜欢的有 8 人，那么全班共有________人．

【解析】全班人数：$30+32+21-15-12-14+8=50$ 人．



【作业5】1~100 的自然数中，不是 2、3、5 中任何一个数的倍数的数共有________个.

【解析】2 的倍数：$100 \div 2 = 50$ 个；

3 的倍数：$100 \div 3 = 33 \cdots 1$，33 个；

5 的倍数：$100 \div 5 = 20$ 个；

2 和 3 的倍数：$100 \div 6 = 16 \cdots 4$，16 个；

2 和 5 的倍数：$100 \div 10 = 10$ 个；

3 和 5 的倍数：$100 \div 15 = 6 \cdots 10$，6 个；

2、3、5 的倍数：$100 \div 30 = 3 \cdots 10$，3 个.

2 或 3 或 5 的倍数：$50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$ 个，所以不是 2、3、5 中任何一个数的倍数的数共有：$100 - 74 = 26$ 个.

【作业6】在一个自助果园里，只摘山莓者两倍于只摘李子者；摘了草莓、山莓和李子的人数比只摘李子的人数多 3 个；只摘草莓者比摘了山莓和草莓但没有摘李子者多 4 人；50 个人没有摘草莓；11 个人摘了山莓和李子但没有摘草莓；总共有 60 人摘了李子．如果参与采摘水果的总人数是 100，你能回答下列问题吗？

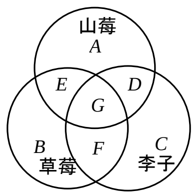
① 有_______人摘了山莓；

② 有_______人同时摘了三种水果；

③ 有_______人只摘了山莓；

④ 有_______人摘了李子和草莓，而没有摘山莓；

⑤ 有_______人只摘了草莓.



【解析】如图，根据题意有

$A = 2C$

$G - C = 3$

$B - E = 4$

$A + D + C = 50$

$D = 11$

$C + D + F + G = 60$

$A+B+E=40$

代入求解：$A=26$，$B=9$，$C=13$，$D=11$，$E=5$，$F=20$，$G=16$

所以①有 $A+D+E+G=26+11+5+16=58$ (人)摘了山莓;

②有16人同时摘了三种水果;

③有26人只摘了山莓;

④有20人摘了李子和草莓，而没有摘山莓;

⑤有9人只摘了草莓.

【作业7】甲、乙、丙同时给85盆花浇水．已知甲浇了67盆，乙浇了57盆，丙浇了47盆，那么3人都浇过的花最少有多少盆?

【解析】只考虑甲乙两人情况，有甲、乙都浇过的最少为：$67+57-85=39$ 盆，此时甲单独浇过的为 $67-39=28$ 盆，乙单独浇过的为 $57-39=18$ 盆;

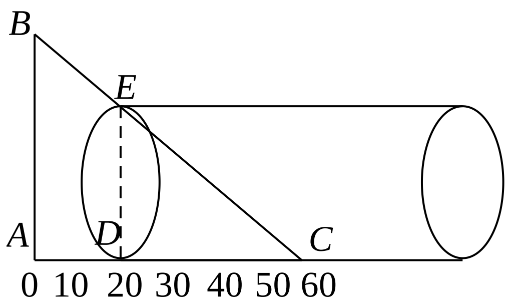
欲使甲、乙、丙三人都浇过的花最少时，应将丙浇过的花尽量分散在两端．于是三者都浇过花最少为 $47-28-18=1$ 盆.

【作业8】体育课上，60名学生面向老师站成一行，按老师口令，从左到右报数：1，2，3，…，60，然后，老师让所报的数是4的倍数的同学向后转，接着又让所报的数是5的倍数的同学向后转，最后让所报的数是6的倍数的同学向后转，现在面向老师的学生有________人.

【解析】可知其中4的倍数有15个，5的倍数有12个，6的倍数有10个，同时是4和5的倍数的有3个，同时是5和6的倍数的有2个，同时是4和6的倍数的有5个，同时是4、5、6的倍数的数有1个，现在背向老师的有 $15+12+10-3-2-5+1=28$ 个，面向老师的学生有 $60-28=32$ 人．转过两次的有：$3-1+2-1+5-1=7$．最后面向老师的学生数 $=32+7=39$ 个.

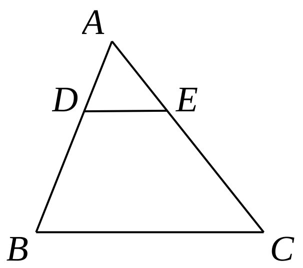
第十讲 相似模型家庭作业

【作业1】如图，测量小玻璃管口径的量具 ABC， AB 的长为 15 厘米， AC 被平均分为 60 份. 如果小玻璃管口 DE 正好对着量具上 20 份处(DE 平行 AB)，那么小玻璃管口径 DE 是多大？



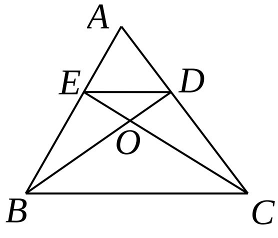
【解析】有一个金字塔模型，所以 $DE:AB=DC:AC$， $DE:15=40:60$，所以 $DE=10$ 厘米.

【作业2】已知 $\triangle ABC$ 中，DE 平行 BC，若 $AD:DB=2:3$，且 $S_{梯形DBCE}$ 比 $S_{\triangle ADE}$ 大 $8.5\ \text{cm}^2$，求 $S_{\triangle ABC}$.



【解析】根据金字塔模型 $AD:AB=DE:BC=2:(2+3)=2:5$， $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=2^2:5^2=4:25$，设 $S_{\triangle ADE}=4$ 份，则 $S_{\triangle ABC}=25$ 份，$S_{梯形DBCE}=25-4=21$ 份，$S_{梯形DBCE}$ 比 $S_{\triangle ADE}$ 大 17 份，恰好是 $8.5cm^2$，所以 $S_{\Delta ABC}=12.5cm^2$.

【作业3】如图，ΔABC 中， $AE=\frac{1}{4}AB$， $AD=\frac{1}{4}AC$， ED 与 BC 平行， ΔEOD 的面积是 **1** 平方厘米. 那么 ΔAED 的面积是________平方厘米.

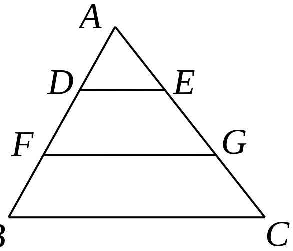


【解析】因为 $AE=\frac{1}{4}AB$， $AD=\frac{1}{4}AC$， ED 与 BC 平行，根据相似模型可知 $ED:BC=1:4$，

$EO:OC=1:4$， $S_{\Delta COD}=4S_{\Delta EOD}=4$ 平方厘米，则 $S_{\Delta CDE}=4+1=5$ 平方厘米，

又因为 $S_{\Delta AED}:S_{\Delta CDE}=AD:DC=1:3$，所以 $S_{\Delta AED}=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$(平方厘米).

【作业4】如下图，△ABC 中，DE、FG、BC 互相平行， $AD=DF=FB$ **，则** $S_{\Delta ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGCB}=$__________.



【解析】$\because DE、FG、BC$互相平行

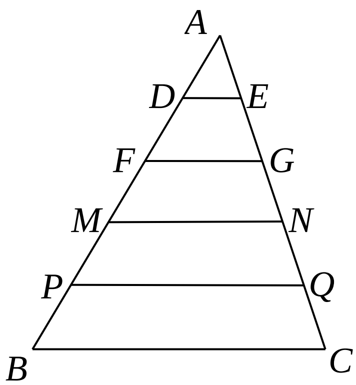
$\therefore AD:AF:AB=1:2:3$

$\therefore S_{\Delta ADE}:S_{\Delta AGF}:S_{\Delta ACB}=1:4:9$

$\therefore S_{\Delta ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGCB}=1:3:5$

【作业5】如图，△ABC **中，**DE，FG，MN，PQ，BC **互相平行，**$AD=DF=FM=MP=PB$，

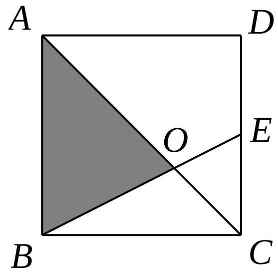
则 $S_{\triangle ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGNM}:S_{四边形MNQP}:S_{四边形PQCB}=$__________.



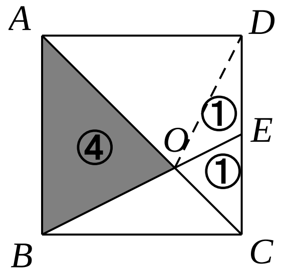
【解析】设 $S_{\triangle ADE}=1$ 份， $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle AFG}=AD^2:AF^2=1:4$， 因此 $S_{\triangle AFG}=4$ 份，进而有 $S_{四边形DEGF}=3$ 份，同理有 $S_{四边形FGNM}=5$ 份， $S_{四边形MNQP}=7$ 份， $S_{四边形PQCB}=9$ 份.

所以有 $S_{\triangle ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGNM}:S_{四边形MNQP}:S_{四边形PQCB}=1:3:5:7:9$.

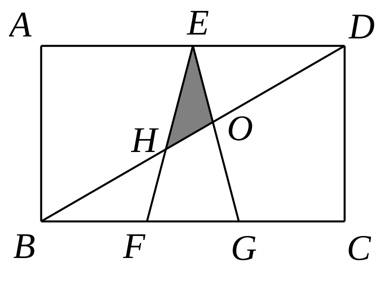
【作业6】如图，已知正方形 *ABCD* 的边长是 12 厘米，*E* 是 *CD* 边上的中点，连接对角线 *AC*，交 *BE* 于点 *O*，则三角形 *AOB* 的面积是________平方厘米.



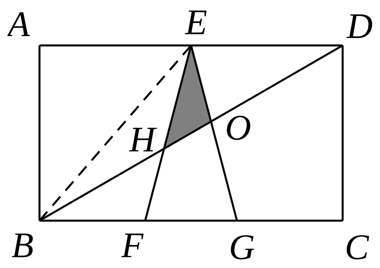
【解析】 连接 OD，因为 E 是 CD 边的中点，$S_{\Delta OEC}=S_{\Delta DEO}$，又因为 $CE \parallel AB$，所以 $\frac{CE}{AB}=\frac{1}{2}$，所以有 $\frac{S_{\Delta OEC}}{S_{\Delta ABO}}=\frac{1}{4}$，由一半模型，$S_{\Delta ABO}+S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}S_{正ABCD}=12^2\div 2=72cm^2$，所以 $S_{\Delta ABO}=72\div 6\times 4=48cm^2$.



【作业7】已知长方形 *ABCD* 的面积为 70 厘米，E 是 AD 的中点，F、G 是 BC 边上的三等分点，求阴影 ΔEHO 的面积是多少厘米？



【解析】因为 E 是 AD 的中点，F、G 是 BC 边上的三等分点，由此可以说明如果把长方形的长分成6份的话，那么 $ED=AD=3$ 份、$BF=FG=GC=2$ 份，大家能在图形中找到沙漏 $\triangle EOD$ 和 $\triangle BOG$：有 $ED:BG=3:4$，所以 $OD:BO=3:4$，相当于把 BD 分成 $7(3+4)$份，同理也可以在图中在次找到沙漏：$\triangle EHD$ 和 $\triangle BHF$ 也是沙漏，$ED:BF=3:2$，由此可以推出：$HD:BH=3:2$，相当于把 BD 分成 $5(3+2)$份，那么我们就可以把 BD 分成 35 份(5 和 7 的最小公倍数)其中 OD 占 15 份，BH 占 14 份，HO 占 6 份，连接 EB 则可知 $\triangle BED$ 的面积为 $70\div 4=\frac{35}{2}$，在 BD 为底的三角形中 HO 占 6 份，则面积为：$\frac{35}{2}\times\frac{6}{35}=3$(平方厘米).


A
E
D
H
O
B
F
G
C

第十一讲 扶梯问题家庭作业

【作业1】小淘气站着不动乘电动扶梯上楼需秒 30，如果在乘电动扶梯的同时小淘气继续向上走需 20 秒，那么电动扶梯不动时，小淘气徒步沿扶梯上楼需多少秒？

【解析】 电梯每秒完成$\frac{1}{30}$，电梯加小淘气徒步上楼每秒完成$\frac{1}{20}$，小淘气徒步上楼每秒完成$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$，所以小淘气徒步上楼需$1\div\frac{1}{60}=60$(秒)

【作业2】如果在乘电动扶梯的同时小淘气继续向上走需 10 秒到达楼上，如果在乘电动扶梯的同时小淘气逆着向下走需 30 秒到达楼下（千万别模仿!），那么电动扶梯不动时，小淘气徒步沿扶梯上楼需多少秒？

【解析】小淘气徒步走的速度是 $(\frac{1}{10}+\frac{1}{30})\div 2=\frac{1}{15}$，所以小淘气徒步上楼需$1\div\frac{1}{15}=15$(秒).

【作业3】在地铁车站中，从站台到地面架设有向上的自动扶梯．小胖想逆行从上到下，如果每秒向下迈两级台阶，那么他走过 200 级台阶后到达站台；如果每秒向下迈三级台阶，那么走过 150 级台阶到达站台．自动扶梯有多少级台阶?

【解析】设 100 秒扶梯向上走 x 级，则 50 秒走 $\frac{x}{2}$ 级．由扶梯长度可得 $200-x=150-\frac{1}{2}x$.

解得 $x=100$ ．扶梯长 $200-100=100$ (级).

【作业4】两个调皮的孩子逆着自动扶梯行驶的方向行走，从扶梯的一端到达另一端，男孩走了 100 秒，女孩走了 300 秒．已知在电梯静止时，男孩每秒走 3 级台阶，女孩每秒走 2 级台阶．请问该自动扶梯共有多少级台阶？

【解析】 由题意可知，男孩 100 秒走了 3×100＝300（级），女孩 300 秒走了 2×300＝600（级），女孩比男孩多走了 600－300＝300（级），多用了 300－100＝200 秒，说明扶梯每秒自动下降：300÷200＝1.5（级）；男孩共走了 300 级，这 300 级包含扶梯的级数和 100 秒扶梯自动降下的级数．女孩共走了 600 级，这 600 级包含扶梯的级数和300 秒扶梯自动降下的级数．扶梯的级数是:300－100×1.5＝150(级).

【作业5】自动扶梯以均匀的速度由下往上行驶，两个小孩嫌电梯太慢，急着从扶梯上楼，甲小孩每分钟走 26 级，乙小孩每分钟走 14 级，结果甲小孩用 4 分钟到达楼上，乙小孩用 6 分钟到达楼上，请问该自动扶梯共有多少级台阶？

【解析】 法一：甲小孩 4 分钟走楼梯 $4\times 26=104$ (级)；乙小孩 6 分钟走楼梯 $6\times 14=84$ (级)；楼梯每分钟自动上升级数 $(104-84)\div(6-4)=10$ (级)；所以扶梯级数总数 $(10+26)\times 4=144$ (级).

法二：设扶梯每分钟上升 x 级，$(x+26)\times 4=(x+14)\times 6$，解得 $x=10$，扶梯级数总数：$(x+26)\times 4=(10+26)\times 4=144$ (级).

【作业6】自动扶梯以均匀的速度由下往上行驶着，两位性急的孩子要从扶梯上楼，已知男孩每分走 20 级，女孩每分走 15 级，结果男孩用了 5 分到达楼上，女孩用了 6 分到达楼上．问该扶梯露在外面的部分共有多少级？

【解析】男孩每分钟比女孩每分钟多行扶梯级数的$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$，相差$20-15=5$级，因此自动扶梯露在外面的部分共有$5\div\frac{1}{30}=150$级．

【作业7】商场自动扶梯以匀速由下往上行驶，两个孩子在行驶的扶梯上下走动，女孩由下往上走，男孩由上往下走，结果女孩走了30级到达楼上，男孩走了90级到达楼下．如果男孩单位时间内走的楼梯级数是女孩的3倍．问当时扶梯静止时，扶梯可看到的梯级共有多少级？

【解析】 由于男孩和女孩所用的时间是一样的，两人在走的时间内扶梯卷走的级数是一样的，设为x．所以，应该是：扶梯卷走的级数+女孩走的级数＝男孩走的级数－扶梯卷走的级数，即$x+30=90-x$，解的$x=30$，所以扶梯静止时的答案应是60级．

【作业8】小淘气乘正在下降的自动扶梯下楼，如果他一级一级的走下去，从扶梯的上端走到下端需要走36级．如果小淘气沿原自动扶梯从下端走到上端(很危险哦，不要效仿!)，需要用下楼时5倍的速度走60级才能走到上端．请问这个自动扶梯在静止不动时有多少级?

【解析】小淘气上楼走60级的时间，下楼只能走$60\div5=12$(级)．而下楼走了36级，所以下楼用的时间是上楼时间的$36\div12=3$(倍).
设小淘气上楼的时间自动扶梯走了x级，则下楼的时间内自动扶梯走了$3x$级．
根据自动扶梯的级数可列方程：$36+3x=60-x$，解得$x=6$(级)，
自动扶梯有$60-x=54$(级).

第十二讲 发车问题家庭作业

【作业1】金宝公寓是1路车和2路公共汽车的起始站．1路车早上5时20分开始发车，以后每隔10分钟发一辆车．2路车早上5时40分开始发车，以后每隔15分钟发一辆车．请问两路车将在什么时间第二次同时发车？

【解析】 由于1路车每隔10分钟发一辆车，所以5：40时，1路车和二路车同时发车，又10和15的最小公倍数为30，即30分钟后，即6时10分两车第二次同时发车．

【作业2】顺顺放学后，沿某路公共汽车路线以不变速度步行回家，该路公共汽车也以不变速度不停地运行．公共汽车的速度是540米/分，顺顺步行的速度是60米/分，每8分钟就有会有一辆公共汽车与顺顺迎面相遇，那么，每多少分钟会有一辆公共汽车从后面超过顺顺？

【解析】 10分，发出的相邻两车之间的距离总是固定的，由这一条件，我们可以得到：车距$=\left(\text{车速}+\text{人速}\right)\times 8=4800$米．所以每隔$4800\div\left(540-60\right)=10$分，公车会追上顺顺．

【作业3】小明放学后，沿某路公共汽车路线以不变速度步行回家，该路公共汽车也以不变速度不停地运行．每隔30分钟就有辆公共汽车从后面超过他，每隔20分钟就遇到迎面开来的一辆公共汽车．问：该路公共汽车每隔多少分钟发一次车？

【解析】 假设小明在路上向前行走了60（20、30的最小公倍数）分钟后，立即回头再走60分钟，回到原地．这时在前60分钟他迎面遇到$60\div 20=3$辆车，后60分钟有$60\div 30=2$辆车追上他.那么在两个60分钟里他共遇到朝同一方向开来的5辆车，所以发车的时间为$60\times 2\div(3+2)=24$分钟

【作业4】小明放学后沿某路公共汽车路线，以每小时4千米的速度步行回家．沿途该路公共汽车每隔9分就有一辆从后面超过他，每7分又遇到迎面开来的一辆车．如果这路公共汽车按相同的时间间隔以同一速度不停地运行，请问：汽车每隔多久发一辆车？

【解析】 因为无论是迎面来的车，还是后面追来的车，两车之间的距离总是一样的，解：设汽车每小时x千米．由题意得：

$$\left(x-4\right)\times\frac{9}{60}=\left(x+4\right)\times\frac{7}{60}$$

$$\left(x+4\right)\times 7=\left(x+4\right)\times 9$$

$$x=32$$

则发车分钟数：$\left(32-4\right)\times\frac{9}{60}\div 32\times 60=7\frac{7}{8}$（分钟）．

【作业5】小艺乘62路公共汽车到学校上课．在车上，他发现每隔4分钟就有一辆62路公共汽车迎面开来，如果所有62路公共汽车的速度都相等，请问：62路公共汽车总站每隔多少分钟开出一辆车？

【解析】 解：车距$=\left(\text{车速}+\text{车速}\right)\times 4=8$车速，小艺看到每隔4分钟就有一辆62路公共汽车迎面开来，同时她乘坐速度相同的车相向而行，所以62路公共汽车西村总站每隔8分钟开出一辆62路车．

【作业6】从电车总站每隔一定时间开出一辆电车．甲与乙两人在一条街上沿着同一方向行走．甲每隔 10 分钟遇上一辆迎面开来的电车；乙每隔 15 分钟遇上迎面开来的一辆电车．且甲的速度是乙的速度的 3 倍，那么电车总站每隔多少分钟开出一辆电车？

【解析】设电车的发车间隔为“1”，有（$V_{甲}+V_{电车}$）$\times 10=$（$V_{乙}+V_{电车}$）$\times 15=1$，且$V_{甲}=3V_{乙}$，解得$V_{电车}=3V_{乙}$，所以$V_{电车}=\dfrac{1}{20}$，所以电车总站每隔$1\div\dfrac{1}{20}=20$（分钟）开出一辆电车．

【作业7】小峰骑自行车去小宝家聚会，一路上小峰注意到，每隔 9 分钟就有一辆公交车从后方超越小峰，小峰骑车到半路，车坏了，小峰只好打的去小宝家，这时小峰又发现出租车也是每隔 9 分钟超越一辆公交车，已知出租车的速度是小峰骑车速度的 5 倍，那么如果公交车的发车时间间隔和行驶速度固定的话，公交车的发车时间间隔为多少分钟？

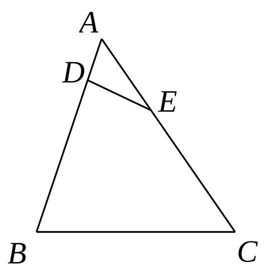
【解析】间隔距离=（公交速度-骑车速度）×9 分钟；间隔距离=（出租车速度-公交速度）×9 分钟所以，公交速度-骑车速度=出租车速度-公交速度；公交速度=（骑车速度+出租车速度）/2=3×骑车速度.由此可知，间隔距离=（公交速度-骑车速度）×9 分钟=2×骑车速度×9 分钟=3×骑车速度×6 分钟=公交速度×6 分钟.所以公交车站每隔 6 分钟发一辆公交车.

【作业8】小明骑自行车到朋友家聚会，一路上他注意到每隔 12 分钟就有一辆公交车从后边追上小乐，小明骑着骑着突然车胎爆了，小明只好以原来骑车三分之一的速度推着车往回走，这时他发现公交车以每隔 4 分钟一辆的频率迎面开过来，公交车站发车的间隔时间到底为多少？

【解析】设公交车之间的间距为一个单位距离，设自行车的速度为 x，汽车的速度为 y，根据汽车空间和时间间距与车辆速度的关系得到关系式：$12\times\left(y-x\right)=4\times\left(y+\dfrac{1}{3}x\right)$，化简为 $3y=5x$.即 $y=\dfrac{5}{3}x$，而公交车与自行车的速度差为$\dfrac{1}{12}$，由此可得到公交车的速度为$\dfrac{5}{24}$，自行车的速度为$\dfrac{1}{8}$，因此公交车站发车的时间间隔为$\dfrac{24}{5}=4.8$分钟.

第十三讲 鸟头模型家庭作业

【作业1】如图，三角形 ABC 中，AB 是 AD 的 5 倍，AC 是 AE 的 3 倍，如果三角形 ADE 的面积等于 1，那么三角形 ABC 的面积是多少？



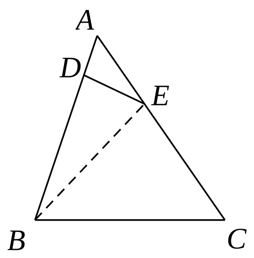
【解析】 连接 BE

$\because AC=3AE$

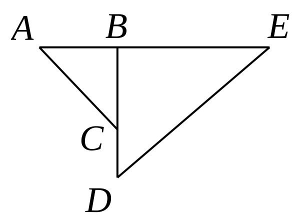
$\therefore S_{\Delta ABC}=3S_{\Delta ABE}$

又 $\because AB=5AD$

$\therefore S_{\Delta ADE}=S_{\Delta ABE}\div 5=S_{\Delta ABC}\div 15$，$\therefore S_{\Delta ABC}=15S_{\Delta ADE}=15$.

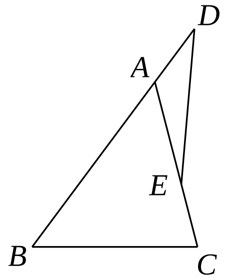


【作业2】如图，三角形 ABC 的面积为 3 平方厘米，其中 $AB:BE=2:5$，$BC:CD=3:2$，三角形 BDE 的面积是多少？



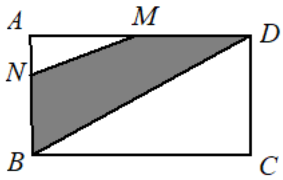
【解析】 由于 $\angle ABC+\angle DBE=180^{\circ}$，所以可以用共角定理，设 $AB=2$ 份，$BC=3$ 份，则 $BE=5$ 份，$BD=3+2=5$ 份，由共角定理 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BDE}=(AB\times BC):(BE\times BD)=(2\times 3):(5\times 5)=6:25$，设 $S_{\triangle ABC}=6$ 份，恰好 是 3 平方厘米，所以 1 份是 0.5 平方厘米，25 份就是 $25\times 0.5=12.5$ 平方厘米，三角形 BDE 的面积是 12.5 平方厘米.

【作业3】如图在 $\triangle ABC$ 中，D 在 BA 的延长线上，E 在 AC 上，且 $AB:AD=7:2$，$AE:EC=2:1$，$S_{\triangle ADE}=12$ 平方厘米，求 $\triangle ABC$ 的面积.

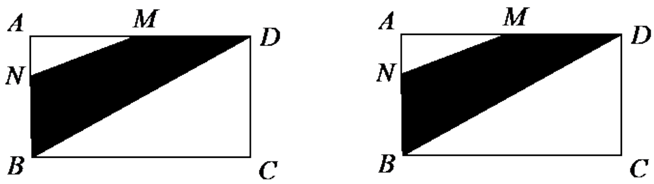


【解析】 因为 $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}=\frac{2\times 2}{7\times 3}=\frac{4}{21}$，所以 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ADE}\div\frac{4}{21}=12\times\frac{21}{4}=63cm^2$.

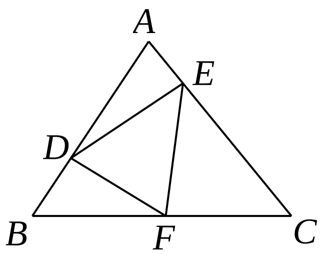
【作业4】如图，长方形 $ABCD$ 的面积是 1，M 是 AD 边的中点，N 在 AB 边上，且 $2AN=BN$.那么，阴影部分的面积是多少？



【解析】连接 BM，因为 M 是中点所以 $\triangle ABM$ 的面积为 $\frac{1}{4}$ 又因为 $2AN=BN$，所以 $\triangle BDC$ 的面积为 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，又因为 $\triangle BDC$ 面积为 $\frac{1}{2}$，所以阴影部分的面积为：$1-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$.



【作业5】已知 $\triangle ABC$ 的面积为 24 平方厘米，$BF=CF,AD=2BD,CE=3AE$，求 $\triangle DEF$ 的面积.



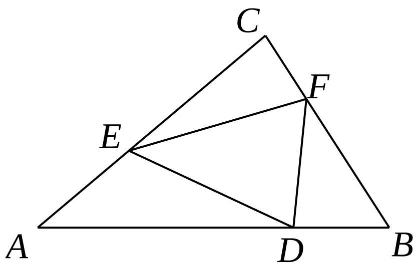
【解析】$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}=\frac{2\times 1}{3\times 4}=\frac{1}{6}$，

$$\frac{S_{\Delta BDF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{BD\times BF}{BA\times BC}=\frac{1\times 1}{3\times 2}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{CE\times CF}{CB\times CA}=\frac{3\times 1}{4\times 2}=\frac{3}{8},$$

所以，$S_{DEF}=\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{3}{8}\right)S_{\Delta ABC}=\frac{24-4-4-9}{24}\times 24=7$．

【作业6】已知 *CE*=2*AE*，*AD*=3*BD*，*CF*:*FB*=3:7．如果三角形 *DEF* 的面积为 1，那么三角形 *ABC* 面积是多少？



【解析】$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=(AE\times AD):(AC\times AB)=(1\times 3):(3\times 4)=1:4$

$S_{\triangle BDF}:S_{\triangle ABC}=(BD\times BF):(BA\times BC)=(1\times 7):(4\times 10)=7:40$

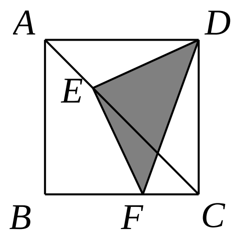
$S_{\triangle CEF}:S_{\triangle ABC}=(CE\times CF):(CA\times CB)=(2\times 3):(3\times 10)=1:5$

设 $S_{\Delta ABC}$=40 份，则 $S_{\Delta ADE}$=10 份，$S_{\Delta BDF}$=7 份，$S_{\Delta CEF}$=8 份，

$S_{\triangle DEF}=40-10-7-8=15$ 份，面积为 1，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{15}\times 40=\frac{8}{3}$．

【作业7】如图所示，正方形 $ABCD$ 边长为 6 厘米，$AE=\frac{1}{3}AC$，$CF=\frac{1}{3}BC$．三角形 DEF 的面积为_______平方厘米．



【解析】由题意知 $AE=\frac{1}{3}AC$、$CF=\frac{1}{3}BC$，可得 $CE=\frac{2}{3}AC$．根据"共角定理"可得，

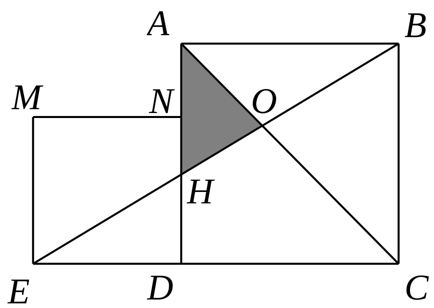
$S_{\triangle CEF}:S_{\triangle ABC}=(CF\times CE):(CB\times AC)=(1\times 2):(3\times 3)=2:9$；

而 $S_{\triangle ABC}=6\times 6\div 2=18$；所以 $S_{\triangle CEF}=4$；

同理得，$S_{\triangle CDE}:S_{\triangle ACD}=2:3$；$S_{\triangle CDE}=18\div3\times2=12$，$S_{\triangle CDF}=6$

故 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle CEF}+S_{\triangle DEC}-S_{\triangle DFC}=4+12-6=10$（平方厘米）.

【作业8】**边长为 8 厘米和 12 厘米的两个正方形并放在一起，那么图中阴影三角形的面积是多少平方厘米？**



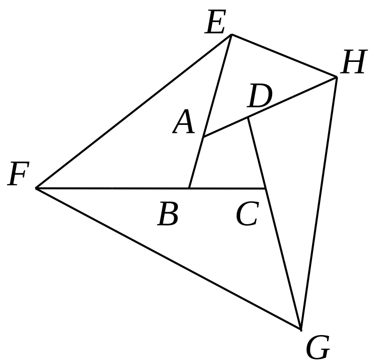
【解析】给图形标注字母，按顺时针方向标注，大正方形为 $ABCD$，小正方形为 $MNDE$，EB 分别交 AC,AD 于 O,H 两点，

$AO:OC=AB:EC=12:20=3:5$，$AH:BC=AO:OC=3:5$

$\therefore AO:AC=3:8$，$AH:AD=3:5$，$S_{\triangle AHO}:S_{\triangle ADC}=9:40$

$\because S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times12^2=72$ 平方厘米 $\therefore S_{\triangle AHO}=\frac{9}{40}S_{\triangle ADC}=\frac{9}{40}\times72=16.2$ 平方厘米

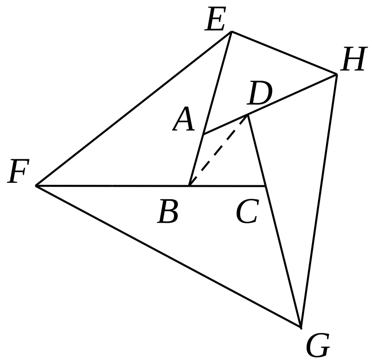
【作业9】**如图，把四边形 *ABCD* 的各边都延长 2 倍，得到一个新四边形 *EFGH* 如果 *ABCD* 的面积是 5 平方厘米，则 *EFGH* 的面积是多少平方厘米？**



【解析】连接 BD，有 ΔEAH、ΔABD 中 $\angle EAD+\angle BAD=180^\circ$

又夹成两角的边 EA、AH，AB、AD 的乘积比，$\frac{EA\times AH}{AB\times AD}=2\times3=6$，所以

$S_{\Delta EAH}=6S_{\Delta ABD}$.

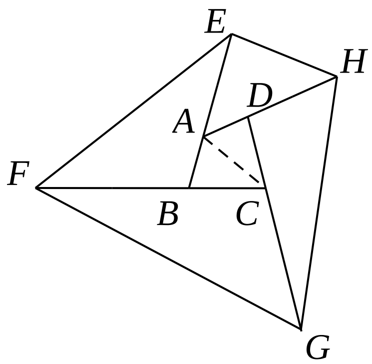


类似的，还可得 $S_{\Delta FCG}=6S_{\Delta BCD}$，有

$S_{\Delta EAH}+S_{\Delta FCG}=6\left(S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}\right)=6S_{ABCD}=30cm^2$．

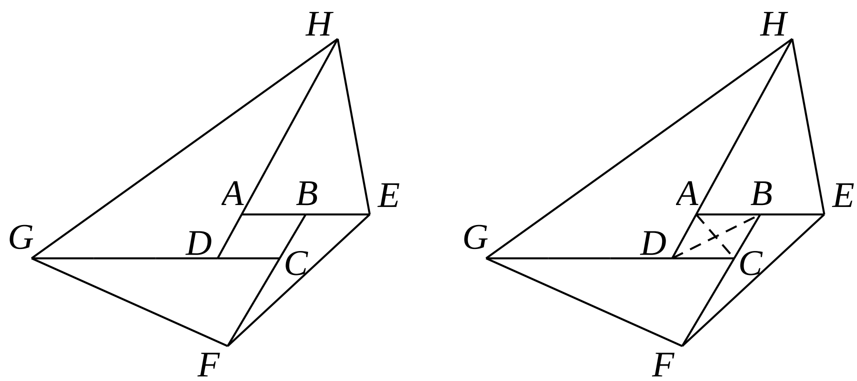
连接 AC，还可得 $S_{\Delta EFB}=6S_{\Delta ABC}$，$S_{\Delta DHG}=6S_{\Delta ACD}$，

有 $S_{\Delta EFB}+S_{\Delta DHG}=6\left(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}\right)=6S_{ABCD}=30cm^2$．



有四边形 $EFGH$ 的面积为 ΔEAH，ΔFCG，ΔEFB，ΔDHG，$ABCD$ 的面积和，即为 $30+30+5=65$ 平方厘米．

【作业10】如图，平行四边形 $ABCD$，$BE=AB$，$CF=2CB$，$GD=3DC$，$HA=4AD$，**平行四边形** $ABCD$ **的面积是** 2，**求平行四边形** $ABCD$ **与四边形** $EFGH$ **的面积比．**



【解析】连接 AC 、 BD . 根据共角定理

∵在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BFE$ 中， $\angle ABC$ 与 $\angle FBE$ 互补，

∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FBE}}=\frac{AB\cdot BC}{BE\cdot BF}=\frac{1\times1}{1\times3}=\frac{1}{3}$.

又 $S_{\triangle ABC}=1$ ，所以 $S_{\triangle FBE}=3$.

同理可得 $S_{\triangle GCF}=8$ ， $S_{\triangle DHG}=15$ ， $S_{\triangle AEH}=8$.

所以 $S_{EFGH}=S_{\triangle AEH}+S_{\triangle CFG}+S_{\triangle DHG}+S_{\triangle BEF}+S_{ABCD}=8+8+15+3+2=36$.

所以 $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

第十四讲 钟表问题家庭作业

【作业1】现在时刻为1:24，钟面上，时针与分针所成的角度是_________度.

【解析】 1:24时，时针与分针相差17格，$17\times6=102^{\circ}$.

【作业2】现在时刻为10点12分，钟面上，时针和分针的夹角是_________度.

【解析】 10点12分时时针与分针相差21格，$21\times6=126^{\circ}$.

【作业3】现在是下午3点整，再过（　　）分时针与分针第一次重合.

【解析】 3点整，时针与分针之间的夹角是$30\times3=90^{\circ}$，分针每分钟比时针每分钟多走$6-0.5=5.5^{\circ}$，所以分针要追90°需要$90\div5.5=16\frac{4}{11}$分，即再过$16\frac{4}{11}$分时针和分针第一次重合.

【作业4】广场上的大钟现在是6时整，再过_________分，时针与分针首次重合.

【解析】在6时整时，时针指向6，分针指向12，它们之间相差180°，分针每分钟走6°，时针每分钟走0.5°，根据时间=路程÷速度差可求出经过的时间，即再过$180\div\left(6-0.5\right)=\frac{180}{5.5}=32\frac{8}{11}$分，时针与分针首次重合.

【作业5】12点钟以后，什么时刻分针与时针第一次成直角？

【解析】根据题意可知，12点时，时针与分针重合，第一次垂直需要90度，即分针追了90度，$90\div(6-0.5)=16\frac{4}{11}$（分）

【作业6】在钟面上7点多的时候，时针与分针什么时刻成直线？

【解析】由于钟面共分60小格，分针一分钟走一小格，分针走60格时，时针走5格，即时针是分针速度的$\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$，设分针的速度是1，则时针的速度是$\frac{1}{12}$，所以两者的速度差为$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$，由于当7点整时，分针和时针相差35格，当时针和分针相差30格或0格时，时针和分针成一条直线，要想成直线，分针应追上时针5个小格或35格，追5格，则追及时间为$5\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=5\frac{5}{11}$分钟，即当7时$5\frac{5}{11}$分时时针与分针成直线；或追35格，则追及时间为：$35\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=38\frac{2}{11}$分钟，即7时$38\frac{2}{11}$分．所以时针与分针成直线的时刻分别是7时$5\frac{5}{11}$分或7时$38\frac{2}{11}$分.

【作业7】7点________分的时候，分针落后时针100度.

【解析】时针每走过一小时即走过了30°，7点即走了$30^{\circ}\times7=210^{\circ}$．分针每分钟走$6^{\circ}$，时针每分钟走$0.5^{\circ}$，所以$\left(30\times7-100\right)\div\left(6-0.5\right)=110\div5.5=20$（分），7点20分的时候，分针落后于时针$100^{\circ}$.

【作业8】小明在7点与8点之间解了一道题．开始时分针与时针成一条直线，解完题时两针正好重合．小明解题用了多少时间？

【解析】开始时分针与时针成一条直线，解完题时刚好重合，说明分针追时针追了180°，

分针每分钟走6°，时针每分钟走0.5°，根据时间=路程÷速度差可求出经过的时间，即解题用了$180\div\left(6-0.5\right)=\dfrac{180}{5.5}=32\dfrac{8}{11}$分.