目录

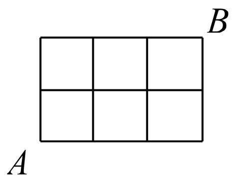
第一讲　标数法

一、基础知识

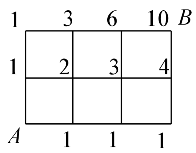
适用于最短路线问题，需要一步一步标出所有相关点的线路数量，最终得到到达终点的方法总数．标数法是加法原理与递推思想的结合．

二、例题精讲

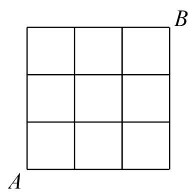
【例 1】如图所示，沿线段从 A 到 B 有________条最短路线.



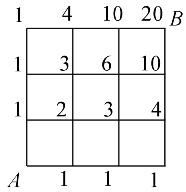
【解析】 如图所示，使用标数法得到从 A 到 B 共有 10 种不同的走法．



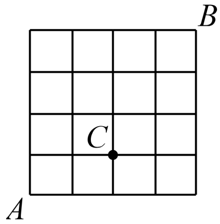
【巩固】 如图，从 A 点到 B 点的最近路线有________条.



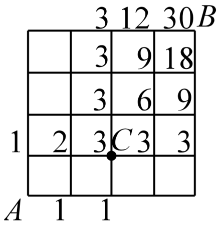
【解析】 如图所示，使用标数法得到从 A 到 B 共有 20 种不同的走法．



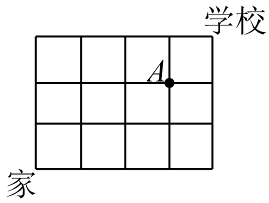
【例 2】如图，大胖从 A 出发到 B，但途中他要经过 C 地去取个快递，那么最短路径有________条.



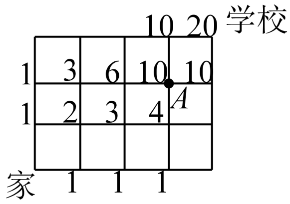
【解析】 如图所示，使用标数法得到从 A 到 B 共有 30 种不同的走法.



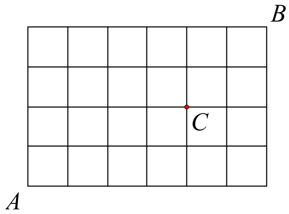
【巩固】 如图，大胖从家经过 A 点到学校，那么最近路线有________条.



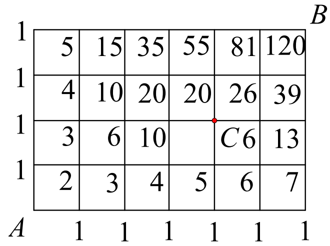
【解析】 如图所示，使用标数法得到从 A 到 B 共有 20 种不同的走法.



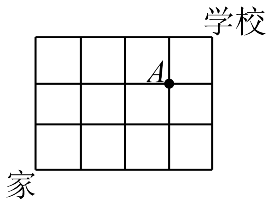
【例 3】如图，某城市的街道由 5 条东西向马路和 7 条南北向马路组成，现在要从西南角的 A 处沿最短的路线走到东北角 B 处，由于修路，十字路口 C 不能通过，那么共有________种不同走法.



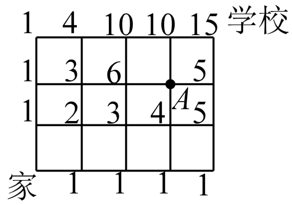
【解析】 如图所示，使用标数法得到从 A 到 B 共有 120 种不同的走法.



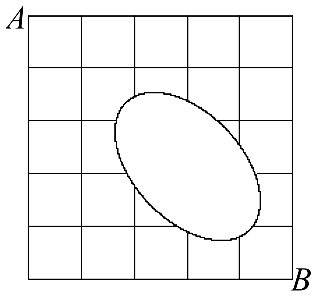
【巩固】 如图，大胖从家到学校，由于 A 点封路不能通过，那么最近路线有________条.



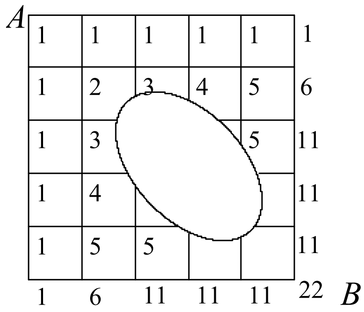
【解析】 如图所示，使用标数法得到从 A 到 B 共有 15 种不同的走法.



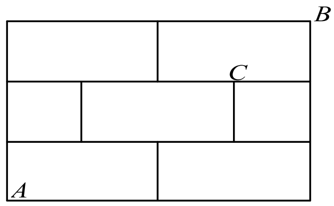
【例 4】在下图的街道示意图中，有几处街区有积水不能通行，那么从 A 到 B 的最短路线有________种.



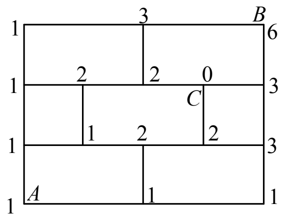
【解析】因为 B 在 A 的右下方，由标号法可知，从 A 到 B 的最短路径上，到达任何一点的走法数都等于到它左侧点的走法数与到它上侧点的走法数之和.有积水的街道不可能有路线经过，可以认为积水点的走法数是 0. 接下来，可以从左上角开始，按照加法原理，依次向下向右填上到各点的走法数. 如右上图，从 A 到 B 的最短路线有 22 条.



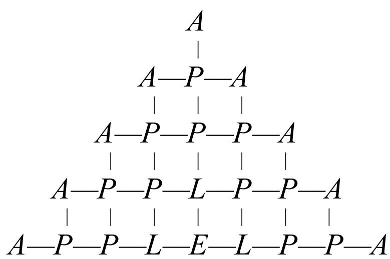
【例 5】在下图的街道示意图中，C 处因施工不能通行，从 A 到 B 的最短路线有________条.



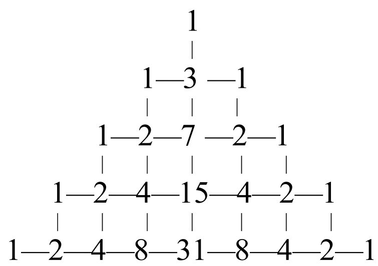
【解析】因为 B 在 A 的右上方，由标号法可知，从 A 到 B 的最短路径上，到达任何一点的走法数都等于到它左侧点的走法数与到它下侧点的走法数之和．而 C 是一个特殊的点，因为不能通行，所以不可能有路线经过 C ，可以认为到达 C 点的走法数是 0．接下来，可以从左下角开始，按照加法原理，依次向上向右填上到各点的走法数．如图，从 A 到 B 的最短路线有 6 条．



【例 6】在下图中，用水平或者垂直的线段连接相邻的字母，当沿着这些线段行走时，正好拼出“*APPLE*”的路线共有多少条？

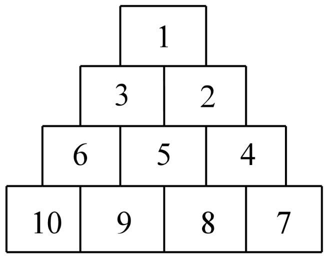


【解析】要想拼出英语“*APPLE*”的单词，必须按照“$A\to P\to P\to L\to E$”的次序拼写．在图中的每一种拼写方式都对应着一条最短路径．如下图所示，运用标数法原理得出共有 31 种不同的路径．

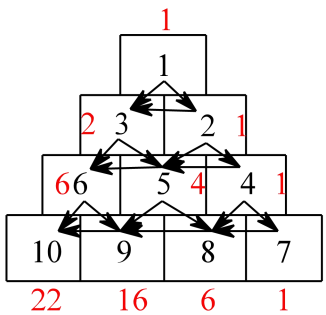


三、巅峰挑战

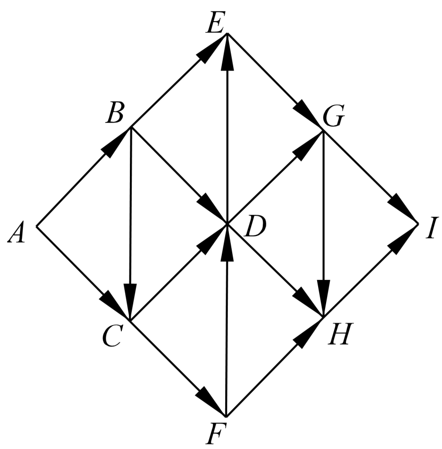
【挑战 1】图中有 10 个编好号码的房间，你可以从小号码房间走到相邻的大号码房间，但不能从大号码走到小号码，从 1 号房间走到 10 号房间共有多少种不同的走法？



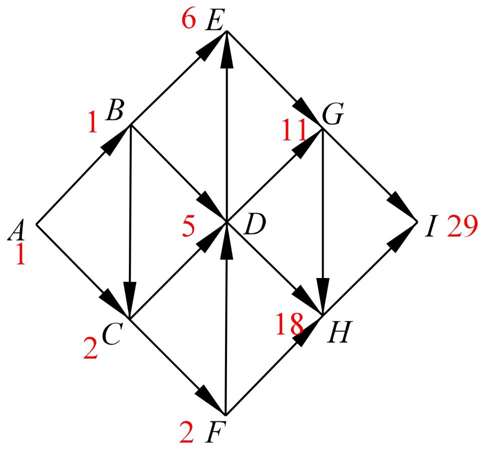
【解析】如图，采用标数法，可知有 22 种不同的走法．



【挑战 2】按图中箭头所指的方向行走，从 *A* 到 *I* 共有多少条不同的路线？

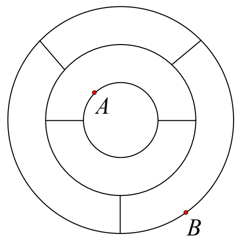


【解析】如图，采用标数法，可知有 29 种不同的走法．

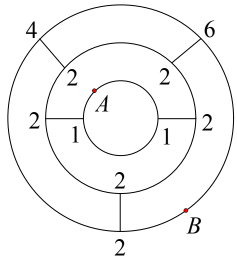


四、登峰造极

【超越 1】如图所示，一个花坛的道路由 3 个圆和 5 条线段组成，小兔要从 *A* 处走到 *B* 处，如果它在圆上只能顺时针方向走，在线段上只能从小圆走向大圆，且每条道路最多走一次，那么小兔可以选择的不同路线有________条．



【解析】采用标数法，如图所示，不同路线共有 6 条．



【超越 2】有一个 10 级的台阶，小张一步最多走 3 阶（每步可以走 1 阶、2 阶或 3 阶），那么他走完 10 级台阶一共有________种走法．

【解析】1 级有 1 种走法，2 级有 2 种走法，3 级有 4 步走法，后面每级的走法等于前面 3 级的走法之和.即 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(3)=4$，$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)$，然后递推可得 $f(10)=274$ 种.

第二讲　平均数

一、基础知识

平均数问题：把一个(总)数平均分成几个相等的数，相等的数的数值就叫做这个(总)数的平均数.平均数是相对于“总数”及分成的“份数”而言的，知道了被均分的“总数”和均分的“份数”，就可以求出平均数.

计算方法：⑴总数÷份数=平均数

⑵找基准数，减少加多法，也可求出平均数.

另外我们也常用到：总数＝平均数×份数

二、例题精讲

【例 1】下图是顺顺 8 次测验成绩的统计表，请问他的平均分是多少？

分数	87	90	91	97	89	79	95	100

【解析】 91 分.

【巩固】 小胖本周读完了一本故事书．第一天他读了 13 页，接下来的三天平均每天读了 17 页，最后三天读了 41 页．他平均每天读故事书多少页？

【解析】 根据总数量÷总天数＝平均数，可得：$(13+17\times3+41)\div(1+3+3)=15$(页)，所以，小胖每天读故事书 15 页.

【例 2】已知九个数的平均数是 72，去掉一个数之后，余下的数平均为 78，去掉的数是多少？

【解析】$72\times9-78\times8=24$.

【巩固】黑板上有 7 个数，平均数为 55.如果把其中一个数改为 140，则平均数变成 64，求被改动的数是多少？

【解析】改动前的总和为 385，改动后总和为 448，相差 63，所以被改动的数是$140-63=77$.

【例 3】甲厂有 50 个工人，乙厂有 40 个工人，上个月甲厂工人平均每人生产 880 颗纽扣，乙厂工人平均每人生产 727 颗纽扣，请问：上个月甲乙两厂平均每个工人生产多少颗纽扣？本月乙厂工人中有 6 个工人设备改良，每个工人多生产 18 颗纽扣，请问：甲乙两厂本月平均每个工人生产多少颗纽扣？

【解析】上个月平均数：$(50\times880+40\times727)\div90=812$(颗)，本月平均数：$812+6\times18\div90=813.2$(颗).

【巩固】已知鸡、鸭、狗三只动物，鸡重 4.2 千克，鸭的重量比鸡的重量多 2.5 千克，狗的重量是鸭的 3 倍少 0.4 千克.求这三只动物的平均重量是多少?

【解析】平均重量：$(4.2+4.2+2.5+6.7\times3-0.4)\div3=10.2$千克

【例 4】100 名学生参加数学考试，平均分 63 分，其中男生平均分是 60 分，女生平均分是 70 分，那么男生比女生多多少人？

【解析】 可以假设每个男生都是60分，每个女生都是70分.3个女生给出21分，恰好够7个男生达到平均分，所以共有70个男生和30个女生.男生比女生多40人.

【巩固】 一个班有30名学生，学生平均身高为140厘米，其中男生18人，男生的平均身高144厘米，则女生平均身高是多少厘米？

【解析】 假设每位男生都是144厘米，那么每位男生比班级平均身高高4厘米，18名男生共高$4\times18=72$厘米，这72厘米要补充女生的身高，所以每位女生需要补$72\div(30-18)=6$厘米，女生平均身高为$140-6=134$厘米.

【例 5】甲、乙两数的平均数是30，乙、丙两数的平均数是34，甲、丙两数的平均数是32，则甲、乙、丙三数的平均数是多少？

【解析】甲、乙、丙三数的总和是$(30\times2+34\times2+32\times2)\div2=96$；所以它们的平均数是$96\div3=32$.

【巩固】 有一次测验中，小胖的三门功课语文与常识的分数和是186分，常识与数学的分数和是192分，语文与数学的分数和是198分，那么小胖三门功课的平均成绩是多少分？

【解析】 数学、语文、常识三科的分数和是$(186+192+198)\div2=288$分；所以它们的平均数是$288\div3=96$分.

三、巅峰挑战

【挑战 1】小龙从家到学校的路上经过一个商店和一个游乐场，从家到商店距离是500米，用了7分钟；从商店到游乐场以80米/分钟的速度要走8分钟；从游乐场到学校的距离300米，走的速度是60米/分钟.那么小龙从家到学校的平均速度是________米/分钟.

【解析】 平均速度=总路程÷总时间$=(500+80\times8+300)\div(7+8+300\div60)=1440\div20=72$（米/分钟）

【挑战 2】菲菲从一班转到了二班，蕾蕾从二班转到了一班.于是一班学生的平均身高增加了2厘米，二班学生的平均身高减少了3厘米.如果蕾蕾身高158厘米，菲菲身高140厘米，那么两个班共有学生________人.

【解析】 蕾蕾比菲菲高：$158-140=18$（厘米）.所以一班有学生：$18\div2=9$（人），二班有学生：$18\div3=6$（人）.两班共有学生：$9+6=15$（人）.

【挑战 3】工厂装配机器人，已经装好944台.以后如果每天比原来多装配2台，还需要40天完成，但最后一天要少装配5台.如果仍按原来的工作效率，就需要多工作3天.这个车间一共需要装配多少台机器人？

【解析】 原来每天装配$(2\times40-5)\div3=25$（台），所以一共装配$25\times(40+3)+944=2019$（台）.

四、登峰造极

【超越 1】四年级五班有 50 名学生，在一次数学考试后，王老师把这些学生按成绩排了名次，发现前 30 名的平均分比后 20 名的平均分多 12 分，一位同学对“平均”的概念不清楚，他把前 30 名的平均分加上后 20 名的平均分，再除以 2，错误地认为这就是全班同学的平均分.这样做全班的平均成绩是提高了，还是降低了？请算出提高或降低了多少分？

【解析】 由题意知，全班实际的平均分比后 20 名的平均分多：$30\times12\div50=7.2$（分）；而这位对平均概念不清楚的学生,他的做法算的全班的平均分比后 20 名的平均分多：$12\div2=6$（分），可见这样做全班的平均成绩降低了，降低了：$7.2-6=1.2$（分）.

【超越 2】18 个数(可以有相同的)按从小到大的顺序排成一排.前 10 个数的平均数是 28.5，后 10 个数的平均数是 31.2，这 18 个数的平均数为 30.请问：第 9 个数和第 10 个 数的和是多少？第 5 个数是多少？

【解析】由题意知，前 8 个数 + 中间 2 个数 $=285$；后 8 个数 + 中间 2 个数 $=312$；前 8 个数 + 中间 2 个数 + 后 8 个数 $=540$，可推出前 8 个数和 $=228$；中间 2 个数和 $=57$；后 8 个数 $=255$，观察得到前 8 个数的平均数 $=228\div8=$ 中间 2 个数的平均数 $=28.5$，这意味着这 10 个数均相等，否则不能满足从小到大的排列顺序. 所以第 5 个数 $=57\div2=28.5$.

第三讲 简单抽屉原理

一、基础知识

（一）抽屉原理的定义

（1）举例

桌上有十个苹果，要把这十个苹果放到九个抽屉里，无论怎样放，有的抽屉可以放一个，有的可以放两个，有的可以放五个，但最终我们会发现至少我们可以找到一个抽屉里面至少放两个苹果.

（2）定义

一般情况下，把 $(n+1)$ 或多于 $(n+1)$ 个苹果放到 n 个抽屉里，其中必定至少有一个抽屉里至少有两个苹果．我们称这种现象为抽屉原理.

（二）抽屉原理的解题方案

（1）利用公式进行解题

苹果÷抽屉＝商……余数

余数：①余数＝1，　结论：至少有（商＋1）个苹果在同一个抽屉里；

②余数＝x $\left(1<x<(n-1)\right)$，结论：至少有（商＋1）个苹果在同一个抽屉里；

③余数＝0，　结论：至少有“商”个苹果在同一个抽屉里.

（2）利用最值原理解题

将题目中没有阐明的量进行极限讨论，将复杂的题目变得非常简单，也就是常说的极限思想“任我意”方法、特殊值方法.

（3）养成对最不利情况的思考——最不利原则.

二、例题精讲

【例 1】顺为小学有 1421 个学生，问：至少有几个学生的生日是同一天？

【巩固】人的头发平均有 12 万根，如果最多不超过 20 万根，那么 13 亿中国人中至少约有________ 人的头发的根数相同.

【解析】这是一道抽屉原理的题目，所以要先分清楚什么是抽屉，什么是苹果.此题中的抽屉是人的头发：有 20 万个，中国的人数是苹果：13 亿人，所以至少应有：$1300000000\div200000=6500$（人）.

【答案】6500 人

【例 2】100 个苹果最多分给多少个学生，能保证至少有一个学生所拥有的苹果数不少于 12 个.

【解析】从不利的方向考虑：当分苹果的学生多于某一个数时，有可能使每个学生分得的学生少于 12 个，求这个数. 100 个按每个学生分苹果不多于 11 个（即少于 12 个）苹果，最少也要分 10 人（9 人 11 个苹果，还有一人一个苹果），否则 9×11＜100，所以只要分苹果的学生不多余 9 人就能使保证至少有一个学生所拥有的苹果数不少于 12 个（即多于 11 个）.

【答案】9

【巩固】把 125 本书分给四⑵班的学生，如果其中至少有一个人分到至少 4 本书，那么，这个班最多有多少人？

【解析】本题需要求抽屉的数量，需要反用抽屉原理和最“坏”情况的结合，最坏的情况是只有 1 个人分到 4 本书，而其他同学都只分到 3 本书，则 $\left(125-4\right)\div 3=40\cdots 1$，因此这个班最多有：$40+1=41$ (人)(处理余数很关键，如果有 42 人则不能保证至少有一个人分到 4 本书).

【答案】41

【例 3】一个布袋里有大小相同、颜色相同的一些球，其中黄色的有 15 个，白色的有 10 个，紫色的有 7 个，红色的有 5 个．请问：

（1）一次至少要取多少个球，才能保证取出的球至少有 3 个颜色？

（2）一次至少要取多少个球，才能保证其中必有黄球和白球？

【巩固】一个布袋里有一些除颜色不同外完全一样的小球，其中红的 7 个，橙的 6 个，黄的 5 个，绿的 4 个，青的 3 个，蓝的 2 个，紫的 1 个，一次至少取________个球，才能保证其中有 3 个球的颜色是相同的.

【例 4】一副扑克牌共有 54 张，先将两张国王扔掉，接下来至少要拿出多少张，才能保证在拿出的牌中有两张牌的花色不同？

【巩固】一副扑克牌中，梅花、红心、黑桃、方块各 13 张，还有两张没有花色的国王．请问：至少要拿出多少张，才能保证在拿出的牌中四种花色都有？

【例 5】三年级有 142 名学生，他们都选择订阅甲、乙、丙三种杂志中的一种、二种或三种，则至少有多少名学生订阅杂志的方式相同？

【巩固】128 个学生参加百分制的考试（考分以整数计）．若没有三个学生的考分相同，那么至少有________对得分相同的学生．

【例 6】布袋中有 60 个彩球，每种颜色的球都有 6 个．蒙眼取球，要保证取出的球中有三个同色的球，至少要取出________个球．

三、巅峰挑战

【挑战 1】老师请班上每位学生分别在黑板上写一个互不相同的二位数．老师宣称无论学生怎样写这些数，黑板上至少有三个数的数字和都相等．请问黑板上至少要有多少位学生才能保证老师所说的话正确？

【解析】两位数数字和为 1，…，18，其中 1,18 只有一种可能．所以班上至少有 $1+1+2\times16+1=35$ 位学生．

【挑战 2】将 100 个苹果分给 10 个小朋友，每个小朋友分得的苹果数互不相同．分得苹果个数最多的小朋友至少得到多少个苹果？

【解析】分析题意，“分得苹果个数最多的小朋友至少得到多少个苹果？”；
发现最不利的情况是：每个小朋友的苹果数量尽可能的相同；$100\div10=10$；
那么小朋友的苹果数量尽可能的相同的分法是：（1）现将苹果数做的不同又相近：6、7、8、9、10、10、11、12、13、14，显然还不满足题意；（2）进一步调整：5、6、7、8、9、11、12、13、14、15；
分得苹果个数最多的小朋友至少得到 15 个苹果．

【挑战 3】自制的一幅玩具牌共计 52 张(含 4 种牌：红桃、红方、黑桃、黑梅.每种牌都有 1 点、2 点、……、13 点牌各一张).洗好后背面朝上放好.一次至少抽取________张牌，才能保证其中必定有 2 张牌的点数和颜色都相同.如果要求一次抽出的牌中必定有 3 张牌的点数是相邻的(不计颜色).那么至少要取________张牌.

【解析】①对前一种情况，可取红、黑色的 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13 点各 1 张，共 $13\times2=26$（张），那么再取一张牌，必定和其中某一张牌点数相同，于是就有 2 张牌点数和颜色都相同.这是最杯的情况，因此，至少要取 27 张牌，必能保证有 2 张牌点数、颜色都相同.
②对后一种情况，有以下的搭配：
（1，2，3）、（4，5，6）、（7，8，9）、（10，11，12），13.
因而对涂阴影的 9 个数，四种花色的牌都取，这样可以取到（$4\times2+1$）$\times4=36$（张）牌，其中没有 3 张牌的点数是相邻的.
现在考虑取 37 张牌，极端情况下，这 37 张牌，有 4 张是 13，则至少要有 33 张牌取自（1，2，3）、（4，5，6）、（7，8，9）、（10，11，12）四个抽屉，根据抽屉原则，必有 9 个数来自其中一个抽屉，这个抽屉中就一定有 3 张牌的点数相邻的.因此，至少要取 37 张牌.

【答案】27 张牌，37 张牌

四、登峰造极

【超越 1】一群小朋友购买售价是 3 元和 5 元的两种商品，每人购买的数量最少是一件，他们也可购买相同的商品，但每人的购买总金额不得超过 15 元，若小朋友中至少有三人购买的两种商品的数量完全相同，问这群小朋友最少有多少人？

【解析】 设购买 3 元商品 a 件，5 元商品 b 件，则（a，b）只可能为（1，0），（2，0），（3，0），（4，0），（5，0），（0，1），（2，1），（3，1），（0，2），（1，0），（1，2），（0，3），共有 12 种购买组合，由抽屉原理可知人数至少有 2×12+1=25.

【超越 2】把 325 个桃子分给若干只猴子，每只猴子分得的桃不超过 8 个．问至少有几只猴子得到的桃一样多？

【解析】 分析题意，"每只猴子分得的桃不超过 8 个，至少有几只猴子得到的桃一样多"；
发现猴子分桃子时，可能有 1 至 8 这 8 种得数；
最不利的情况是：每种得数的猴子尽可能一样多；
$1+2+...+8=36$；
$325\div36=9\cdots1$；
也就是说，如果让 72 只猴子分成 9 组，每组领取 1 至 8 中的一种情况，那么还余下 1 个桃子.
因此，至少有 10 只猴子得到的桃一样多.

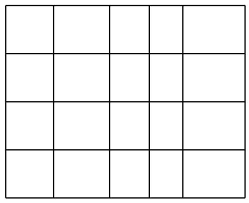
第四讲几何计数

一、基础知识

几何中的计数问题包括：数线段、数角、数长方形、数正方形、数三角形、数综合图形等．通过这一讲的学习，可以帮助我们养成按照一定顺序去观察、思考问题的良好习惯，逐步学会通过观察、思考探寻事物规律的能力．

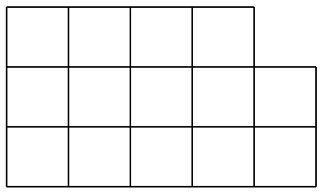
二、例题精讲

【例 1】下图中有________个长方形．

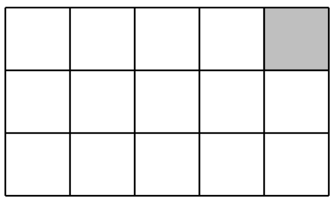


【解析】 横着的线段有 $5+4+3+2+1=15$ 条；竖着的线段有 $4+3+2+1=10$ 条；一共有 $15\times10=150$ 个长方形．

【巩固】 如图，每个小方格都是边长为 1 的正方形，图中共有________个不同的正方形．



【解析】



将原图右上角补一个小方格，使之变成 5×3 的方格网．

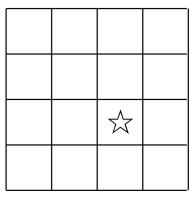
1×1 的小方格有 $5\times3=15$ 个；

2×2 的小方格有 $4\times2=8$ 个；

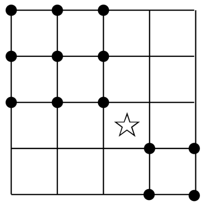
3×3 的小方格有 $3\times1=3$ 个；

其中包含右上角阴影小方格有 3 个（1×1 的小方格、2×2 的小方格、3×3 的小方格）；故原图中共有 $(15+8+3)-3=23$ 个不同的正方形．

【例 2】下图中含有☆的长方形有________个（正方形是特殊的长方形）．

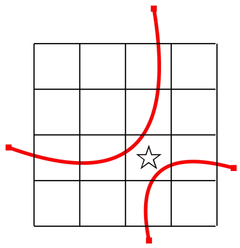


【解析】法一：鼠标法.



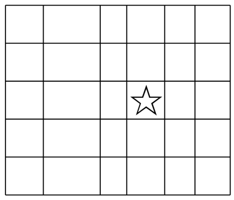
五角星的左上角有 9 个点，右下角有 4 个点，所以含有☆的长方形有 $9\times4=36$ 个.

法二：圈猪法

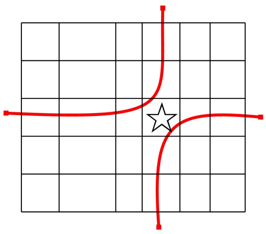


五角星的左边有 3 条线，右边有 2 条线，上边有 3 条线，下边有 2 条线，所以含有☆的长方形有 $3\times2\times3\times2=36$ 个.

【巩固】 下图中含有☆的长方形有________个（正方形是特殊的长方形）.

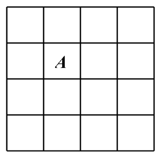


【解析】圈猪法



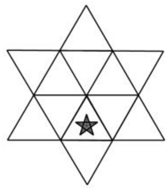
五角星的左边有 4 条线，右边有 3 条线，上边有 3 条线，下边有 3 条线，所以含有☆的长方形有 $4\times3\times3\times3=108$ 个.

【例 3】图中不含“*A*”的正方形有________个.



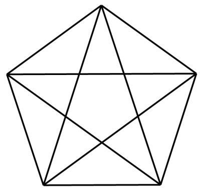
【解析】 面积为 1 的有 15 个，面积为 4 的有 5 个，面积为 9 的没有，所以不含 *A* 的有 20 个.

【巩固】如图是由 12 个同样大小的等边三角形组成的图形，图中包含★的三角形共有________个.



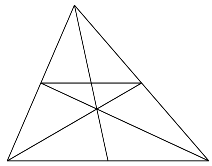
【解析】 分类枚举，包含★的三角形：
由 1 块小三角形组成：1 个；
由 4 块小三角形组成：3 个；
由 9 块小三角形组成：2 个；
共：1+3+2＝6（个）.

【例 4】图中共有________个三角形.



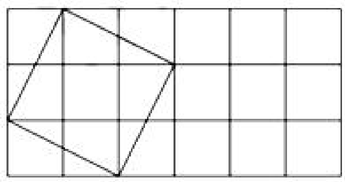
【解析】 从图形所包含的小块数的个数来数，包含一块的三角形有 10 个，包含两块的三角形有 10 个，包含三块的三角形有 10 个，包含五块三角形有 5 个，所以共有 35 个.

【巩固】数一数，图中共有________个三角形.

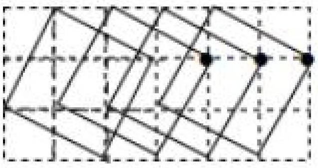
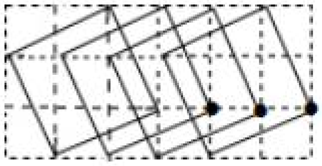


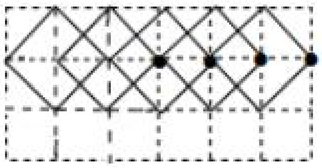
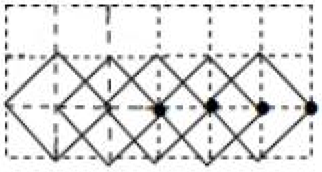
【解析】 由 1 块组成的三角形有：8 个；由 2 块组成的三角形有：5 个；由 3 块组成的三角形有：6 个；由 4 块组成的三角形有：2 个；由 5 块组成的三角形有：2 个；由 8 块组成的三角形有：1 个．所以共有 24 个三角形.

【例 5】如图，一个长方形由 3×6 的正方形网格组成，上有 4 条横线和 7 条竖线，称为网格的网线：这些网线之间有 28 个交叉点，称为网格的节点．以节点为顶点，边在网线上的正方形称为网线正方形；以节点为顶点，边不在网线上的正方形称为非网线正方形．图中已经画出了一个非网线正方形，那么，在图上能够画出的非网线正方形共有________个.



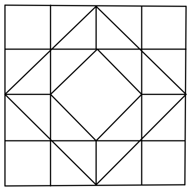
【解析】 如图：

、、

、，

共 4+4+5+5=18 个.

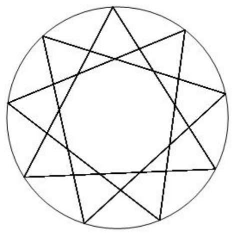
【巩固】下图中共有________个正方形.



【解析】 分类计算边长为 1 的正方形有 12 个；长为 2 的正方形有 1 个；边长为 3 的正方形有 4 个；边长为 4 的有 1 个；边长为 1 个对角线的有 1 个；边长为 2 个对角线的有 1 个；所以一共有：$12+1+4+1+1+1=20$（个）.

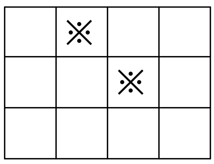
三、巅峰挑战

【挑战 1】 圆中 3 个大三角形都是等边三角形，则图中共有________个三角形.



【解析】 由一块构成的三角形有 9 个，由两块构成的三角形有 18 个，再加上 3 个大三角形. 图中共有三角形：$9+18+3=30$（个）.

【挑战 2】 图中含有“※”的长方形总共有________个.



【解析】 根据本题特点，可采用分类的方法计数．按长方形的宽分类，数出含※号的长方形的个数.

含有左上※号的长方形有：$6+6+6=18$ 个，

其中，宽为 1(即高度为一层)的含※号的长方形为：6 个；

宽为 2(即高度为两层)的含※号的长方形为：6 个；

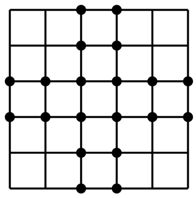
宽为 3(即高度为三层)的含※号的长方形为：6 个；

含有右下※号的长方形有：$6+6\times2+6=24$ 个，

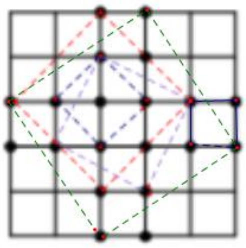
其中，宽为 1(即高度为一层)的含※号的长方形为：6 个；
宽为 2(即高度为两层)的含※号的长方形为：6×2 个；
宽为 3(即高度为三层)的含※号的长方形为：6 个；
同时含有两个※号的重复计算了，应减去，同时含有两个※号的长方形有：
$4+4=8$ 个，其中，宽为 2(即高度为两层)的含※号的长方形为：4 个；
宽为 3(即高度为三层)的含※号的长方形为：4 个；
所以，含有※号的长方形总共有：$18+24-8=34$ 个.

四、登峰造极

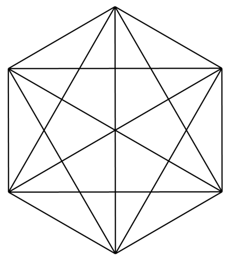
【超越 1】在正方形格纸上有 20 个点，其分布如图所示，现用四个点作为正方形的四个顶点，这样总共可以组成__________个正方形



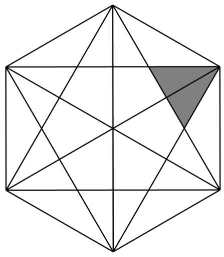
【解析】 21 个，边长由小到大正方形个数分别为 9、4、2、4、2.



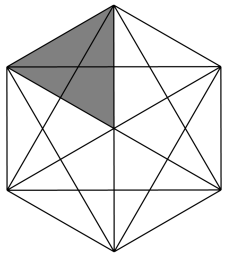
【超越 2】如图，连接一个正六边形的各顶点．问图中共有多少个等腰三角形(包括等边三角形)？



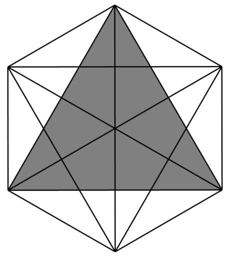
【解析】 本题需要分类进行讨论．
⑴先考虑其中的等边三角形．
图①中，六边形的每 1 个顶点是某个小号等边三角形的顶点，而且，每个小号等边三角形，有且仅有一个顶点是六边形的一个顶点，既然六边形有 6 个顶点，所以图中有 6 个小号三角形；
图②中，六边形的每一条边是某个中号等边三角形的一条边，而且，每个中号等边三角形有且仅有一条边是六边形的一条边，既然六边形有 6 条边，所以图中有 6 个中号等边三角形；
图③中，大号等边三角形有 2 个；



①

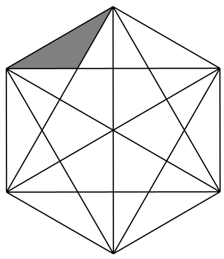


②

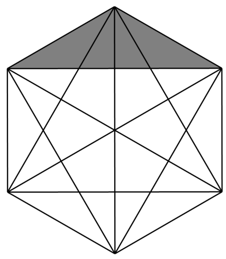


③

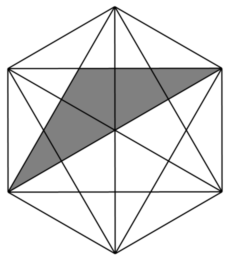
⑵再考虑其中非等边的等腰三角形.
图中非等边的等腰三角形，按照面积大小分类有 3 种类型，见图④.



④



⑤



⑥

其中小号的等腰三角形有 6 个，因为这类三角形均以六边形的一条边为其边长，并且，六边形的每一条边只唯一对应一个小号等腰三角形，而正六边形有 6 条边，所以有 6 个小号等腰三角形；

中号的等腰三角形有 12 个，因为每个中号等腰三角形的长边都是六边形的一条非直径的弦，并且，以非直径的弦为长边的三角形有 2 个，如图⑤，这样的弦共有 6 条，所以有 12 个中号等腰三角形；

大号的等腰三角形有 6 个，因为每个大号等腰三角形的长边都是六边形的一条直径，每条直径上都对应有 2 个大号三角形，如图⑥，共有 3 条直径，所以有 6 个大号等腰三角形.

那么图中共有 $6+6+2+6+12+6=38$ 个等腰三角形.

第五讲 质数与合数

一、基础知识

（一）基础概念

1、质数的定义：一个数除了 1 和它本身，不再有别的因数，这个数叫做质数(也叫做素数).

2、合数的定义：一个数除了 1 和它本身，还有别的因数，这个数叫做合数.

3、要特别记住：0 和 1 不是质数，也不是合数.

4、常用的 100 以内的质数：

2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，共计 25 个；

5、除了 2，其余的质数都是奇数.

6、除了 2 和 5，其余的质数个位数字只能是 1、3、7 或 9.

（二）判断质数的方法

根据定义如果能够找到一个小于 p 的质数 q(均为整数)，使得 q 能够整除 p，那么 p 就不是质数，所以我们只要拿所有小于 p 的质数去除 p 就可以了；但是这样的计算量很大，对于不太大的 p，我们可以先找一个大于且接近 p 的平方数 K^2，再列出所有不大于 K 的质数，用这些质数去除 p，如没有能够除尽的那么 p 就为质数．例如：149 很接近 $144=12\times12$，根据整除的性质 149 不能被 2、3、5、7、11 整除，所以 149 是质数.

二、例题精讲

【例 1】100 以内一共有多少个质数，请写出来.

【解析】标红的就是质数，共 25 个.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

【巩固】 著名的哥德巴赫猜想是：“任意一个大于 4 的偶数都可以表示为两个质数的和”.如 6=3+3，12=5+7，等.那么，自然数 100 可以写成多少种两个不同质数的和的形式？请分别写出来（100=3+97 和 100=97+3 算作同一种形式）.

【解析】 逐一试验，可知：$100=3+97=11+89=17+83=29+71=41+59=47+53$ 为所有符合条件的情况，所以共 6 种.

【例 2】下面哪些是质数？哪些是合数？

101，103，107，109，167，323，343，667

【解析】 质数：101，103，107，109，167，合数：323，343，677

【巩固】最小的三位质数是________，最大的三位质数是________，最小的四位质数是________.

【解析】101，997，1009

【例 3】如果 a、b 均为质数，且 $3a+7b=41$，则 $a+b=$________.

【解析】 根据奇偶性，奇+偶=奇，所以 $3a$ 或 $7b$ 中有一个必为偶数，即 a 和 b 之间必有一个是偶数，又 a、b 均为质数，所以其中一个必为 2.假设 $a=2$，则有 $b=5$，$a+b=7$，符合条件.假设 $b=2$，$3a=41-7\times2=27$，$a=9$，不符合“a、b 均为质数”，舍去.所以 $a+b=7$.

【巩固】如果 a、b 均为质数，且 $11a-93b=2003$，则 $a\times b=$________.

【解析】 $b=2$，$a=\left(2003+93\times2\right)\div11=199$，$a\times b=199\times2=398$.

【例 4】用 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 9 个数字组成质数，如果每个数字都要用到并且只能用一次，那么这 9 个数字最多能组成多少个质数？

【解析】 要使质数个数最多，我们尽量组成一位的质数，有 2、3、5、7 均为一位质数，这样还剩下 1、4、6、8、9 这 5 个不是质数的数字未用．有 1、4、8、9 可以组成质数 41、89，而 6 可以与 7 组合成质数 67．所以这 9 个数字最多可以组成 6 个质数.

【巩固】 有三张卡片，它们上面各写着数字 1、2、3，从中抽出一张、两张、三张，按照任意次序排列出来，可以得到不同的一位数、两位数、三位数，请你将其中的质数都找出来.

【解析】 可以得到 1、2、3、12、13、21、23、31、32、123、132、213、231、312、321.质数有 2、3、13、23、31.

【例 5】将 222 分拆成 10 个质数之和，要求其中最大的质数尽可能的小，那么这个最大的质数是多少？如果要求最大的质数尽可能的大，那么这个最大的质数是多少？

【解析】 （1）要求最大的质数尽可能小，那么拆分的质数要尽量的平均．$222\div10=22.2$，最大的数不小于 22，至少应 23.

$222=23+23+23+23+23+23+23+23+19+19$，满足题意.

（2）要求最大的质数尽可能的大，则其他的质数要尽可能的小，假设均为 2，则最大的数为 204，不是质数，203、201 均不是质数，199 是质数，

$222=199+2+2+2+2+2+2+2+2+7$，满足题意，所以这个最大的质数为 199.

三、巅峰挑战

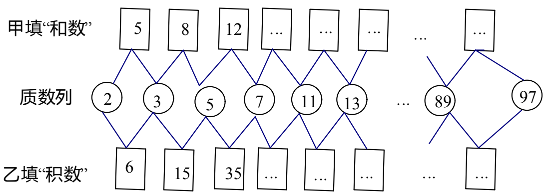
【挑战 1】从 1 到 200 这 200 个自然数中任意选数，至少要选出多少个才能确保其中必有 2 个数的乘积是 238？

【解析】 $238=2\times7\times17$，如果两个小于等于 200 的整数的乘积为 238，那么只有可能为 2×119，7×34，14×17；所以，$\left(2,119\right)$、$\left(7,34\right)$、$\left(14,17\right)$ 这三组数中至少要由一组全取，这样至少要取出 $\left(200-6\right)+4=198$ 个数.

【挑战 2】用 L 表示所有被 3 除余 1 的全体正整数．如果 L 数(1 不算)除 1 及它本身以外，不能被 L 中的其他任何数整除，称此数为“L—质数”．问：第 8 个“L—质数”是什么？

【解析】“L 数”为 1，4，7，10，13，16，19，22，25，28，31，34，….“L—质数”应为上列数中去掉 1，16，28，…，即为 4，7，10，13，19，22，25，31，34，….所以，第 8 个“L—质数”是 31.

【挑战 3】图中圆圈内依次写出了前 25 个质数；甲顺次计算相邻二质数之和填在上行方格中；乙顺次计算相邻二质数之积填在下行方格中．



问：甲填的数中有多少个与乙填的数相同?为什么?

【解析】质数中只有一个偶数 2，其余的质数均为奇数．所以甲填的“和数”中除第一个是奇数 5 外，其余的均为不小于 8 的偶数．乙填的“积数”中除第一个是偶数 6 外，其余所填的全是不小于 15 的奇数．所以甲填的数与乙填的数都不相同.

四、登峰造极

【超越 1】已知 p，$p+2$，$p+6$，$p+8$，$p+14$ 都是质数，则这样的质数 p 共有多少个?

【解析】 当 $p=5k+1$ 时，$p+14=5k+15$ 是合数，同理 $p=5k+2或5k+3或5k+4$ 时，$p+8=5k+10或p+2=5k+5或p+6=5k+10$ 是合数.因此 $p=5k$，因此 p 只能是 5.

【超越 2】如果一些不同质数的平均数是 21，那么这些质数中最大的一个可能是多少？

【解析】如果想使得这些质数中最大的一个尽能大，那么一定要求这些质数在满足平均数为 21 的条件下数量尽可能多，且比 21 大的质数只能有一个.21 以下的质数有 2，3，5，7，11，13，17，19，则说明这些质数最多可能有 $8+1=9$ 个，则大于 21 的那个数为 $21+19+18+16+14+10+8+4+2=112$，但 112 不是质数.分析原因，发现在上面算式中有一个除了 21 以外的奇数 19，使得结果为偶数，说明在原来的一组质数中不能有 2，否则无法使得比 21 大的数是质数.去掉 2 再次求和为 $112-19=93$，仍然不是质数，则可以做微调 $93-4=89$，即在原来的一组质数中再去掉一个 17 即可，这组数为 3，5，7，11，13，19，89，最大的一个是 89.

第六讲最值问题初步

一、基础知识

最值问题，即求最大值、最小值的问题.

最值问题中，有时满足题目条件的情况并不多，这时就可以用枚举法将所有可能情况一一列出，再比较大小.

二、例题精讲

模块一：枚举法

【例 1】将 100 只杯子分别装入若干个盒子中，每盒装的个数互不相同，并且盒盒不空，最多装入多少个盒子？

【巩固】3 个连续自然数相乘，所得乘积的个位数字最大可能是多少？

模块二：极端分析法

【例 2】有一类自然数，它的各个数位上的数字之和为 8888，这类自然数中最小的是几？

【巩固】120 名少先队员选大队长，候选人甲、乙、丙三人.选举时，每人只能投票选举其中 1 人.累计前 100 张选票中，甲得 45 票，乙得 20 票，丙得 35 票.如果这次选举没有弃权票，也没有废票，得票最多的 1 人当选.那么尚未统计的选票中，甲至少再得多少票就能一定当选？

【解析】极端情况，除去乙的 20 票，剩下的 100 票由甲和丙瓜分，甲要当选，需要得 51 票.所以还要 6 票.

模块三：最值规律（和定积大规律；积定和小规律）

【例 3】（1）把 17 分成两个自然数的和，使得他们的乘积最大，应该怎么分？

（2）把 72 写成两个数相乘的形式，要使这两个数的和最小，应该怎么分？

【解析】（1）和一定差小积大，$8\times9=72$

（2）积一定，差小和小．$72=1\times72=2\times36=3\times24=4\times18=6\times12=8\times9$，

当拆成8×9时和最小，和最小是 17

【巩固】一个长方形的周长是 $22cm$，如果它的长和宽都是整数厘米（长大于宽），那么这个长方形的面积有多少种可能值？最大、最小各是多少？

【例 4】把 17 分成几个自然数的和，再求这几个自然数的乘积，要使得他们的乘积最大，应该怎么分？

【解析】多三少二不拆一，486.

【巩固】 把 16 拆成几个自然数的和，要使得这几个自然数的乘积最大，应该怎么分？

【解析】 多三少二不拆一，324.

【例 5】请将 1、2、3、4 填入算式“口口×口口”的方格中.要使得算式结果最大，应该怎么填？

【解析】要使得算式结果最大，首先要保证首位尽量大.那么十位填 3 和 4，个位填 1，2.在两数和固定的情况下，差小积大，那么方格中填41×32.

【巩固】 请将 0、1、2、3、4、5 填入算式“口口口×口口口”的方格中.要使得算式结果最大，应该怎么填？最大的结果是多少？

【解析】要使得算式结果最大，首先要保证首位尽量大.那么百位填 4，5，十位填 2 和 3，个位填 0，1.在两数和固定的情况下，差小积大，那么方格中填520×431.最大结果是 224120.

三、巅峰挑战

【挑战 1】将 1~6 这六个自然数分成甲、乙两组，则甲组数的和与乙组数的和的乘积最大是多少？

【解析】 这六个数的和是 21，分成两组后，甲、乙两组数的和有如下可能：

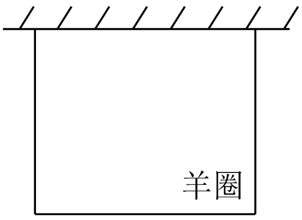
①1 和 20，乘积：20；
②2 和 19，乘积：38；
③3 和 18，乘积：54；
④4 和 17，乘积：68；
⑤5 和 16，乘积：80；
⑥6 和 15，乘积：90；
⑦7 和 14，乘积：98；
⑧8 和 13，乘积：104；
⑨9 和 12，乘积：108；
⑩10 和 11，乘积：110.

因此，两组数各自的和的乘积最大是 110.

【挑战 2】若干自然数的乘积为 324，则这些自然数的和最小为多少？

【解析】 首先有，$324=3\times3\times3\times3\times2\times2$．因为对任意大于等于 2 的两个数 a 和 b，都有 $a\times b\geq a+b$．例如，$3\times3>3+3$，$3\times2>3+2$．如将 324 表示为 $324=9\times3\times3\times2\times2$，五个自然数 9，3，3，2，2 的和大于六个自然数 3，3，3，3，2，2 的和．同样，如 324 表示为 $324=3\times3\times3\times6\times2$，五个自然数 3，3，3，6，2 的和也大于六个自然数 3，3，3，3，2，2 的和．再将五个自然数 9，3，3，2，2 中的任何两个及以上的乘积作为一个新的自然数，得到的这些自然数的和都不会比 9，3，3，2，2 的和小；同样再将五个自然数 3，3，3，6，2 中的任意两个及以上的乘积作为一个新的自然数，得到的这些自然数的和都会比 3，3，3，6，2 和大．因此，这些自然数的和最小为 $3+3+3+3+2+2=16$.

【挑战 3】牧羊人用 15 段每段长 2 米的篱笆，围成一个一面靠墙的正方形或者长方形的羊圈，则羊圈的最大面积是多少平方米？



【解析】 一定要注意每条篱笆是横着放的，这时设和墙相邻的两边都有 n 根篱笆，和墙相对的还有 $15-2n$ 根篱笆，每根篱笆长度为 2，所以长方形的周长，$2n\times(15-2n)\times2$ 最大时，$2n$ 和 $15-2n$ 和定差小积大.当 $2n$ 与 $15-2n$ 越接近时，面积越大，$n=4$．此时长方形 $2n=8$，另一边长 $(15-2n)\times2=14$，面积是 $8\times14=112$ 平方米.

四、登峰造极

【超越 1】用 1，2，3，4，5，6，7，8，9 各一次组成 3 个三位数，使得它们都是 9 的倍数，并且要求乘积最大，请写出这个乘法算式.

【解析】 所有数字的数字和 $1+2+3+\cdots+9=45$，组成的三位数都是 9 的倍数，数字和也要是 9 的倍数，$45=9+18+18$，三个数乘积最大，先保证最高位最大，然后再利用和一定差小积大，越接近越好.百位优选 7，8，9，但是数字和为 9 的就无法拼数.最小调整，将 7 改为 6.数字和 9=6+2+1，十位最大为 7，5，将 7 分给百位为 8 的数（和一定差小积大），数字和 $18=8+7+3=9+5+4$，乘积最大：$621\times873\times954$．

【超越 2】有 20 张卡片，每张上写一个大于 0 的自然数，且任意 9 张上写的自然数之和都不大于 63.若称写有大于 7 的自然数的卡片为“龙卡”，问：这 20 张卡片中“龙卡”最多有多少张？所有“龙卡”上写的自然数之和最大值为多少？

【解析】 由于“龙卡”上写的数最小为 8，而 $8\times8=64>63$．所以这 20 张卡片中，“龙卡”至多 7 张．其余的 13 张卡片上写的数都是小于 8 的非龙卡．设 7 张龙卡上写的数的和为 S，再取两张非龙卡的卡片补足为一个 9 张组，当补足的数值最小时，S 最大，由 $S+1+1\leq63$，因此 $S\leq61$，即 7 张龙卡上所写数的和 S 的最大可能值是 61．现在说明，S 的最大值为 61 是可以达到的．例如，7 张龙卡是 2 张 8，5 张 9；其余

非龙卡是 13 张 1，而 $S=8\times2+9\times5=61$. 满足题设条件. 因此，这 20 张卡片中“龙卡”最多有 7 张；所有“龙卡”上写的自然数的和的最大值是 61.

第七讲数字谜综合

一、基础知识

之前我们学过加减法填空格、破译字母、汉字的竖式谜、添算符等数字谜问题，其中既有加减法，也有乘除法.它们各有一些特定的解题方法和思路，像加减法的进位、借位、错位，乘除法里面的末位分析、首位及位数的估算等，这些方法我们还要进一步地学习和训练.

二、例题精讲

【例 1】相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.请完成这个数字谜.

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D \\ +\quad A\ B\ E\ D \\ \hline E\ D\ C\ A\ D \end{array}$$

【巩固】相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.已知个位向十位的进位为 2，且 E 是奇数，那么 A、B、C、D、E 分别代表什么数字？

$$\begin{array}{r} A\ D\ B\ A \\ D\ C\ A \\ +\quad E\ B\ A \\ \hline C\ E\ C\ E \end{array}$$

【例 2】相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.请完成这个数字谜.

$$\begin{array}{r} A\ B\ B\ A \\ -\quad B\ C\ B \\ \hline C\ B\ C \end{array}$$

【巩固】下面是一个正确的减法算式，其中相同汉字代表相同数字，不同汉字代表不同数字．并且“数＞学＞文＞化”（这里“化”=1），那么四位数“数学文化”=________.

$$\begin{array}{r} \text{数}\ \text{学}\ \text{文}\ \text{化} \\ -\ \text{化}\ \text{文}\ \text{学}\ \text{数} \\ \hline \text{学}\ \text{化}\ \text{数}\ \text{文} \end{array}$$

【答案】7641.

【解析】数-学=1 或 2，学-文=1 或 2，且数+文的尾数为 1．故数=7，文=4，学=6，“数学文化”=7641.

【例 3】题图乘法算式中只有四个位置上的数已知，它们分别是 2、0、1、6，请你在空白位置填上数字，使得算式能够成立，那么乘积为________.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 6 & \square \\
 & \times & \square & \square \\
\hline
 & \square & 1 & \square \\
\square & \square & \square & \\
\hline
2 & \square & 0 & \square
\end{array}
$$

【解析】如图，积为 2205.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \boxed{6} & \boxed{3} \\
 & \times & \boxed{3} & \boxed{5} \\
\hline
 & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{5} \\
\boxed{1} & \boxed{8} & \boxed{9} & \\
\hline
\boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{5}
\end{array}
$$

【巩固】如图所示，在□中填入适当的数字，使乘法竖式成立，那么竖式的乘积为________.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \square & 3 \\
 & \times & \square & \square & \square \\
\hline
 & & \square & \square & 7 \\
\square & 7 & \square & & \\
\hline
\square & 8 & 7 & \square & \square
\end{array}
$$

【解析】答案：28737.

【例 4】每个方框和字母都代表一个数字，相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.请完成这个数字谜.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & A & B \\
\times & & C & D \\
\hline
 & 1 & \square & \square \\
1 & \square & D & \\
\hline
\square & \square & D & 8
\end{array}
$$

【解析】

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 8 \\
\times & & 7 & 6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 8 \\
1 & 2 & 6 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & & 5 & 4 \\
\times & & 3 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 8 \\
1 & 6 & 2 & \\
\hline
1 & 7 & 2 & 8
\end{array}
$$

【巩固】 相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.请完成这个数字谜.

$$\begin{array}{ccccc} & & A & B & C \\ \times & & & D & C \\ \hline & D & E & A & C \\ & 7 & E & D & \\ \hline & F & D & B & C \end{array}$$

【解析】

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & 5 & 6 \\ \times & & & 2 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & 6 \\ & 7 & 1 & 2 & \\ \hline & 9 & 2 & 5 & 6 \end{array}$$

【例 5】 请完成这个数字谜.

$$\begin{array}{r|ccccc} & & & \square & \square & 1 \\ \hline \square\ \square\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ & 2 & 3 & 4 & & \\ \cline{2-6} & & \square & \square & \square & \\ & & 3 & 5 & 1 & \\ \cline{2-6} & & & \square & \square & \square \\ & & & \square & \square & \square \\ \cline{2-6} & & & & & 0 \end{array}$$

【解析】

$$\begin{array}{r|ccccc} & & & \boxed{2} & \boxed{3} & 1 \\ \hline \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{7} & \boxed{2} & \boxed{7} & \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{7} \\ & 2 & 3 & 4 & & \\ \cline{2-6} & & \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{2} & \\ & & 3 & 5 & 1 & \\ \cline{2-6} & & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{7} \\ & & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{7} \\ \cline{2-6} & & & & & 0 \end{array}$$

【巩固】在如图所示的除法竖式中，被除数是________.

```
            □ □ □
      ┌──────────
□ □ □ )2 □ □ □ □
       □ 0 □
       ─────────
       □ □ 1 □
         □ □ 6
       ─────────
           □ □ □
           □ □ □
       ─────────
               0
```

【解析】 答案：20592.由“金三角”结构可知，A、B、C 分别为 1、0、9，进而可推知 D 为 1，因此 E 与 F 只能都为 1．易知 G 为 9，再由尾数判断法可知，除数的个位为 4，可确定除数为 104．其余试填即可.

```
            E G □
      ┌──────────
F □ □ )2 □ □ □ □
       D 0 □
       ─────────
       A B 1 □
         C □ 6
       ─────────
           □ □ □
           □ □ □
       ─────────
               0
```

三、巅峰挑战

【挑战 1】在下面这个加法算式中，每个汉字代表 0~9 中的一个数字，而且不同的汉字代表不同的数字，那么没用到的数字是________.

```
    恰 似
    一 江
    春 水
 +  向 东
 ────────
 流 流 流
```

【答案】 1.

【解析】 4 个两位数之和一定不小于 $10+25+36+47=118$, 不大于 $95+84+73+62=314$, 所以就只能为 2．和为 222，数字和 6，根据弃九法的原理可知：加数中八个数字之和除以 9 的余数为 6，0~9 数字和是 9 的倍数，因此没有用的数字是 $9-2-6=1$.

```
   3 0
   4 5
   6 8
 + 7 9
 ──────
 2 2 2
```

【挑战 2】在下面的加法算式中，每个汉字代表一个非零数字，不同的汉字代表不同的数字．当算式成立时，贺＋新＋春＝________．

（A）24　　　（B）22　　　（C）20　　　（D）18

$$\begin{array}{cccc} & \text{放} & \text{鞭} & \text{炮} \\ + & \text{迎} & \text{龙} & \text{年} \\ \hline & \text{贺} & \text{新} & \text{春} \end{array}$$

【答案】 D

【解析】 9 个不同的字母代表 9 个不同的数字，并且这些数字都是非零的，所以这 9 个字母分别代表了 1~9 这 9 个数字，1+2+3+⋯+9=45，是 9 的倍数.根据弃九法，和的数字和也应该是 9 的倍数，所以选 D.

【挑战 3】请将题图的乘法竖式补充完整，则算式乘积的前三位是________.

$$\begin{array}{cccccc} & & & \square & \square & \square \\ \times & & & 2 & \square & \square \\ \hline & & \square & 0 & \square & \square \\ & \square & \square & 1 & \square & \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \hline \square & \square & \square & 5 & 1 & 2 \end{array}$$

【答案】128.

【解析】 $a=2$；$2\times b$ 的个位是 c，c 是偶数，只能是 4，则 b 是 2 或 7；$d+e=1$，只能是 $1+0$ 或 $0+1$，若 $e=1$，则 b 是奇数，只能是 7，$g=3$，f=6，根据第一层积推出，h=1 或 6，根据第二层积推出，$h=3$，不符合题意，即 $b=7$ 不成立，则 $b=2$，$d=1$，$e=0$，此时 $g=5$，h 是偶数，则 $2\times f$ 必须有进位，$f=6$，h 只能是 0，其他可依次填出，结果是 $502\times256=128512$，即乘积的前三位是 128.

$$\begin{array}{cccccc} & & & \square & \boxed{h} & \boxed{b} \\ \times & & & 2 & \boxed{g} & \boxed{f} \\ \hline & & \square & 0 & \boxed{d} & \boxed{a} \\ & \square & \square & 1 & \boxed{e} & \\ \square & \square & \square & \boxed{c} & & \\ \hline \square & \square & \square & 5 & 1 & 2 \end{array}$$

四、登峰造极

【超越 1】“熊大”×“熊二”=“熊兄弟”.若相同的汉字代表 0 至 9 中的相同数字，不同的汉字代表不同的数字，且“大”>“二”，则所有满足条件的“熊兄弟”代表的三位数之和是________.

【解析】 “熊”只能为 1，
当“熊大”为 12 时，“熊二”无符合条件的答案.
当“熊大”为 13 时，“熊二”只能为 12，$13\times12=156$，符合.
当“熊大”为 14 时，“熊二”为 12 或 13，$14\times12=168$，$14\times13=182$，均符合.
当“熊大”为 15 时，“熊二”为 12、13 或 14，$15\times12=180$，符合；$15\times13=195$，

不符合；$15\times14=210$，不符合.

当“熊大”为 16 时，“熊二”为$12\sim15$，均不符合.

当“熊大”为 17 时，“熊二”为$12\sim16$，$17\times12=204>200$，即“熊大”为 17，18，19 时均无符合情况.

故“熊兄弟”代表的三位数之和为：$156+168+182+180=686$.

【超越 2】*FORTY+TEN+TEN=SIXTY* 在英语里是一个正确的算式，但在下图算式中相同字母代表 0 至 9 中的相同数字，不同字母代表不同的数字，请问每个字母分别代表什么数字.

$$\begin{array}{cccccc} & F & O & R & T & Y \\ & & & T & E & N \\ + & & & T & E & N \\ \hline & S & I & X & T & Y \end{array}$$

【解析】因为 $Y+N+N=Y$，所以 $N=0$ 或 $N=5$；因为，$T+E+E=T$，所以 $E=5$，$N=0$

所以，$R+T+T+1=X$，$F+1=S$，$O=9$，$R+T+T+1=20$ 多，所以 $I=1$，

经尝试可得 $R=7$，$T=8$，$X=4$，$F=2$，$S=3$，$Y=6$，

此时 29786+850+850=31486.

第八讲　定义新运算

一、基础知识

基本概念：定义一种新的运算符号，这个新的运算符号包含有多种基本（混合）运算.

基本思路：严格按照新定义的运算规则，把已知的数代入，转化为加减乘除的运算，然后按照基本运算过程、规律进行运算.

关键问题：正确理解定义的运算符号的意义.

注意事项：①新的运算不一定符合运算规律，特别注意运算顺序.

②每个新定义的运算符号只能在本题中使用.

在这一讲中，我们定义了一些新的运算形式，它们与我们常用的“＋”，“－”，“×”，“÷”运算不相同.

二、例题精讲

模块一：直接运算

【例 1】定义运算 $\oplus$ 和 $\otimes$ 分别为：$a\oplus b=a+2\times b+1$，$a\otimes b=a\oplus(2\times b)\oplus 1$.那么 $2\oplus 3$，$3\oplus 2$，$2\otimes 3$ 分别等于多少？

【解析】 $2\oplus 3=2+2\times 3+1=9$，$3\oplus 2=3+2\times 2+1=8$，
$2\otimes 3=2\oplus\left(2\times 3\right)\oplus 1=2\oplus 6\oplus 1=\left(2+2\times 6+1\right)\oplus 1=15\oplus 1=15+2\times 1+1=18$.

【巩固】已知当 a 大于或等于 b 时，规定 $a\triangle b=3\times a+4\times b$；当 a 小于 b 时，规定 $a\triangle b=4\times a+3\times b$，按此规定计算：$\left(6\triangle 4\right)\triangle 35=$_______.

【解析】$6\triangle 4=3\times 6+4\times 4=34$，$\left(6\triangle 4\right)\triangle 35=34\triangle 35=4\times 34+3\times 35=136+105=241$.

模块二：反解未知数

【例 2】对于两个数 a 与 b，规定：$a\odot b=a\times b+a+b$.如果 $5\odot x=29$，求 x.

【解析】$5\odot x=5x+5+x=29$，$6x=29-5$，$6x=24$，$x=4$

【例 3】对整数 a 和 b，规定“☆”的含义是：$a☆b=3a+4b$，则使等式 $\left(4☆3\right)☆x=172$ 成立的 x 的值为_________.

【解析】$\left(4☆3\right)=3\times 4+4\times 3=24$，$24☆x=172, 3\times 24+4x=172, 4x=100, x=25$.

【巩固】对自然数 a 与 b，定义新运算 $a\Delta b=a+b-2$，如果 $2\Delta\left(3\Delta x\right)=8$，那么 $x=$_________.

【解析】设 $3\Delta x=y$，$2\Delta y=8, 2+y-2=8$，$y=8$，$3\Delta x=8, 3+x-2=8$，$x=7$.

模块三：找规律

【例 4】如果：$1\oplus 2=1+11$；

$2\oplus 3=2+22+222$；

$3\oplus 4=3+33+333+3333$.

计算：$\left(5\oplus 3\right)\times 5$.

【解析】 通过观察发现：$a\oplus b$ 中的 b 表示加数的个数，每个加数数位上的数字都由 a 组成，都由一个数位，依次增加到 b 个数位.$(5\oplus3)\times5=(5+55+555)\times5=3075$.

【例 5】有一个数学运算符号$\otimes$，使下列算式成立：

$2\otimes4=8$，$5\otimes3=13$，$3\otimes5=11$，$9\otimes7=25$，求$7\otimes3=?$

【解析】 通过对$2\otimes4=8$，$5\otimes3=13$，$3\otimes5=11$，$9\otimes7=25$这几个算式的观察，找到规律：$a\otimes b=2a+b$，因此$7\otimes3=2\times7+3=17$.

【巩固】 有一个数学运算符号“$\triangledown$”，使下列算式成立：$6\triangledown2=12$，$4\triangledown3=13$，$3\triangledown4=15$，$5\triangledown1=8$.按此规律计算：$8\triangledown4$.

【解析】 通过对$6\triangledown2=12$，$4\triangledown3=13$，$3\triangledown4=15$，$5\triangledown1=8$这几个算式的观察，找到规律：$a\nabla b=a+3b$，因此$8\nabla4=8+3\times4=20$.

【例 6】$64=2\times2\times2\times2\times2\times2$ 表示成 $f(64)=6$；$243=3\times3\times3\times3\times3$ 表示成 $g(243)=5$.

试求下列的值：

(1) $f(128)=$ ________；

(2) $f(16)=g(\quad)$；

(3) $f(\quad)+g(27)=6$.

【解析】 (1) $f(128)=f\left(2^7\right)=7$；

(2) $f(16)=f\left(2^4\right)=4=g\left(3^4\right)=g(81)$；

(3)因为 $6-g(27)=6-g\left(3^3\right)=6-3=3=f\left(2^3\right)=f(8)$，所以 $f(8)+g(27)=6$.

三、巅峰挑战

【挑战 1】已知 $A*B=AB+A+B$，则 $\underbrace{1*9*9*9\cdots\cdots*9*9}_{\text{共10次运算}}=$ ________.

【解析】
$1*9=1\times9+1+9=19$
$19*9=19\times9+19+9=199$
$199*9=199\times9+199+9=1999$
……
$\underbrace{1*9*9*9\cdots\cdots*9*9}_{\text{共10次运算}}=1\underbrace{9\ldots9}_{10\text{个}9}$
答案：19999999999.

【挑战 2】**定义新运算$\oplus$如下：如果 a 大于等于 b，那么 $a\oplus b=a-b$；如果 a 小于 b，那么 $a\oplus b=b-a$.有一个自然数 n，它满足 $(n\oplus5)+(n\oplus9)=12$，求 n 等于多少？**

【解析】 1 或 13.分三种情况讨论：$n<5$ 时，$n=1$；$5\le n<9$ 时，不可能；$n\ge9$ 时，$n=13$.

【挑战 3】**如果 a、b、c 是 3 个整数，则它们满足加法交换律和结合律，即**

（1）$a+b=b+a$；（2）$(a+b)+c=a+(b+c)$.

现在规定一种运算"*"，它对于整数 a、b、c、d 满足：

$(a,b)*(c,d)=(a\times c+b\times d,a\times c-b\times d)$.

例：$(4,3)*(7,5)=(4\times7+3\times5,4\times7-3\times5)=(43,13)$

请你举例说明，"*"运算是否满足交换律、结合律.

【解析】（1）验证交换律：

$(4,3)*(7,5)=(4\times7+3\times5,4\times7-3\times5)=(43,13)$

$(7,5)*(4,3)=(7\times4+5\times3,7\times4-5\times3)=(43,13)$

所以"*"运算满足交换律.

（2）验证结合律：

$(4,3)*(7,5)*(2,1)=(4\times7+3\times5,4\times7-3\times5)*(2,1)$

$=(43,13)*(2,1)=\left(43\times2+13\times1,43\times2-13\times1\right)=\left(99,73\right)$

$(4,3)*(7,5)*(2,1)=(4,3)*\left[(7,5)*(2,1)\right]$

$=(4,3)*\left(7\times2+5\times1,7\times2-5\times1\right)=(4,3)*\left(19,9\right)$

$=\left(4\times19+3\times9,4\times19-3\times9\right)=\left(103,49\right)$

所以"*"运算不满足结合律.

四、登峰造极

【超越 1】一个数 n 的数字中为奇数的那些数字的和记为 $S\left(n\right)$，为偶数的那些数字的和记为 $E\left(n\right)$，例如 $S\left(134\right)=1+3=4$，$E\left(134\right)=4$．那么，$S\left(1\right)+S\left(2\right)+\cdots+S(100)=$________；$E(1)+E(2)+\cdots+E\left(100\right)=$________.

【解析】数字 1 在个位出现了 10 次，在十位出现了 10 次，在百位出现了 1 次，共 21 次；数字 2~9 每一个都在个位出现了 10 次，在十位出现了 10 次，共出现 20 次.所以

$S\left(1\right)+S\left(2\right)+\cdots+S(100)=\left(1+3+5+7+9\right)\times20+1=501$；

$E(1)+E(2)+\cdots+E\left(100\right)=\left(2+4+6+8\right)\times20=400$．

【超越 2】两个不等的自然数 a 和 b，较大的数除以较小的数，余数记为 $a\odot b$，比如

$5\odot2=1$，$7\odot25=4$，$6\odot8=2$.

（1）求 $1991\odot2000$，$(5\odot19)\odot19$，$(19\odot5)\odot5$；

（2）已知 $11\odot x=2$，**而 x 小于 20，求 x；**

（3）已知 $(19\odot x)\odot19=5$，**而 x 小于 50，求 x.**

【解析】(1)$1991\odot2000=9$；

由 $5\odot19=4$.得 $(5\odot19)\odot19=4\odot19=3$；

由 $19\odot5=4$.得 $(19\odot5)\odot5=4\odot5=1$.

(2)我们不知道 11 和 x 哪个大(注意，$x\neq11$)，即哪个作除数，哪个作被除数，这样就要分两种情况讨论.

1) $x<11$，这时 x 除 11 余 2.x 整除 $11-2=9$.又 $x\geq3$(因为 x 应大于余数 2)，所以 $x=3$ 或 9.

2) $x>11$，这时 11 除 x 余 2，这说明 x 是 11 的倍数加 2，但 $x<20$，所以 $x=11+2=13$.

因此(2)的解为 $x=3,9,13$.

(3)这个方程比(2)又要复杂一些，但我们可以用同样的方法来解.

用 y 表示 $19\odot x$，不管 19 作除数还是被除数，$19\odot x$ 都比 19 小，所以 y 应小于 19.

方程 $19\odot x=5$，说明 y 除 19 余 5，所以 y 整除 $19-5=14$，由于 $y\geq6$，所以 $y=7,14$.

当 $y=7$ 时，分两种情况解 $19\odot x=7$.

1) $x<19$ ，此时 x 除 19 余 7，x 整除 $19-7=12$. 由于 $x\geq 8$ ，所以 $x=12$.

2) $x>19$ ，此时 19 除 x 余 7，x 是 19 的倍数加 7，由于 $x<50$ ，所以 $x=19+7=26$ ，$x=19\times 2+7=45$.

当 $y=14$ 时，分两种情况解 $19\odot x=14$.

1) $x<19$ ，这时 x 除 19 余 14，x 整除 $19-14=5$ ，但 x 大于 14，这是不可能的.

2) $x>19$ ，此时 19 除 x 余 14，这就表明 x 是 19 的倍数加 14，因为 $x<50$ ，所以 $x=19+14=33$.

总之，方程 $(19\odot x)\odot 19=5$ 有四个解， $x=12,26,33,45$.

第九讲 火车过桥

一、基础知识

行程三量：路程=速度×时间．知道其中两个量就可以求另外一个量

行程两态：【相遇】运动方向相反：$S_{和}=v_{和}\times t$

【追及】运动方向相同：$S_{差}=v_{差}\times t$

火车问题：

(1) 火车过桥问题：$S_{车}=l_{桥}+l_{车}=v_{车}\times t$

(2) 火车与人（杆）问题：

①火车过人（杆）：$S_{车}=l_{车}=v_{车}\times t$

②人车相遇：$S_{和}=l_{车}=\left(v_{车}+v_{人}\right)\times t$

③人车追及：$S_{差}=l_{车}=\left(v_{车}-v_{人}\right)\times t$

(3) 火车与火车问题：

①两车相遇：$S_{和}=l_{快车}+l_{慢车}=v_{和}\times t$

②两车追及：$S_{差}=l_{快车}+l_{慢车}=v_{差}\times t$

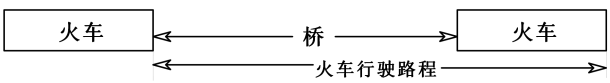
二、例题精讲

模块一：火车过桥问题

【例 1】一列火车以每秒 4 米的速度缓慢通过一座长 298 米的大桥，已知火车车长为 162 米，则一共需要________秒.

【解析】 $\left(162+298\right)\div 4=115s$.

【巩固】一列火车长 160 米，全车通过一座桥需要 30 秒钟，这列火车每秒行 20 米，求这座桥的长度？



【解析】 建议教师帮助学生画图分析．由图知，全车通过桥是指从火车车头上桥直到火车车尾离桥，即火车行驶的路程是桥的长度与火车的长度之和，已知火车的速度以及过桥时间，所以这列车 30 秒钟走过：$20\times 30=600$（米），桥的长度为：$600-160=440$（米）.

【例 2】一座铁路桥长 1200 米，一列火车开过大桥需要 75 秒，火车开过路旁一信号杆需要 15 秒，求火车的速度和车身长？

【解析】 火车开过大桥是说火车从车头上桥到车尾离桥，车头所走的距离是 1200 米加上车身之长，火车开过信号杆，可以把信号灯看作没有速度而没有车身长(长度是零)的火车，所以火车所走的距离是火车车身的长，也就是经过火车车身的长所需的时间为 15 秒，所以火车头从上桥到离桥只用了：$75-15=60$（秒），于是可以求出火车的速度是 $1200\div 60=20$（米/秒），车身长为 $20\times 15=300$（米）.

【巩固】一条隧道长 360 米，某列火车从车头入洞到全车进洞用了 8 秒钟，从车头入洞到全车出洞共用了 20 秒钟．这列火车长多少米？

【解析】火车 8 秒钟行的路程是火车的全长，20 秒钟行的路程是隧道长加火车长．因此，火车行隧道长（360 米）所用的时间是$(20-8)$秒钟，即可求出火车的速度．解火车的速度是$360\div(20-8)=30$（米/秒）．火车长$30\times8=240$（米）．

模块二：火车与人的相遇与追及问题

【例 3】一列火车长 248 米，它的速度是每秒 30 米，一个人与火车相向而行，全列火车从他身边开过用 8 秒钟，这个人的步行速度是多少？

【解析】根据题意可知火车与人的速度和为$248\div8=31$米/秒，而火车速度为 30 米/秒，所以这个人的步行速度是$31-30=1$米/秒．

【例 4】小胖沿着一条与铁路平行的笔直小路行走，这时有一列长 460 米的火车从他背后开来，他在行进中测出火车从他身边通过的时间是 20 秒，而在这段时间内，他行走了 40 米．求这列火车的速度是多少？

【解析】火车走的路程为：$460+40=500$(米)，火车速度为：$500\div20=25$(米/秒)．

【巩固】两列火车相向而行，甲车每秒行 13 米，乙车每秒行 17 米，两车错车时，甲车上一乘客从乙车车头经过他的车窗时开始计时，到车尾经过他的车窗共用 13 秒．问：乙车全长多少米？

【解析】$(13+17)\times13=390$米．提示：乙车的全长等于甲、乙两车 13 秒走的路程之和．

模块三：火车与火车的相遇与追及

【例 5】从北京开往广州的列车长 350 米，每秒钟行驶 22 米，从广州开往北京的列车长 280 米，每秒钟行驶 20 米，两车在途中相遇，从车头相遇到车尾离开需要多少秒钟？

【解析】从两车车头相遇到车尾离开时，两车行驶的全路程就是这两列火车车身长度之和．解答方法是：(A 的车身长+B 的车身长)÷(A 的车速+B 的车速)＝两车从车头相遇到车尾离开的时间.也可以这样想，把两列火车的车尾看作两个运动物体，从相距 630 米(两列火车本身长度之和)的两地相向而行，又知各自的速度，求相遇时间．两车车头相遇时，两车车尾相距的距离：$350+280=630$(米)两车的速度和为：$22+20=42$（米/秒）；从车头相遇到车尾离开需要的时间为：$630\div42=15$(秒)．综合列式：$(350+280)\div(22+20)=15$(秒)．

【例 6】快车 A 车长 120 米，车速是 20 米/秒，慢车 B 车长 140 米，车速是 16 米/秒．慢车 B 在前面行驶，快车 A 从后面追上到完全超过需要多少时间？

【解析】从“追上”到“超过”就是一个“追及”过程，比较两个车头，“追上”时 A 落后 B 的车身长，“超过”时 A 领先 B(领先 A 车身长)，也就是说从“追上”到“超过”，A 的车头比 B 的车头多走的路程是：B 的车长+A 的车长，因此追及所需时间是：(A 的车长+B 的车长)÷(A 的车速-B 的车速)．由此可得到，追及时间为：(A 车长+B 车长)÷(A 车速-B 车速)=$(120+140)\div(20-16)$=65 (秒)

三、巅峰挑战

【挑战 1】一个车队以 6 米/秒的速度缓缓通过一座长 250 米的大桥，共用 152 秒．已知每辆车长 6 米，两车间隔 10 米．问：这个车队共有多少辆车？

【解析】 由“路程=时间×速度”可求出车队 152 秒行的路程为 $6\times152=912$(米)，故车队长度为 $912-250=662$(米)．再由植树问题可得车队共有车 $\left(662-6\right)\div\left(6+10\right)+1=42$(辆)．

【挑战 2】某解放军队伍长 450 米，以每秒 1.5 米的速度行进．一战士以每秒 3 米的速度从排尾到排头并立即返回排尾，那么这需要多少时间?

【解析】 第一个过程，战士与排头兵相距一个队伍的长，也就是 450 米，排头兵的速度就是队伍的速度，即每秒 1.5 米．这个追及过程共用时：$450\div\left(3-1.5\right)=300$ 秒．第二个过程，战士与队尾兵也相距 450 米，队尾兵的速度也是每秒 1.5 米．这个相遇过程共用时：$450\div\left(3+1.5\right)=100$ 秒．整个过程一共用时 $300+100=400$ 秒．

【挑战 3】有两列同向行驶的列车，快车每秒行 28 米，慢车每秒行 20 米.如果从两列车车尾对齐开始算，30 秒后快车超过慢车；如果从两列车车头对齐开始算，38 秒后快车超过慢车.快车长多少米？慢车长多少米？

【解析】 车尾对齐，快车比慢车多跑一个慢车的长度，$S_{差}=L_{慢}=V_{差}\times t_{追及}=\left(28-20\right)\times30=240m$；

车头对齐，快车比慢车多跑一个快车的长度，$S_{差}=L_{快}=V_{差}\times t_{追及}=\left(28-20\right)\times38=304m$

四、登峰造极

【超越 1】某列车通过 250 米长的隧道用 25 秒，通过 210 米长的隧道用 23 秒，若该列车与另一列长为 150 米、时速为 72 千米的列车相遇，错车而过需要几秒钟？

【解析】 根据另一个列车每小时走 72 千米，所以它的速度为：$72000\div3600=20$（米/秒），某列车的速度为：$\left(250-210\right)\div\left(25-23\right)=40\div2=20$ （米/秒）某列车的车长为：$20\times25-250=500-250=250$ （米），两列车的错车时间为：$\left(250+150\right)\div\left(20+20\right)=400\div40=10$ （秒）．

【超越 2】甲、乙二人沿铁路相向而行,速度相同,一列火车从甲身边开过用了 8 秒钟,离甲后 5 分钟又遇乙,从乙身边开过,只用了 7 秒钟,问从乙与火车相遇开始再过多久甲乙二人相遇?

【解析】火车速度 $V_{车}$与甲、乙二人速度 $V_{人}$的关系，设火车车长为 l，则：

火车开过甲身边用 8 秒钟，这个过程为追及问题：

故，$l=$（$V_{车}$-$V_{人}$）×8.　（1）

火车开过乙身边用 7 秒钟，这个过程为相遇问题：

故，$l=$（$V_{车}$+$V_{人}$）×7.（2）

由（1）、（2）可得：8（$V_{车}$-$V_{人}$）=7（$V_{车}$+$V_{人}$），

所以，$V_{车}=15V_{人}$．火车头遇到甲处与火车遇到乙处之间的距离是：

（8+5×60）×$V_{车}$=308$V_{车}$=308×15$V_{人}$=4620$V_{人}$.

火车头遇到乙时甲、乙二人之间的距离，火车头遇甲后，又经过（8+5×60）秒后，火车头才遇乙，所以，火车头遇到乙时，甲、乙二人之间的距离为：4620$V_{人}$-（8+5×60）$V_{人}$=4312$V_{人}$.所以甲、乙二人相遇时间为：4312$V_{人}$÷2$V_{人}$=2156（秒）

第十讲对应法初步

一、基础知识

同学们在解答应用题时，经常会碰到这样一类题，给定的数量和所对应的数量关系是在变化的.为了使变化的数量看得更清楚，可以把已知条件按照它们之间的对应关系排列出来，进行观察和分析，从而找到答案．这种解题的思维方法叫对应法.

二、例题精讲

模块一：计算中的对应

【例 1】计算：$(2+4+6+\cdots+1000)-(1+3+5+\cdots+999)$.

【巩固】计算：$(1+3+5+7+\cdots+99)-(2+4+6+\cdots+98)$

【例 2】将自然数 1,2,3,…,100 依次无间隔地写成一个多位数：12345678910…99100．求这个多位数的所有数码和.

【解析】 0 和 99 对应，1 和 98 对应，2 和 97 对应…49 和 50 对应，它们的数字之和都为 $9+9=18$，共 50 组；加上 100 的数字和为 1：$18\times 50+1=901$.

【巩固】下面数字方阵中共有 10000 个数，所有这些数之和等于多少？

1	2	3	...	99	100
2	3	4	...	100	101
3	4	5	...	101	102
4	5	6	...	102	103
	......			......	
100	101	102	...	198	199

【解析】 首项为 5050，公差为 100，末项为 $5050+99\times 100=14950$，和为 $(5050+14950)\times 100\div 2=1000000$

模块二：计数中的对应

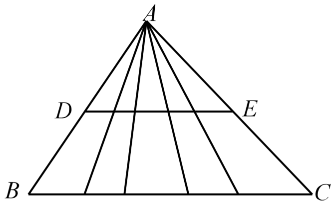
【例 3】16 名乒乓球运动员参加单打比赛，两两成对进行淘汰赛（每场比赛淘汰一名运动员），请问要决出冠军，一共要比赛多少场？

【解析】 一场比赛与淘汰掉一名运动员可建立"一对一"的对应关系．要淘汰多少名运动员，就要进行多少场比赛．15 场.

【例 4】从 1985 到 4891 的整数中，十位数字与个位数字相同的数共有________个.

【解析】 十位和个位相同的数 1988,1999，…，4888 可以与“合并”后的三位数建立一一对应关系：198,199,200，…，488；共有 $488-198+1=291$ 个.

【例 5】请问图中一共有________个三角形.



【解析】 可用数线段的方法数如右图所示的三角形（对应法），因为 DE 上有 15 条线段，每条线段的两端点与点 A 相连，可构成一个三角形，共有 15 个三角形，同样一边在 BC 上的三角形也有 15 个，所以图中共有 30 个三角形.

模块三：应用题中的对应

【例 6】鸡兔同笼共有 44 只脚，若将鸡兔互换，则共有 52 只脚，问鸡兔各有多少只？

【解析】兔 6 只，鸡 10 只.

【例 7】商场出售 64*G*，32*G*，16*G* 的 *U* 盘，它们的售价分别为 300 元，150 元和 100 元. 陈老师用 8100 元共买了 55 个 *U* 盘，其中 32*G* 的 *U* 盘个数和 16*G* 的 *U* 盘个数一样多. 问：3 种 *U* 盘各买了多少个？

【解析】 32 和 16 对应，看成 24*G* 的 *U* 盘卖 125 元一个，然后变成基础的鸡兔同笼问题.64*G* 的买了 7 个，其他各 24 个.

三、巅峰挑战

【挑战 1】在一个 8×8 的方格棋盘（如图 1）中，取出一个由 3 个小方格组成的“*L*”形（如图 2，“*L*”形可旋转），一共有多少种不同的方法？

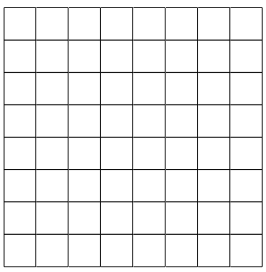


图 1

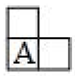


图 2

【解析】 每一种取法，有一个点与之对应，如图 2 中的 A 点，它是棋盘上横线与竖线的交点，且不在棋盘边上. 从图 2 可以看出，棋盘内的每一个点对应着 4 个不同的取法(“*L*”形的“角”在 2×2 正方形的不同“角”上). 由于在 8×8 的棋盘上，内部有 $7\times7=49$ (个)交叉点，故不同的取法共有 $49\times4=196$ (种).

【挑战 2】一楼梯共 15 级,只能向上走（不限定每步阶梯数）,要登上第 6 级,共有________种不同走法.

【解析】32 本题在登阶梯时并不限定每步阶梯的数量,

阶梯数	0	1	2	3	4	5	6
走法	1	1	2	4	8	16	32

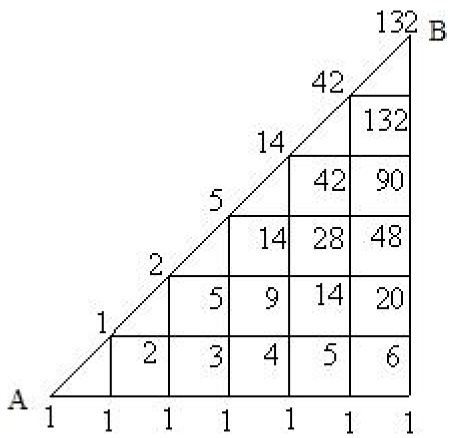
四、登峰造极

【超越 1】顺顺和为为一起洗 4 个互不相同的碗（顺序固定），顺顺洗好的碗一个一个往上摞，为为再从最上面一个一个地拿走放入碗柜摞成一摞，两个人一边洗，一边拿，问为为摞好的碗一共有多少种不同的摞法？

【解析】按顺顺洗碗的顺序将这 4 个碗依次标号为1、2、3、4，则为为摞好的碗一共有如下14 种摆法：1234，1243，1324，1342，1432，2134，2143，2314，2341，2431，3214，3241，3421，4321.答案为14 种.

【超越 2】将 1~12 这 12 个数填入到 2 行 6 列的方格表中，使得每行右边比左边的大，每一列上面比下面的大，共有多少种填法？

【解析】因为每行右边比左边的大，每一列上面比下面的大，所以 1 只能填在第一行左方第一个格子记作 A，而且 12 只能填在第二行右方最后一个格子记作 B，那么此题就相当于从 A 到 B 的最短路线有多少条？因此根据对应关系，用横格代表在第一行的 6 列，纵格代表第二行的 6 列，然后运用阶梯型标数法画图即可得出答案.
根据对应关系，运用阶梯型标数法画图如下，共有 132 种填法.



第十一讲体育比赛中的数学

一、基础知识

1.淘汰赛：n 个队进行淘汰赛，赛出第一名至少要打 $(n-1)$ 场比赛，每场比赛淘汰一名选手.

2.单循环赛：n 支队伍进行单循环赛，将进行 $n(n-1)\div 2$ 场，其中每支队都进行 $(n-1)$ 场.

3.体育比赛中的总分（记为 A）问题

三分制：胜、平、负按 3、1、0 积分制度，其中 $2m\le A\le 3m$，每多出现一场平局，总分就会减少 1 分；

二分制：胜、平、负按 2、1、0 积分制度，其中 $A=2m$，不管比赛情况如何，最后的总分总是不变的.

4.一个小组内：胜的总场数等于负的总场数；平的总场数一定是偶数.

二、例题精讲

【例 1】16 支羽毛球队伍进行淘汰赛，最终决出冠、亚、季军各 1 队．那么这次淘汰赛共进行多少场比赛？

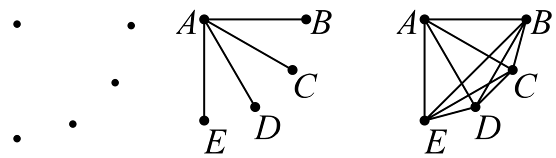
【解析】方法一:16 进 8 进行了 8 场，8 进 4 进行 4 场，4 进 2 进行 2 场，最后决赛是 1 场，以及第三、四名还要为决出季军需要多进行一次比赛，因此共进行了 $8+4+2+1+1=16$ 场比赛.

方法二：每进行一场比赛就淘汰一支球队，最后只剩下冠军了，也就是说淘汰了 15 只球队，因此进行了 15 场比赛．但注意决出季军需要多进行一次比赛，因此需要$15+1=16$ 场比赛.

【例 2】四年级五个班进行足球比赛，每两个班之间都要赛一场，那么每个班要赛几场？一共要进行多少场比赛？（如果参赛队每两队之间都要赛一场，这种比赛称为单循环赛）

【解析】 一共有五个队，每个队都要比赛 $5-1=4$ 场，一共有比赛 $5\times4\div2=10$ 场.

我们可以将上面的问题如下表述：下面的五个点，每两个点之间都连一条线段，那么，从一个点可以连出几条线段？一共可以连多少条线段？



【巩固】学校进行乒乓球选拔赛，每个参赛选手都要和其他所有选手各赛一场，一共进行了 36 场比赛，有多少人参加了选拔赛？

【解析】由公式 $n(n-1)\div2$ 可知，当 n 为 9 时满足条件，因此共 9 人.

【例 3】参加世界杯足球赛的国家共有 32 个（称 32 强），每四个国家编入一个小组，在第一轮单循环赛中，每个国家都必须而且只能分别和本小组的其他各国进行一场比赛，赛出 16 强后，进入淘汰赛，每两个国家用一场比赛定胜负，产生 8 强、4 强、2 强，最后决出冠军、亚军、第三名，第四名．至此，本届世界杯的所有比赛结束．根据以上信息，算一算，世界杯的足球赛全程共有几场？

【解析】 单循环赛中，有 $32\div4=8$ 个组．每组 4 个队．每组四个队中，每个队要与其他 3 队都比赛 1 场，每个队就比 3 场．因为每场比赛要 2 个队．所以 1 组里有 $4\times3\div2=6$ 场．有 8 个组，单循环赛就有 $8\times6=48$ 场．进入淘汰赛，有 16 个队，淘汰赛每比 1 场就淘汰 1 个队，最后决出冠军 1 个队，就比了 $16-1=15$ 场，还要决出第三名，第四名，又多了 1 场．淘汰赛就有 $15+1=16$ 场．世界杯的足球赛全程共有 $48+16=64$ 场．

【例 4】A、B、C、D、E、F 六人赛棋，采用单循环制．现在知道：A、B、C、D、E 五人已经分别赛过 5、4、3、2、1 盘．问：这时 F 已赛过了多少盘？

【解析】3 盘

【巩固】有 8 个选手进行乒乓球单循环赛，结果每人获胜局数各不相同，那么冠军胜了几局？

【解析】 8 个选手进行乒乓球单循环赛，每个选手都要参加 7 场比赛，而且每人获胜局数各不相同，所以每人获胜的局数分别为 0～7 局，那么冠军胜了 7 局．

【例 5】六个人进行象棋单循环赛，规定胜者得 2 分，负者得 0 分，和棋双方各得 1 分，比赛结束后统计发现，六个人的得分加起来一定是多少？已知冠军得 7 分，负了一场，问冠军胜了多少场？

【解析】30 分，3 场

【巩固】东亚男足邀请赛共有四支足球队进行单循环赛，即每两队之间都要进行一场比赛，每场比赛胜者得 3 分，负者得 0 分，平局两队各得 1 分．所有比赛结束后四队的总得分为 16 分．请问：一共有多少场平局？

【解析】 4 支队伍进行单循环比赛，一共要比赛 $4\times3\div2=6$（场）．如果打成平局，那么两队得分之和为 $1+1=2$（分），如果分出胜负，那么两队得分之和为 $3+0=3$（分）．假设每一场的分出胜负，那么 4 队总得分为 $6\times3=18$（分），如果用一场平局代替一场胜负局，总分将下降 1 分，而 $18-16=2$（分），可见共有两场平局．

【例 6】班上四名同学进行跳棋比赛，每两名同学都要赛一局．每局胜者得 2 分，平者各得 1 分，负者得 0 分．已知甲、乙、丙三名同学得分分别为 3 分、4 分、4 分，且丙同学无平局，甲同学有胜局，乙同学有平局，请问

（1）丁同学得了多少分？

（2）甲同学与丁同学的比赛结果如何？

【解析】 4 个同学共赛 $4\times3\div2=6$（局），结合条件“丙同学无平局，甲同学有胜局，乙同

学有平局”，分解三名同学分数配比：甲：$3=1\times2+1$（一胜一平一负）；乙：$4=1\times2+2\times1$（一胜二平）或（二胜一负）；丙：$4=2\times2$（二胜一负）；观察可知有四胜二负，所以丁同学负了二场，又因为有三平，所以丁同学平了一场．则丁同学得：$1\times1=1$（分），甲与丁的比赛中甲胜丁负．

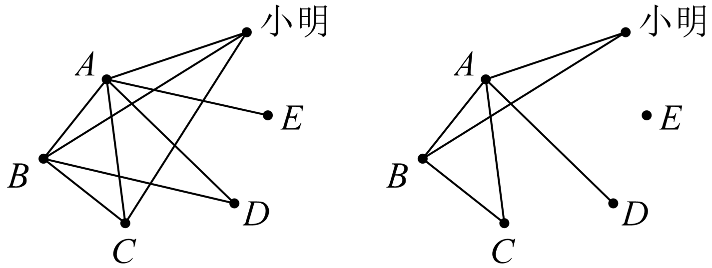
三、巅峰挑战

【挑战1】小明和其他5个同学一起在教室里进行象棋比赛，任意两人之间至多一盘棋．若这5个同学下棋的盘数各不相同，则小明下棋的盘数是多少？

【解析】由于一共有6个人，每人最多比赛5场，因此比赛场数的情况有5场、4场、3场、2场、1场和0场共六种．如果有一人比赛了5场，证明他与所有人都进行了比赛，这时就没有人比赛了0场，反之，如果有人比赛了0场，说明他没有跟其他人进行过比赛，这时就没有人比赛了5场．所以，小明的5名同学的比赛场数有两种情况：

（1）5名同学分别比赛了5场、4场、3场、2场和1场（其中A、B、C、D、E分别比赛5场、4场、3场、2场、1场），如下左图．这时，容易推出小明比赛了3场．

（2）5名同学分别比赛了4场、3场、2场、1场和0场（其中A、B、C、D、E分别比赛4场、3场、2场、1场、0场），如下右图．这时，容易推出小明比赛了2场．



综上，小明的比赛场次是3场或2场．

【挑战2】A、B、C、D、E五人参加乒乓球比赛，每两个人都要赛一盘，并且只赛一盘，规定胜者得2分，负者不得分，已知比赛结果如下：①A与E并列第一名；②B是第三名；③C和D并列第四名．求B得多少分？

【解析】先计算一下有多少场比赛？总分是多少？再确定第一名的得分．

共五名选手参加比赛，每人都要赛4场，每场比赛不是得2分就是得0分，所以每名选手的总分一定是0、2、4、6、8五数之一．四场都负得0分，四场都胜得8分，因此，B的得分比0分多，比8分少（他不是第一，也不是第四），只可能是2、4、6三数之一．还不要忘记两个并列第一，两个并列第四这两个重要条件．

因为五个人一共比赛$4\times5\div2=10$（场），所以10场球一共得分：$2\times10=20$（分）．有两个并列第一，两个并列第四，决定了没有全胜的，也没有全败的，也就是没有得8分的，也没有得0分的，得分情况只有2、4、6分三种．所以，并列第一的一共得：$6\times2=12$（分），并列第四的一共得：$2\times2=4$分，第三名得$20-(12+4)=4$（分），所以，B得4分．

四、登峰造极

【超越 1】五个足球队进行循环比赛，即每两个队之间都要赛一场．每场比赛胜者 2 分、负者得 0 分、打平两队各得 1 分．比赛结果各队得分互不相同．已知：⑴第 1 名的队没有平过；⑵第 2 名的队没有负过；⑶第 4 名的队没有胜过．问全部比赛共打平了多少场．

【解析】 5 支球队进行循环赛，共需要打 10 场，产生总分 20 分．由⑴、⑵知第1名负于第 2 名，那么第 1 名最多得 $2\times3=6$ 分．由于各队得分互不相同，而且 $6+5+4+3+2=20$，所以 5 支球队得分依次为 6 分、5 分、4 分、3 分、2 分．第一名没有平过，又只得到了 6 分，因此负过一场，而第二名的队没有负过，因此第一名应该负于第二名，胜 3，4，5 名．第二名得了 5 分，其中胜第一名得了 2 分，又没有负过，因此和 3，4，5 名皆为平局．第四名得了 3 分，其中输给了第一名，平了第二名，没有胜过，因此和第 3，5 名都是平局．第三名得了 4 分，输给了第一名，平了 2，4 名得 2 分，因此胜了第 5 名得 2 分．第五名显然只和第 2，4 名平了，其余皆负．综上，所有比赛平了 5 场，分别是 2-3，2-4，2-5，3-4，4-5．

【超越 2】四个队进行四项体育比赛，每项比赛的第一、二、三、四名依次分别得 5、3、2、1 分．每队四项比赛的得分之和算作总分．已知各队总分不相同，并且 *A* 队得了三项第一．问总分最少的队最多得多少分？

【解析】四队总分和是（5+3+2+1）×4=44．*A* 队至少得了 5×3+1=（16 分），其他三队得分和不会超过 28 分．因为得分各不相同，所以得分最少队最多得 8 分．如：

A（5，5，5，1），其他三队（3，3，3，2），（2，2，2，3），（1，1，1，5）．

1+1+1+5=8（分），所以总分最少队最多得 8 分．

第十二讲 多位数计算

一、基础知识

（一）多位数运算求精确值的常见方法

1.利用 $\underbrace{999\cdots9}_{k个9}=10^k-1$，进行变形；

2.找规律递推求解.

（二）多位数运算求数字之和的常见方法

$M\times\underbrace{999...9}_{k个9}$ 的数字和为 $9\times k$.（其中 M 为自然数，且 $M\le\underbrace{999...9}_{k个9}$）. 可以利用上面性质较快的获得结果.

二、例题精讲

【例 1】计算：$9+99+999+\cdots+999999999$.

【解析】 本题可以把所有的加数均看成整十、整百、整千……的数，最后再进行补数. 原式 $=10+100+1000+\ldots+1000000000-9=1111111110-9=1111111101$.

【巩固】计算：$99+998+9997+99996+999995+9999994+99999993$

【解析】

$$\begin{aligned}&99+998+9997+99996+999995+9999994+99999993\\&=100+1000+10000+100000+1000000+10000000+100000000-(1+2+3+4+5+6+7)\\&=111111100-28\\&=111111072\end{aligned}$$

【例 2】求 $1+11+111+\cdots+\underbrace{11\cdots1}_{100个1}$ 的末四位数.

【解析】 原式 $=1+10+1+100+10+1+\cdots+1\underbrace{00\cdots0}_{99个0}+1\underbrace{00\cdots0}_{98个0}+\cdots+1$,

$100+990+9800+97000=107890$，原式的末四位为 7890.

【巩固】计算：$2018+20018+200018+\cdots+2\underbrace{00\cdots0}_{10个0}18$.

【解析】原式 $=8\times10+10\times10+\underbrace{22\cdots2}_{10个2}000=\underbrace{22\cdots2}_{10个2}180$.

【例 3】已知 $N=\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{99个2}\times\underbrace{5\times5\times5\times\cdots\times5}_{88个5}$，问：$N$ 为几位数？

【解析】

$$\begin{aligned}N&=\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{11个2}\times\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{88个2}\times\underbrace{5\times5\times5\times\cdots\times5}_{88个5}\\&=\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{11个2}\times1\underbrace{000\ldots0}_{88个0}\\&=2048\times1\underbrace{000\ldots0}_{88个0}\\&=2048\underbrace{000\ldots0}_{88个0}\end{aligned}$$

共有 $4+88=92$ 位数．

【例 4】有一个 2007 位的整数，其每个数位上的数字都是 9，这个数与它自身相乘，所得的积的各个数位上的数字的和是_________.

【解析】要求积的各个数位上的数字和，应先把乘积计算出来．2007 位的整数，其每个数位上的数字都是 9，它可以表示为 $\underbrace{99\cdots99}_{2007个9}$，这个数与它自身相乘，即

$\underbrace{99\cdots99}_{2007个9}\times\underbrace{99\cdots99}_{2007个9}$，下面进行计算：

$$\begin{aligned}&\underbrace{99\cdots99}_{2007个9}\times\underbrace{99\cdots99}_{2007个9}\\&=\underbrace{99\cdots99}_{2007个9}\times(\underbrace{100\cdots00}_{2007个0}-1)\\&=\underbrace{99\cdots99}_{2007个9}\underbrace{00\cdots00}_{2007个0}-\underbrace{99\cdots99}_{2007个9}\\&=\underbrace{99\cdots99}_{2006个9}8\underbrace{00\cdots00}_{2006个0}1\end{aligned}$$

乘积的数字和为 $9\times2006+8+1=9\times2007=18063$．

【巩固】求 111111×999999 乘积，并计算乘积的各位数字之和．

【解析】观察可以发现，两个乘数都非常大，不便直接相乘，其中 999999 很接近 1000000，于是我们采用添项凑整，简化运算．

$$\begin{aligned}原式&=111111\times(1000000-1)\\&=111111\times1000000-111111\times1\\&=111111000000-111111\\&=111110888889\end{aligned}$$

数字之和为 $9\times6=54$

【例 5】计算：$\underbrace{20082008\cdots2008}_{2008个2008}\times\underbrace{20092009\cdots2009}_{2009个2009}-\underbrace{20092009\cdots2009}_{2008个2009}\times\underbrace{20082008\cdots2008}_{2009个2008}$

【解析】原式

$$=2008\times1\underbrace{00010001\cdots0001}_{2007个0001}\times2009\times1\underbrace{00010001\cdots0001}_{2008个0001}-2009\times1\underbrace{00010001\cdots0001}_{2007个0001}\times2008\times1\underbrace{00010001\cdots0001}_{2008个0001}$$

$=0$

【例 6】计算：$333\times332332333-332\times333333332$．

【解析】
$$\begin{aligned}原式&=333\times(332332332+1)-332\times(333333333-1)\\&=333\times(332\times1001001+1)-332\times(333\times1001001-1)\\&=333+332\\&=665\end{aligned}$$

三、巅峰挑战

【挑战 1】计算：$\underbrace{20092009\cdots2009}_{2009个2009}\div\underbrace{41004100\cdots4100}_{2008个4100}41$

【解析】 原式$=(2009\times1\underbrace{00010001\cdots0001}_{2008个0001})\div(\underbrace{410041004100}_{2009个4100}\div100)$

$=(2009\times1\underbrace{00010001\cdots0001}_{2008个0001})\div(41\times1\underbrace{00010001\cdots0001}_{2008个0001})$

$=2009\div41=49$

【挑战 2】 计算$\underbrace{99\cdots9}_{2020个9}\times\underbrace{88\cdots8}_{2020个8}\div\underbrace{66\cdots6}_{2020个6}$

【解析】 原式$=\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\times9\times\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\times8\div\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\div6$

$=\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\times9\times8\div6$

$=\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\times12$

$=\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\times10+\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\times2$

$=\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}0+\underbrace{22\cdots2}_{2020个2}$

$=1\underbrace{33\cdots3}_{2019个3}2$

四、登峰造极

【超越 1】 下面是两个 1989 位整数相乘：$\underbrace{111...11}_{1989个1}\times\underbrace{111...11}_{1989个1}$．那么乘积的各位数字之和是多少?

【解析】 在算式中乘以 9，再除以 9，则结果不变．因为$\underbrace{111...11}_{1989个1}$能被 9 整除，所以将一个$\underbrace{111...11}_{1989个1}$乘以 9，另一个除以 9，使原算式变成：

$\underbrace{999......99}_{1989个9}\times\underbrace{123456790......012345679}_{共1988位数}=(\underbrace{1000......00}_{1989个0}-1)\times\underbrace{123456790......012345679}_{共1988位数}$

$=\underbrace{123456790......012345679}_{共1988位数}\underbrace{000......00}_{1989个0}-\underbrace{123456790......012345679}_{共1988位数}$

$=\underbrace{123456790......0123456790}_{共1980位数}12345678\underbrace{9876543209......9876543320}_{1980位数}987654321$

得到的结果中有 1980÷9=220 个“123456790”和“987654320”及一个“12345678”和一个“987654321”，所以各位数之和为：

$(1+2+3+4+5+6+7+9)\times220+(9+8+7+6+5+4+3+2)\times220$
$+(1+2+3+4+5+6+7+8)+(9+8+7+6+5+4+3+2+1)=17901.$

【超越 2】 计算：$\underbrace{55\cdots5}_{2007个5}\times\underbrace{33\cdots3}_{2007个3}$

【解析】 这道题目，你会发现无规律可循.这时我们就要从找规律这个思想里走出来，将$\underbrace{33\cdots3}_{2007个3}$乘以 3 凑出一个$\underbrace{99\cdots9}_{2007个3}$，然后在原式乘以 3 的基础上除以 3，所以

原式$=\underbrace{55\cdots5}_{2007个5}\times\underbrace{99\cdots9}_{2007个9}\div3=\underbrace{55\cdots5}_{2007个5}\times(1\underbrace{00\cdots0}_{2007个0}-1)\div3=(\underbrace{55\cdots5}_{2007个5}\underbrace{00\cdots0}_{2007个0}-\underbrace{55\cdots5}_{2007个5})\div3$

$=\underbrace{55\cdots5}_{2006个5}\underbrace{44\cdots4}_{2007个4}5\div3=\underbrace{185\cdots185}_{668个185}1848\underbrace{148\cdots148}_{668个148}15$

第十三讲 基本图形面积综合

一、基础知识

(一)定义：物体所占平面图形的大小，叫做它们的面积.

(二)单位

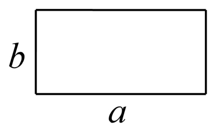
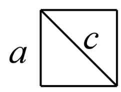
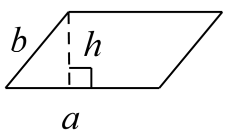
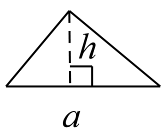
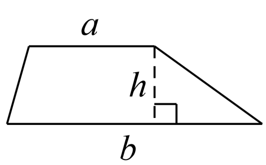
1. 常用单位：平方千米（km^2）、平方米（m^2）、平方分米（dm^2）、平方厘米（cm^2）、平方毫米（mm^2）；

2. 单位换算；

1 平方千米=1000000 平方米　　　　1 平方米=100 平方分米

1 平方分米=100 平方厘米　　　　1 平方厘米=100 平方毫米

(三)基本面积公式

基本图形名称	基本图形	面积公式
长方形		长方形面积=长×宽 $S=ab$
正方形		正方形面积=边长×边长 $S=a^2$ 或 $S=c^2\div 2$
平行四边形		平行四边形面积=底×高 $S=ah$
三角形		三角形面积=底×高÷2 $S=ah\div 2$
梯形		梯形面积=（上底+下底）×高÷2 $S=(a+b)\times h\div 2$

（四）求解图形面积的方法：作差法、差不变原理.

1. 作差法：总面积减去其他图形面积等于所求图形面积.适用于大图形和其他图形为规则图形且它们的面积易于计算的题目.

2. 差不变原理：被减数和减数同时加上或减去同一个数，差保持不变.适用于两图形有公共部分或面积相等部分且已知差或要求差的题目.

二、例题精讲

【例 1】小试牛刀：

（1）正方形的周长是 36 厘米，那么这个正方形的面积是________平方厘米；

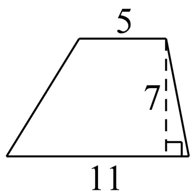
（2）一个平行四边形的底和高分别是 5 厘米和 9 厘米，那么这个平行四边形的面积是________平方厘米；

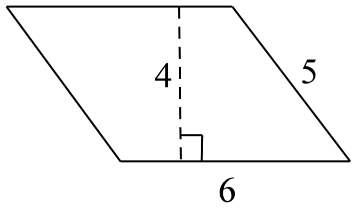
（3）一个三角形和一个平行四边形等底等高，且这个三角形的面积是 29 平方米，那么这个平行四边形的面积是________平方米；

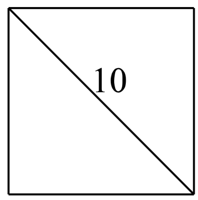
（4）一个梯形的上底是 9，下底是 11，高是 10，那么这个梯形的面积是________.

【解析】81；45；58；100

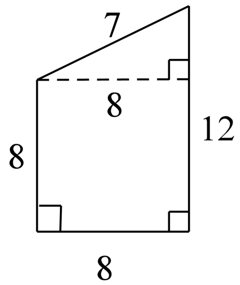
【巩固】 看图求面积：

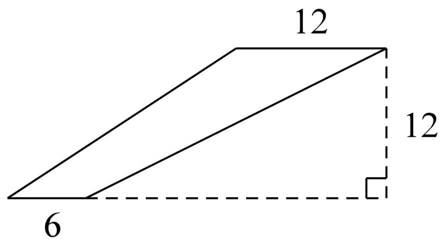


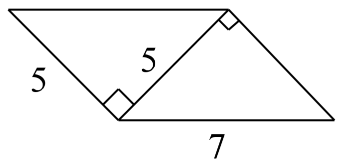




（1）梯形面积：　　（2）平行四边形面积：　　（3）正方形面积：



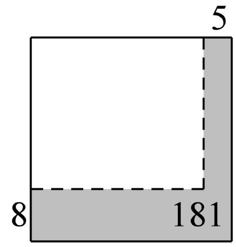




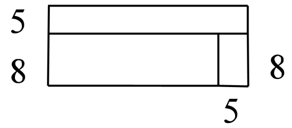
（4）梯形面积：　　（5）梯形面积：　　（6）平行四边形面积：

【解析】56；24；50；80；108；25

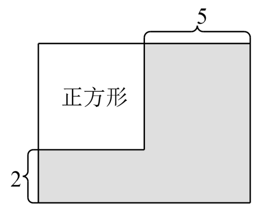
【例 2】一块正方形的木板，先截去宽 5 厘米的长方形，又截去宽 8 厘米的长方形，这样现在剩下的长方形就比原正方形减少了 181 平方厘米．那么原正方形的边长是________厘米.



【解析】如图：$(181+5\times8)\div(5+8)=17$ 厘米

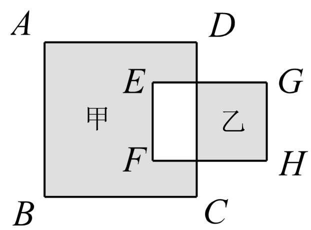


【巩固】如图所示阴影部分的面积是 66 平方厘米，则图中正方形的面积是_____平方厘米.



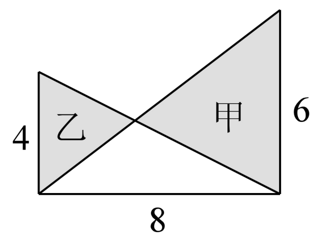
【解析】边长为 a，则有 $5a+2a+5\times2=66$ ，$a=8$，所以正方形面积为 8×8=64 平方厘米

【例 3】如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 10 厘米，长方形 $EFGH$ 的长为 8 厘米，宽为 5 厘米.则阴影部分甲与阴影部分乙面积的差是________平方厘米.



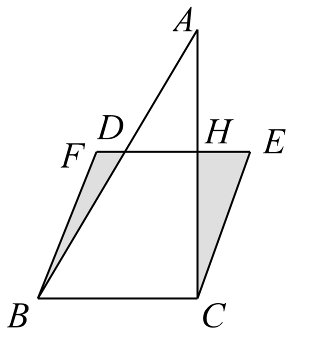
【解析】$10\times10-8\times5=60$（平方厘米）.

【巩固】如图，甲三角形的面积比乙三角形的面积大多少平方厘米？



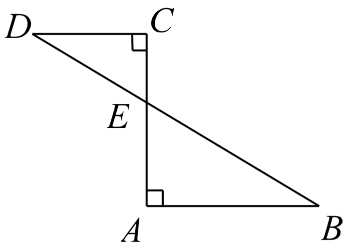
【解析】$8\times6\div2-8\times4\div2=8cm^2$.

【例 4】如图，平行四边形 $BCEF$ 中，$BC=8cm$，直角三角形 ABC 中，$AC=10cm$，阴影部分的面积比三角形 ADH 的面积大 8 平方厘米，那么 AH 长为多少厘米？



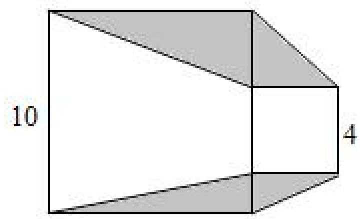
【解析】4

【巩固】 如图，$CA=AB=4cm$，三角形 ABE 比三角形 CDE 的面积大 2 平方厘米，那么 CD 是多少厘米？



【解析】3 厘米

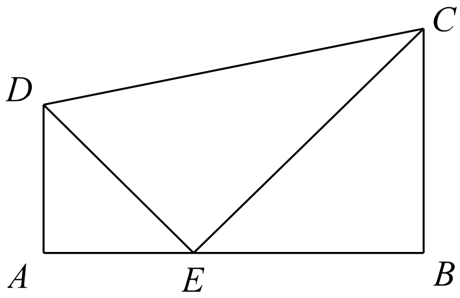
【例 5】边长分别为 4 和 10 的两个正方形如图放置，则图中阴影部分的面积是________.



【解析】 法一：$(4+10)\times(10-4)\div2=14\times6\div2=42$.

法二：$10\times10+(4+10)\times4\div2=128$；空白部分：$(4+10)\times10\div2+4\times4=86$；阴影部分面积：$128-86=42$.

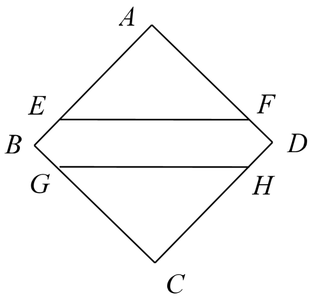
【巩固】 如图，直角梯形 $ABCD$ 中，ADE 和 BCE 都是等腰直角三角形，已知$\triangle ADE$ 面积为 8，$\triangle BCE$ 面积为 18，请问：梯形 $ABCD$ 面积是多少？



【解析】50

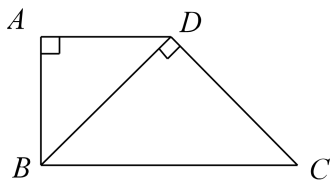
三、巅峰挑战

【挑战 1】如图，正方形 $ABCD$ 被两条平行的直线截成了面积相等的三个部分，其中上、下两部分都是等腰直角三角形．已知两条截线的长度都是 6 厘米，那么整个正方形的面积是多少平方厘米？



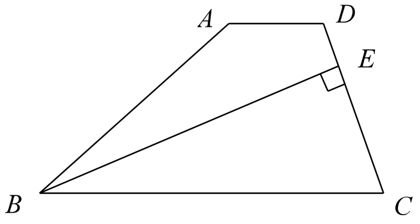
【解析】$\triangle AEF$ 和三角形 CGH 的面积是：$6\times6\div2\div2=9cm^2$；正方形的面积是 $9\times3=27cm^2$．

【挑战 2】如图，两个等腰直角三角形恰好拼成一个直角梯形．已知等腰直角三角形 ABD 的斜边 BD 长 4 厘米，那么这个直角梯形的面积是多少厘米？

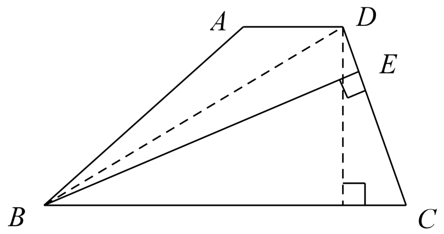


【解析】$\triangle ABD$ 的面积是 $4\times4\div2\div2=4cm^2$；$\triangle BCD$ 的面积是 $4\times4\div2=8cm^2$；这个直角梯形的面积是 $4+8=12cm^2$．

【挑战 3】如图所示，梯形 ***ABCD*** 的上底 ***AD*** 长 5 厘米，下底 ***BC*** 长 12 厘米，腰 ***CD*** 的长为 8 厘米，过 ***B*** 点向 ***CD*** 作出的垂线 ***BE*** 的长为 9 厘米．那么梯形 ***ABCD*** 的面积为________平方厘米.



【解析】



如图所示，连接 BD，过 D 点作 $DF \perp BC$.

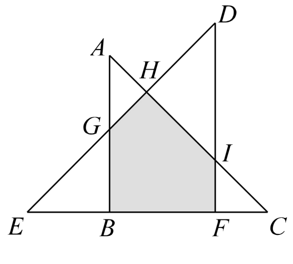
$\because \triangle BCD$ 的面积是 $S_{\Delta BCD} = CD \times BE \div 2 = 8 \times 9 \div 2 = 36cm^2$；

$\therefore DF = 36 \times 2 \div 12 = 6cm$；

$\therefore$梯形 $ABCD$ 的面积是：$(AD + BC) \times DF \div 2 = (5+12) \times 6 \div 2 = 51cm^2$.

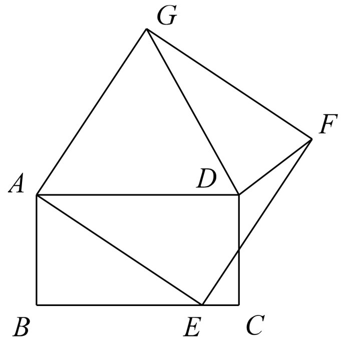
四、登峰造极

【超越 1】如图，三角形 ***ABC*** 和三角形 ***DEF*** 都是等腰直角三角形．已知 $DF = 60$，$AF = 50$，$EB = 26$，则阴影部分的面积是________.



【解析】 ΔABC 和 ΔDEF 都是等腰三角形，所以有 $EF = DF = 60$，$BC = AB = 50$，又因为 $\angle E = \angle C = 45^\circ$，所以 $\angle EHC = 90^\circ$，由此 $\angle AGH = 45^\circ$，又 $\angle EGB = \angle AGH = 45^\circ$，因此，三角形 EBG 也是等腰直角三角形，同理三角形 AGH、EIC 都是等腰直角三角形，有 $EB = BG = 26$，$AG = 24$．所以 $S_{\Delta AGH} = 24 \times 24 \div 2 \div 2 = 144$；又因为 $BF = EF - EB = 34$，所以 $FC = BC - BF = 50 - 34 = 16$；$S_{\Delta FCI} = 16 \times 16 \div 2 = 128$；所以阴影的面积为：$S = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AGH} - S_{\Delta FCI} = 50 \times 50 \div 2 - 144 - 128 = 1250 - 144 - 128 = 978$.

【超越 2】 如图，四边形 **_ABCD_** 和 **_AEFG_** 分别是长方形和正方形．已知正方形的边长是 **10**，三角形 **_DFG_** 的面积 **18.**那么长方形 **_ABCD_** 的面积是多少？



【解析】连接 DE，$S_{\Delta ADE}+S_{\Delta DFG}=10\times10\div2=50$；$S_{\Delta ADE}=50-18=32$；$S_{长ABCD}=32\times2=64$．

第十四讲 逻辑推理

一、基础知识

一般来说，逻辑推理问题的条件都是有一定的隐蔽性和迷惑性的．因此，要正确解决这类问题，不仅需要始终保持头脑的灵活，还需要遵循逻辑思维的基本规律：同一律、矛盾律和排中律．

在解逻辑推理问题时常用的方法有假设推理、列表推理、图解法和构造法．有时，还需要几种方法综合运用．

这一讲我们主要用假设推理、列表推理、以及逻辑思维的基本规律的综合运用来解决此类问题．

二、例题精讲

模块一：假设推理

【例 1】一个人的夜明珠丢了，于是他开始四处寻找.有一天，他来到了山上，看到有三个小屋，分别为 1 号、2 号、3 号.从这三个小屋里分别走出来一个女子，1 号屋的女子说：“夜明珠不在此屋里.”2 号屋的女子说：“夜明珠在 1 号屋内.”3 号屋的女子说：“夜明珠不在此屋里.”这三个女子，其中只有一个人说了真话，那么，谁说了真话？夜明珠到底在哪个屋里面？

【解析】 1 号屋的女子说的是真话，夜明珠在 3 号屋子内.
假设夜明珠在 1 号屋内，那么 2 号屋和 3 号屋的女子说的都是真话，因此不在 1 号屋内；假设夜明珠在 2 号屋内，那么 1 号屋和 3 号屋的女子说的都是真话，因此不在 2 号屋内；假设夜明珠在 3 号屋内，那么只有 1 号屋的女子说的是真话，因此，夜明珠在 3 号屋里内.

【巩固】 胖先生是一个高级程序员，但是他最近设计的三款机器人却出了一点问题：有一个永远都说实话，有一个永远说谎话，另一个则有时说实话，有时说谎话.胖先生不知道怎么分辨它们，就请瘦博士来为他帮忙.瘦博士一看，随口问了 3 个问题就知道怎么分辨了.他的问题是：

问左边的机器人：“谁坐在你旁边？” 机器人回答：“诚实的家伙.”

问中间的机器人：“你是谁？” 机器人回答：“总是犹豫不决的那位.”

问右边的机器人：“坐在你旁边的是谁？” 机器人回答：“说谎话的家伙.” 根据上面 3 个问题及其回答，推测它们的身份.

【解析】 左边的机器人是犹豫不决的机器人、中间的机器人是骗子机器人、右边的机器人是诚实机器人.

模块二：列表推理

【例 2】甲、乙、丙三个小学生都是少先队的干部.一个是大队长，一个是中队长，一个是小队长.一次数学测验，这三个人的成绩是：

①丙比大队长的成绩好；

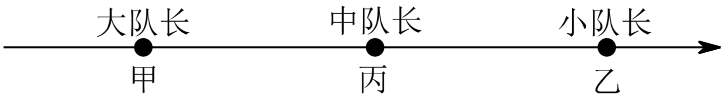
②甲和中队长的成绩不同；

③中队长比乙的成绩差.

请你根据这三个人的成绩，判断一下，谁是大队长呢？

【解析】

	大队长	中队长	小队长
甲		×	
乙		×	
丙	×	√	×



【巩固】 甲、乙、丙、丁四名同学同在一间教室里．他们当中一个人在做数学题，一个人在念英语，一个人在看小说，一个人在写信．已知：

①甲不在念英语，也不在看小说；

②如果甲不在做数学题，那么丁不在念英语；

③有人说乙在做数学题，或在念英语，但事实并非如此；

④丙既不是在看小说，也不在念英语.

请问：在写信的是谁？

【解析】 法一：根据①②④可知,甲乙丙都不在念英语,所以只有丁在念英语,甲在做数学题；由④可知：丙只能是做数学或者是写信，既然甲做数学，那么丙在写信；由②③可知：乙在看小说，丁在念英语.

法二：

	甲	乙	丙	丁
做数学题	√	×	×	×
念英语	×	×	×	√
看小说	×	√	×	×
写信	×	×	√	×

模块三：三大逻辑思维规律：观点相同同真同假，观点不同一真一假或同时为假.

【例 3】某公安人员需查清甲、乙、丙三人谁先进办公室，三人口供如下：

甲：丙第二个进去，乙第三个进去.

乙：甲第三个进去，丙第一个进去.

丙：甲第一个进去，乙第三个进去.

三人口供每人仅对一半，究竟谁第一个进办公室？

【解析】 丙是第一个进办公室的.
甲和丙都说乙是第三个进去，要么同真要么同假.假设乙是第三个进去的，根据“三人口供每人仅对一半”知，丙不是第二个，那么丙必然是第一个进的，甲是第二个.对乙：前半句错误，后半句对；对丙：前半句错，后半句对.符合条件.所以丙是第一个进办公室的.

【巩固】 法官在审理一起盗窃案的过程中，对四名犯罪嫌疑人甲、乙、丙、丁进行审问．甲说：“罪犯在乙、丙、丁三人之中．”乙说：“我没有作案，是丙偷的．”丙说：“甲、丁之中有一个是罪犯．”丁说：“乙说的是事实．”如果这四个人中有两人说的是真话，另外两人说了假话，而且只有一个罪犯．请你判断：罪犯是谁？

【解析】 在甲、乙、丙、丁四人的供词中，可以看出乙、丁两人的观点是一致的，因此乙、丁两人的供词应该是同真或同假（即都是真话或者都是假话，不会出现一真一假的情况）；假设乙、丁两人说的是真话，那么甲、丙两人说的是假话，由乙说真话推出丙是罪犯的结论；由甲说假话，推出乙、丙、丁三人不是罪犯的结论；显然这两个结论是相互矛盾的；所以乙、丁两人说的是假话，而甲、丙两人说的是真话；由甲、丙的供述内容可以断定丁是罪犯.

【例 4】学校举行田径运动会，A、B、C、D、E 五个班取得了团体前五名，发奖后有人问他们的名次，回答如下：

A 班代表说：“B 是第三名，C 是第五名.”

B 班代表说：“D 是第二名，E 是第四名.”

C 班代表说：“A 是第一名，E 是第四名.”

D 班代表说：“C 是第一名，B 是第二名.”

E 班代表说：“D 是第二名，A 是第三名.”

最后，他们都补充说：“我的话是半真半假的.”请你判断一下，他们各个班的名次.

【解析】 A 班第三名，B 班第二名，C 班第五名，D 班第一名，E 班第四名.
法一：A 班代表和 D 班代表关于 B 的排名的回答是矛盾的，不能同真，必有一假或都为假.假设 B 是第三名，那么 D 班代表的前半句对，则 C 是第一名；A 班半真半假，符合；C 班前半句错，后半句对，E 是第四名；B 班前半句错，后半句对，符合；E 班前半句也错，后半句对，但 A 是第三名与假设矛盾，因此假设“B 是第三名”不成立.所以根据 A 班代表的回答，C 是第五名正确；D 班代表前半句错，后半句“B 是第二名”对；B 班代表前半句错，后半句“E 是第四名”对；C 班代表后半句对，前半句“A 是第一名”错；E 班代表前半句错，后半句“A 是第三名”对.所以 A 班第三名，B 班第二名，C 班第五名，D 班第一名，E 班第四名.
法二：A 班代表和 D 班代表关于 B 的排名的回答是矛盾的，不能同真，必有一假或都为假.

假设 B 是第三名，如下表，发现 B 和 E 都是第三名，矛盾，假设不成立.

	A	B	C	D	E
A		3√	5×		
B				2×	4√
C	1×				4√
D		2×	1√		
E	3√			2×	

假设 B 不是第三名，那么 A 班代表的后半句正确，如下表：A 班第三名，B 班第二名，C 班第五名，D 班第一名，E 班第四名，符合条件.

	A	B	C	D	E
A		3×	5√		
B				2×	4√
C	1×				4√
D		2√	1×		
E	3√			2×	

【例 5】某校数学竞赛 A、B、C、D、E、F、G、H 八位同学获得前八名．老师让他们猜一下谁是第一名．

A 说："或者 F 是第一名,或者 H 是第一名．

B 说："我是第一名．"

C 说："我不是第一名"

D 说："B 不是第一名．"

E 说："A 说得不对．"

F 说："我不是第一名,H 也不是第一名．

G 说："C 不是第一名．"

H 说："我同意 A 的意见．"

老师指出：八个人中有三人猜对了,那么第一名是谁?

【解析】 由条件可知，A、H 猜测一致，E、F 猜测一致，但他们两组人之间矛盾，根据排中律，这两组必有一真一假；B 和 D 猜测相矛盾，也必有一真一假；因为只有 3 个人猜对，所以剩下的 C、G 的猜测都是错误的，这样根据 G 的猜测知 C 是第一名.

三、巅峰挑战

【挑战 1】母亲节快到了，佳佳去花店买了 5 束康乃馨送给 5 位母亲．每束花有 8 朵，有黄的、粉红的、白的和红的，每种颜色都是 10 朵．为了让 5 束花看起来各有特点，每一束花中不同颜色花朵的数量不完全相同，不过每束花中每种颜色的花至少应该有一朵．

下面是 5 位母亲所收到的花的情况:

张妈妈:黄色的花比其余 3 种颜色的花加起来还要多;

王妈妈:粉色的花要比其他任何一种颜色的花都少;

李妈妈:黄色和白色的花之和等于粉色和红色的花之和;

赵妈妈:白色花是红色花的两倍;

董妈妈:红色花和粉色的花一样多.

请问:5 位母亲各自收到的花每种颜色各有几朵?

【解析】列表可得：

	黄	白	粉	红	束
张	5	1	1	1	8
王	2	1	3	2	8
李	1	1	3	3	8
赵	1	4	2	1	8
董	1	3	1	3	8
总	10	10	10	10	

【挑战 2】在一列国际列车上，有 A、B、C、D 四位不同国籍的旅客，他们分别穿蓝、黑、灰、褐色的大衣，坐在一张桌子的两边．桌子每边坐两人，而且他们正好与另一边的某人面对面．已知：

①英国旅客坐在 B 先生左侧；

② A 先生穿褐色大衣；

③穿黑色大衣的坐在德国旅客右侧；

④ D 先生的对面坐着美国旅客；

⑤俄国旅客穿着灰色大衣.

问：A、B、C、D 分别是哪国人？分别穿什么颜色的衣服？

【解析】 由条件①③，英国旅客在 B 先生左侧，德国旅客在黑色大衣旅客左侧，那么四个人的相对位置关系只可能是：

B 先生	英国旅客
德国旅客	黑色大衣

根据条件⑤，穿灰大衣的俄国旅客只能是 B 先生；进而穿黑色大衣的是美国旅客，那么由条件④，英国旅客是 D 先生；最后由条件②，穿褐色大衣的 A 先生只能是德国旅客．从而填出表格中余下的位置如下：

B 先生 俄国旅客 灰色大衣	D 先生 英国旅客 蓝色大衣

A 先生 德国旅客 褐色大衣	C 先生 美国旅客 黑色大衣

所以 A、B、C、D 分别是德国、俄国、美国、英国人，分别穿褐色、灰色、黑色、蓝色大衣．

【挑战 3】在国际酒店的宴会桌旁，甲、乙、丙、丁 4 位朋友进行有趣的交谈．他们分别用了汉语、英语、法语、日语 4 种语言．并且还知道：

①甲、乙、丙各会两种语言，丁只会一种语言；

②有一种语言 4 人中有 3 人都会；

③甲会日语，丁不会日语，乙不会英语；

④甲与丙、丙与丁不能直接交谈，乙与丙可以直接交谈；

⑤没有人既会日语，又会法语．

请根据上面的条件，判断他们各会什么语言．

【解析】两人能直接交谈，说明两人会一种相同的语言，反之则两人没有相同的语言．

由题目条件③至⑤可以列出下表：

	甲	乙	丙	丁
汉语				
英语		×		
法语	×			
日语	√		×	×

由条件①④，甲和丙总共会四门语言，却没有相同的，说明两人分别会其中的两种，那么甲不会法语，则丙一定会法语，进而丁也不会法语．表格填写如下：

	甲	乙	丙	丁
汉语				
英语		×		
法语	×		√	×
日语	√		×	×

再由条件②，三人都会的语言只可能是汉语或英语．如果是英语，那么甲、丙、丁都会英语，与甲、丙不能直接交谈矛盾，所以有三个人会的语言是汉语．同时，丙与甲、丁都不能直接交谈，所以丙不会汉语而甲、乙、丁会．推知丙会英语而甲不会，表格填写如下：

	甲	乙	丙	丁
汉语	√	√	×	√
英语	×	×	√	
法语	×		√	×
日语	√		×	×

最后根据条件④，乙与丙能正常交谈，只可能乙会法语．再由条件①完成表格如下：

	甲	乙	丙	丁
汉语	√	√	×	√
英语	×	×	√	×
法语	×	√	√	×
日语	√	×	×	×

所以甲会汉语和日语，乙会汉语和法语，丙会英语和法语，丁只会汉语．

四、登峰造极

【超越 1】老师告诉甲乙一个 **100** 以内质数，告诉甲十位，告诉乙个位，于是有个下面一段对话：

甲：我不知这个数是多少；

乙：我就知道你不知道；

甲：我还是不知道；

乙：我就知道你还不知道；

甲：那这样我就知道了.

请问这个质数是多少？

【解析】：通过题目可以知道是 10-100 的质数，按十位分开可得

1：11，13，17，19；
2：23，29；
3：31，37；
4：41，43，47；
5：53，59；
6：61，67；
7：71，73，79；
8：83，89；
9：97

这个题的突破口为 97，因为 97 是甲可以唯一确定的数，只要甲手里的数字为 9，则这个数一定是 97.第一次对话：

甲：甲不知道这个数是多少，说明甲得到的数不是 9，这个数不是 97；

乙：乙知道甲不知道这个数，说明乙得到的数不是 7，如果乙是 7，甲就可能会是 9，甲可能会知道这个数；

得知条件，十位不为 9，个位不为 7；排除后的数组为：

1：11，13，19；
2：23，29；
3：31；
4：41，43；
5：53，59；
6：61；
7：71，73，79；
8：83，89；

第二次对话；

甲：甲还是不知道（数字不能被唯一确定），说明甲手里不是 3 和 6；

乙：乙知道甲还不知道，说明乙手里不是 1.

得知条件，十位不为 3，6，个位不为 1；排除后的数组为：

1：13，19；

2：23，29；

4：43；

5：53，59；

7：73，79；

8：83，89；

第三次对话：

甲知道了这个质数，根据上面数组可知，只有 43 能被唯一确定，符合要求.

【超越 2】有甲、乙、丙、丁、戊五个人，每个人都非常有特点，他们来自不同的城市，开不同品牌的车子，喝不同种类的茶，穿不同颜色的衬衫．一次聚会上他们遇到一起，把车从左到右排成了一行．已知：

（**1**）甲开奔驰；

（**2**）乙穿绿衬衫；

（**3**）丙喝碧螺春；

（**4**）宝马车紧挨在奥迪车的左边；

（**5**）宝马车的主人喝铁观音；

（**6**）北京人穿蓝衬衫；

（**7**）丰田主人来自天津；

（**8**）中间那辆车的主人喝龙井茶；

（**9**）丁的车在最左边；

（**10**）上海人的车在穿红衬衫人的车旁边；

（**11**）穿白衬衫人的车在天津人的车旁；

（**12**）广州人喝菊花茶；

（**13**）戊是重庆人；

（**14**）丁的车在别克车的旁边；

（**15**）上海人的车挨着喝乌龙茶的人的车．

请问：谁穿黑衬衫？他是哪里人？他开什么车？喝什么茶？

【解析】

依次由条件 9、8、14 可以填得下表：

姓名	丁				
汽车		别克			
城市					
茶			龙井		
衬衫					

结合条件 4、5 可以填出：

姓名	丁				
汽车		别克		宝马	奥迪
城市					
茶			龙井	铁观音	
衬衫					

由条件 1 及排除法可以填出：

姓名	丁		甲		
汽车	丰田	别克	奔驰	宝马	奥迪
城市					
茶			龙井	铁观音	
衬衫					

由条件 7、11 可以填出：

姓名	丁		甲		
汽车	丰田	别克	奔驰	宝马	奥迪
城市	天津				
茶			龙井	铁观音	
衬衫		白			

从条件 3 及 12 看，丙和广州人应占据左数第二个和第五个车位，所以第二个和第五个车位的人喝碧螺春及菊花茶，那么第一个车位的人只能喝乌龙茶，再由条件 15 填出：

姓名	丁		甲		
汽车	丰田	别克	奔驰	宝马	奥迪
城市	天津	上海			
茶	乌龙		龙井	铁观音	
衬衫		白			

由条件 12 并利用排除法，再根据条件 3 可以填出：

姓名	丁	丙	甲		
汽车	丰田	别克	奔驰	宝马	奥迪
城市	天津	上海			广州
茶	乌龙	碧螺春	龙井	铁观音	菊花
衬衫		白			

由条件 13 并利用排除法填出：

姓名	丁	丙	甲	戊	乙
汽车	丰田	别克	奔驰	宝马	奥迪
城市	天津	上海	北京	重庆	广州
茶	乌龙	碧螺春	龙井	铁观音	菊花
衬衫		白			

最后利用条件 2、6、10 及排除法可填出剩余格：

姓名	丁	丙	甲	戊	乙

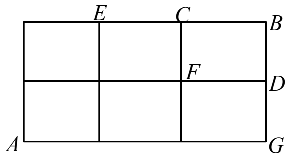
汽车	丰田	别克	奔驰	宝马	奥迪
城市	天津	上海	北京	重庆	广州
茶	乌龙	碧螺春	龙井	铁观音	菊花
衬衫	红	白	蓝	黑	绿

根据以上结果，戊穿黑衬衫，他是重庆人，开宝马车，喝铁观音.

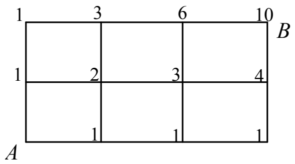
家庭作业

第一讲 标数法作业

【作业 1】如图所示，沿线段从 A 到 B 有多少条最短路线？

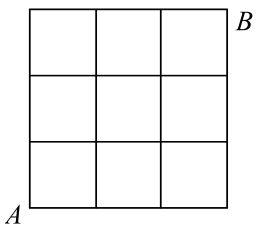


【解析】

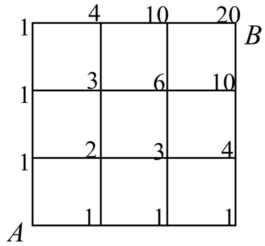


图中 B 在 A 的右上方，因此从 A 出发，只能向上或者向右才能使路线最短，那么反过来想，如果到达了某一个点，也只有两种可能：要么是从这个点左边的点来的，要么是从这个点下边的点来的．那么，如果最后到达了 B，只有两种可能：或者经过 C 来到 B 点，或者经 D 来到 B 点，因此，到达 B 的走法数目就应该是到达 C 点的走法数和到达 D 点的走法数之和，而对于到达 C 的走法，又等于到达 E 和到达 F 的走法之和，到达 D 的走法也等于到达 F 和到达 G 的走法之和，这样我们就归纳出：到达任何一点的走法都等于到它左侧点走法数与到它下侧点走法数之和，根据加法原理，我们可以从 A 点开始，向右向上逐步求出到达各点的走法数．如图所示，使用标数法得到从 A 到 B 共有 10 种不同的走法．

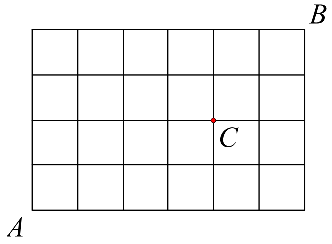
【作业 2】如图，从 A 点到 B 点的最近路线有多少条？



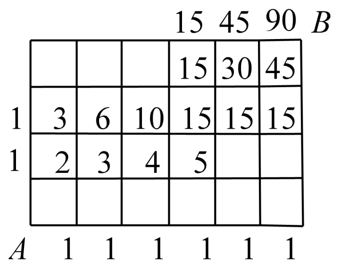
【解析】使用标数法得出到 B 点的最近路线有 20 条．



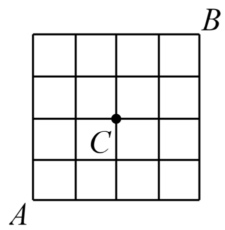
【作业 3】如图，从 A 处沿最短的路线走到 B 处，要求必须经过 C，那么共有________种不同走法．



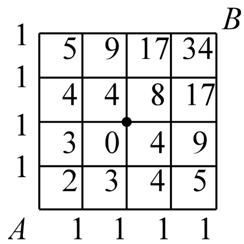
【解析】如图所示，共有 90 种不同走法.



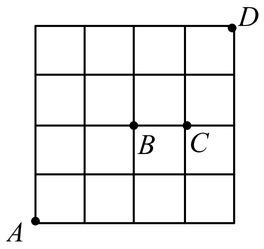
【作业 4】如图为一幅街道图，从 A 出发经过十字路口 B，但不能经过 C，那么不同的最短路线有________条.



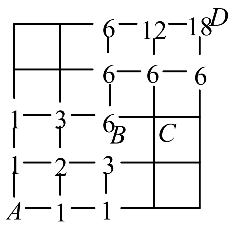
【解析】如图所示，利用标数法可知，最短路径有 34 条.



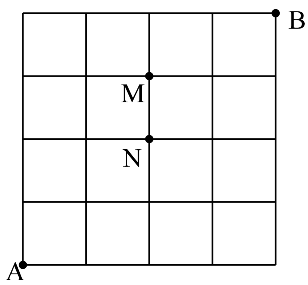
【作业 5】如图为一幅街道图，从 A 出发经过十字路口 B，但不经过 C 走到 D 的不同的最短路线有________条.



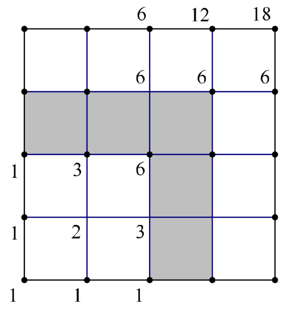
【解析】如图所示，利用标数法可知，最短路径有18条．



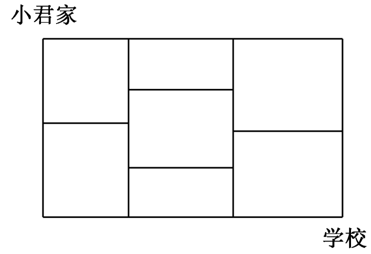
【作业 6】一只兔子沿着方格的边从 A 到 B ,规定上只能往上或往右走，但是必须经过一座独木桥 MN ,这只兔子有多少种不同的走法



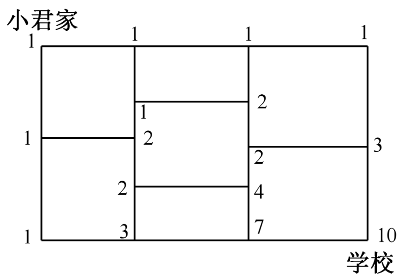
【解析】如图所示，利用标数法可知，最短路径有18条．



【作业 7】小君家到学校的道路如图所示．从小君家到学校有________种不同的走法．（只能沿图中向右向下的方向走）

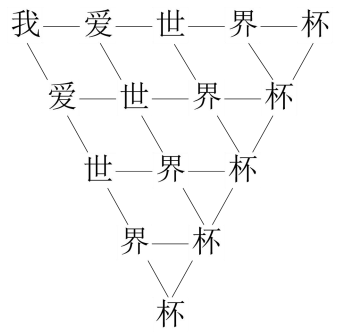


【解析】

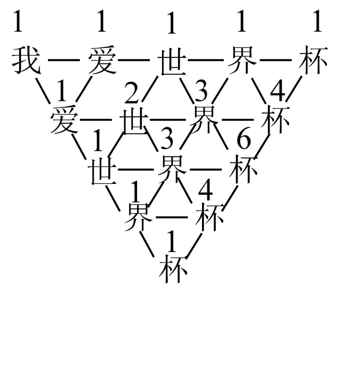


所以有 10 种.

【作业 8】下图中的"我爱世界杯"有______种不同的读法.



【解析】"我爱世界杯"的读法也就是从"我"走到"杯"的方法．如图所示，共 $1+4+6+4+1=16$ 种方法.



【作业 9】列竖式计算：

$2.57+10.03=$ $101-25.75=$ $73.2+0.18=$

【解析】12.6；75.25；73.38

【作业 10】列竖式计算：

$5.6\times 2.9=$　　　　　　　　$3.77\times 1.8=$

【解析】16.24；6.786

【作业 11】列竖式计算：

$42.84\div 0.7=$　　　　　　　　$85.44\div 16=$

【解析】61.2；5.34

第二讲平均数作业

【作业1】请求出103，109，105，101，110，102，106，104这8个数的平均数.

【解析】$(103+109+105+101+110+102+106+104)\div 8=105$.

【作业2】有10个数，若去掉最大的数，则剩下的数的平均数是22；若去掉最小的数，则剩下的数的平均数是25.那么原来10个数中，最大数与最小数的差是多少？

【解析】$25\times 9-22\times 9=27$.

【作业3】4个数的平均数是60，若去掉一个数，剩下的三个数的平均数是66，那么去掉的数是多少？

【解析】4×60=66×3=240－198=42.

【作业4】在1，2，3，4，5，6，7，8，9，10中增加一个数，使得这组数的平均数为6，则增加的数是多少？

【解析】$6\times 11-(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=66-55=11$

【作业5】1班有33人，2班有22人.在一次测试中，1班的平均分是80分，两个班的总平均分是82分，求2班的平均分.

【解析】两个班的总人数为$33+22=55$人，两个班的总分数为$55\times 82=4510$分，1班的总分为$33\times 80=2640$分，2班的平均分为$(4510-2640)\div 22=85$分.

【作业6】大黄蜂从甲地开往乙地执行巡逻任务，前2小时每小时行驶60千米，后3小时每小时行驶70千米，平均每小时行驶多少千米？

【解析】总的路程为330千米，总的时间是5小时，所以平均速度是$66km/h$.

【作业7】某校男老师的平均年龄是32岁，女老师的平均年龄是27岁，全体老师的平均年龄是30岁.如果男老师比女老师多13人，那么该校共有多少名老师？

【解析】列方程解应用题，65名.设女老师有x人，则男老师有$(x+13)$人.方程为$32(x+13)+27x=30(x+x+13)$，解得$x=26$.男老师为$26+13=39$人，总人数为$26+39=65$人.

【作业8】甲乙丙三人在一次考试中平均分为86.甲乙的平均分为82，乙丙的平均分为90，则甲丙的平均分是多少？

【解析】甲乙丙三人总分为$86\times 3=258$，甲乙两人的总分为$82\times 2=164$，乙丙两人的总分为$90\times 2=180$，推出丙的分数为94，甲的分数为78.所以甲丙两人的平均分为86.

【作业9】6个自然数的平均数是7，其中前四个数的平均数是8，第4个数是11，求后三个数的平均数.

【解析】前四个数的和为32，前三个数的和为21，六个数总和为42，那么后三个数的和为21，所有后三个数的平均数为7.

【作业10】某次数学竞赛，试题共有10道，每做对一题得6分，每做错一题倒扣2分．小红最终得44分，做对的题比做错的题多______道.

【解析】假设全做对，那么可得$10\times 6=60$分，这样就比实际多出$60-44=16$分；因为做对一题比做错一题多得$6+2=8$分，也就是做错了$16\div 8=2$道题；进而求得做对题的道数.

做错了：$(10\times 6-44)\div(6+2)=16\div 8=2$道；

做对了：$10-2=8$ 题；

做对的题比做错的题多：$8-2=6$ 题．

【作业 11】一张数学试卷，只有 25 道选择题．做对一题得 4 分，做错一题倒扣 1 分；如不做，不得分也不扣分．若小明得了 78 分，那么他做对______题，做错______题，没做______题．

【解析】 若做对 19 道，做错 0 道，6 道没做，得分为 76，而小明得了 78 分，所以做对的肯定不少于 19 道；

若做对 20 道，得 80 分，要扣 $80-78=2$ 分，则做错 2 道，3 道没做，刚好 78 分；

若做对 21 道，得 84 分，要扣 $84-78=6$ 分，则做错 8 道，不可能；

故小明做对 20 道，做错 2 道，3 道没做．

【作业 12】喜羊羊的存钱罐中只有 5 角和 1 元的硬币共 100 枚，其中 5 角的硬币比 1 元的硬币多 20 元，喜羊羊的存钱罐中总共有________元钱．

【解析】 5 角的硬币比 1 元的硬币多 20 元，那么这多出来的 20 元为 40 枚 5 角的硬币；

那么剩下的 60 枚中 5 角和 1 元的硬币总钱数应该一样多，要使得钱数一样多，那么 5 角的是 1 元的硬币数量的两倍；所以这 60 枚中 20 枚 1 元，40 枚 5 角．

那么这 100 枚中，20 枚 1 元，80 枚 5 角，故总共为 60 元钱．

第三讲 简单的抽屉原理作业

【作业 1】三年级一班学雷锋小组有 13 人．教数学的张老师说：“你们这个小组至少有 2 个人在同一月过生日．”你知道张老师为什么这样说吗？

【解析】 因为 1 年为 12 个月；
而三年级一班学雷锋小组有 13 人；
要让在同一个月过生日的人数尽量少，那么就得尽量的平均和分散；
12 个月每个月 1 个人过生日的话还有另外一位小朋友没有安排，
所以，这些小朋友至少有 2 个人在同一月过生日．

【作业 2】试说明 400 人中至少有两个人的生日相同．

【解析】 因为 1 年为 366 天；
要让在同一天过生日的人数尽量少，那么就得尽量的平均和分散；
366 天中每天 1 个人过生日的话还有 34 位人没有过生日，然而这 34 位人也是在这 366 天中的其中一天过生日的；
因此，400 人中至少有两个人的生日相同．

【作业 3】口袋中有三种颜色的筷子各十根．问：

（1）至少取出多少根才能保证 2 双颜色不同的筷子？

（2）至少取出多少根才能保证 2 双颜色相同的筷子？

【解析】（1）要保证“2 双颜色不同的筷子”；
考虑极端情况：颜色尽可能相同，先将三种颜色的筷子中的一种全部取完，共 10 根，此时不满足，然后其余两种颜色各取一根，还不满足条件；
接下来的两种筷子中随意取一根，必然能够保证出现 2 双颜色不同的筷子．
故至少需要取出：$10+2\times1+1=13$ 根筷子．
（2）要保证“2 双颜色相同的筷子”；
考虑极端情况：颜色尽可能不同，先各种颜色各取 1 双 1 根；
接下来随意取一根，必然能够保证出现 2 双颜色相同的筷子．
故至少需要取出：$3\times3+1=10$ 根筷子．

【作业 4】袋里有红、白、蓝、黑四种颜色的单色球，从袋中任意取出若干个球．问：至少要取出多少个球，才能保证有 3 个球是同一颜色的？

【解析】 要保证“有 3 个球是同一颜色的”；
考虑极端情况：颜色尽可能不同，先各种颜色各取 2 个；
接下来随意取 1 个，必然能够保证出现有 3 个球是同一颜色的．
故至少需要取出：$4\times2+1=9$ 个小球．

【作业 5】一只鱼缸里有很多条鱼，共有 5 个品种．问：至少捞出多少条鱼，才能保证有 5 条相同品种的鱼？

【解析】 要保证“有 5 条相同品种的鱼”；
考虑极端情况：品种尽可能不同，首先每个品种各取 4 条；
接下来随意取 1 条，必然能够保证出现有 5 条相同品种的鱼．
故至少需要取出：$4\times5+1=21$ 条．

【作业 6】某小学五年级的学生身高（按整数厘米计算），最矮的 138 厘米，最高的 160 厘米．如果任意从这些学生中选出若干人，那么，至少要选出多少人，才能保证有 5 人的身高相同？

【解析】 要保证“有 5 人的身高相同”；

考虑极端情况：身高尽可能不同，先各种身高下先各取 4 人；
接下来随意取 1 人，必然能够保证出现有 5 人的身高相同．
故至少需要取出：$23\times4+1=93$ 人．

【作业 7】在 1~30 中至少要取几个不同的数，才能保证其中一定有一个数是 3 的倍数？

【解析】 1~30 中，有 10 个数是 3 的倍数，20 个数不是 3 的倍数，考虑最不利情况，先取完 20 个不是 3 的倍数的数，再从 10 个是 3 的倍数的数中任取一个即可满足条件，因此至少要取 $20+1=21$ 个数．

【作业 8】计算：（1）$64\times57-24\times64+64\times67$ （2）$21+63\div\left[9-\left(17-3\times5\right)\right]$

【解析】

（1）$64\times57-24\times64+64\times67$

$=64\times\left(57-24+67\right)$

$=64\times100$

$=6400$

（2）$21+63\div\left[9-\left(17-3\times5\right)\right]$

$=21+63\div\left[9-\left(17-15\right)\right]$

$=21+63\div\left(9-2\right)$

$=21+63\div7$

$=21+9$

$=30$

【作业 9】鸡与兔共有 40 只，共有脚 130 只．鸡与兔各有多少只？

【解析】 假设全是鸡，那么应该有 $40\times2=80$ 只脚，而现在多了 $130-80=50$ 只，是因为有一部分是兔子，而一只兔子比一只鸡多 $4-2=2$ 只脚，所以要多 50 只脚应该有 $50\div2=25$ 只兔子，所以鸡有 $40-25=15$ 只．

【作业 10】小明参加猜谜比赛，共 20 道题，规定猜对一道得 5 分，猜错一道倒扣 3 分（不猜按错算）．小明共得 60 分，他猜对了几道？

【解析】 假设全猜对，那么应该得 $20\times5=100$ 分，而现在少得了 $100-60=40$ 分，是因为有题猜错了，而猜错一道总分就要损失 $5+3=8$ 分，所以少 40 分应该猜错 $40\div8=5$ 题，所以他猜对了 $20-5=15$ 题．

【作业 11】用三个 2，一个 3，一个 5，可以组成多少个不同的五位奇数？

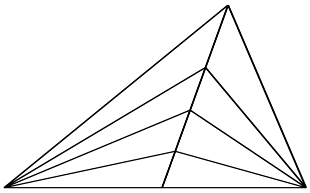
【解析】 每个数字都要用到，考虑个位的情况：
（1）个位为 3:22253,22523,25223,52223，共 4 个；
（2）个位为 5:22235,22325,23225,32225．共 4 个．
综上所述，共有 $4+4=8$ 个．

【作业 12】小王庄有一个长方形的鱼塘，长和宽分别是 20 米和 10 米，在鱼塘中每 1 平方米最多可以养鱼 16 条．请问该鱼塘的面积是多少平方米？最多可养多少条鱼？

【解析】 面积：$20\times10=200$ 平方米；养鱼：$200\times16=3200$ 条．

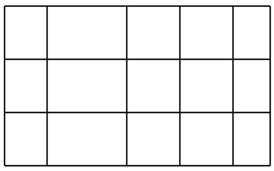
第四讲 几何计数作业

【作业 1】下图中共有________个三角形.



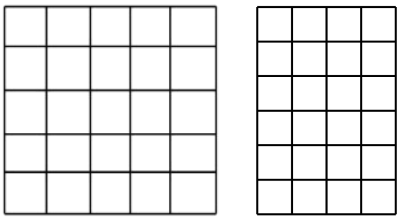
【解析】由 1 个，2 个，3 个，4 个，6 个，8 个小三角形组成的三角形分别有：8，7，4，3，1，1 个，也即一共有 $8+7+4+3+2=24$ 个.

【作业 2】图中共有________个长方形.



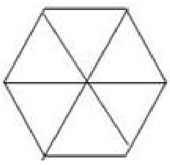
【解析】横着的线段：$5+4+3+2+1=15$ 条；竖着的线段：$3+2+1=6$ 条；长方形数量：$15\times 6=90$ 条.

【作业 3】下面的 5×5 图中有_______个正方形；6×4 图中有_______个正方形.



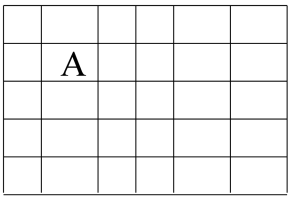
【解析】在 5×5 的图中，边长为 1 的正方形 5^2 个；边长为 2 的正方形 4^2 个；边长为 3 的正方形 3^2 个；边长为 4 的正方形 2^2 个；边长为 5 的正方形有 1^2，总共有 $5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=55$ (个)正方形. 在 6×4 的图中边长为 1 的正方形 6×4 个；边长为 2 的正方形 5×3 个；边长为 3 的正方形 4×2 个；边长为 4 的正方形 3×1 个；总共有 $6\times 4+5\times 3+4\times 2+3\times 1=50$ (个).

【作业 4】数一数，下边图形中有________个平行四边形.



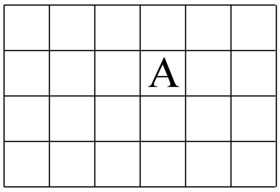
【解析】每相邻两个三角形可组成一个平行四边形，共计 6 个.

【作业 5】下图中含有字母 *A* 的长方形有________个.



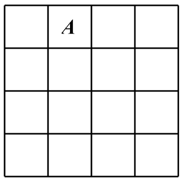
【解析】 鼠标法：$4\times20=80$ 个.

【作业 6】下图中含有字母 *A* 的正方形有________个.



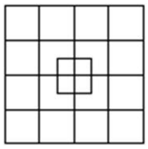
【解析】 边长为 1 的正方形：1 个；
边长为 2 的正方形：4 个；
边长为 3 的正方形：6 个；
边长为 4 的正方形：3 个；
共$1+4+6+3=14$个.

【作业 7】图中，不含"*A*"的正方形有________个.



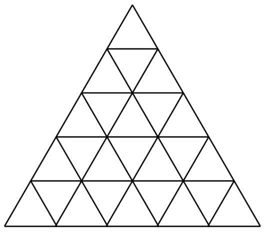
【解析】 面积为 1 的有 15 个，面积为 4 的有 7 个，面积为 9 的有 2 个，共 24 个.

【作业 8】数一数：图中共有________个正方形.



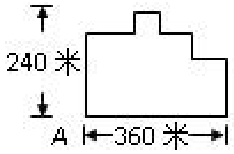
【解析】 按面积从小到大共有$4+17+9+4+1=35$个.

【作业 9】请看下图，共有________个三角形.

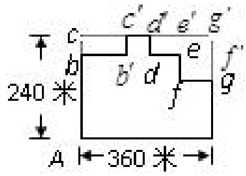


【解析】 假设每个小三角形的边长为 1，那么
边长为 1 的三角形有：$1+3+5+7+9=25$个；
边长为 2 的三角形有：$(1+2+3+4)+(1+2)=13$个；
边长为 3 的三角形有：$1+2+3=6$个；
边长为 4 的三角形有：$1+2=3$个：
边长为 5 的三角形有：1 个；
共有$25+13+6+3+1=48$个.

【作业 10】下图是一个公园的平面图，*A* 是公园的大门．问：小明从 *A* 门进公园，不重复地沿道路走公园一圈，他走了多少米？

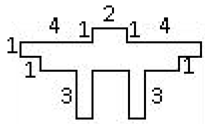


【解析】分析题有关的线段编号，如图：



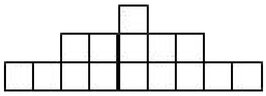
我们可把 bb' 移到 cc'，$b'c'$ 移到 bc 位置，把 de 移到 $d'e'$，fg 移到 $e'g'$，把 dd' 移到 $f'g'$，把 fe 移到 gf'，则此图变成为一个规则的长方形，它的长是 360 米，宽是 240 米，周长可求：即(360+240)×2=1200（米）.

【作业 11】下图是某建设物的设计图，如图所示（单位：米）现根据需要在它周围绕电线一圈，试求需电线多少米？



【解析】 $(4+2+4+1+1+1+3)\times2+3\times2=16\times2+3\times2=38$ （米）.

【作业 12】用 15 个边长 2 厘米的小正方形摆成如下图的形状，求图形周长是多少厘米？



【解析】 我们可从水平方向和竖直方向分析此题，在水平方向上，所有线段的长度和为 $9\times2\times2=36$ 厘米；在竖直方向上，所有线段的长度为 $3\times2\times2=12$ 厘米．因此，此图形周长可求：36+12=48（厘米）.

第五讲 质数与合数作业

【作业 1】在自然数中，从小到大第 7 个质数是________.

【解析】从 1 开始的质数为 2，3，5，7，11，13，17，19 等，则第七个质数是 17.

【作业 2】判断：两个自然数的积一定是合数.（　　）

【解析】错误.合数是含有 3 个以上因数的数.1 和 2 都是自然数，他们的乘积等于 2，也是质数.

【作业 3】判断：任何两个质数之和都不会是质数.（　　）

【解析】错误.$2+3=5$，$2+5=7$ 例外.

【作业 4】一个两位质数，个位与十位数字交换后仍为质数，这样的质数有多少个？请写出所有这样的质数.

【解析】11，13，17，31，37，71，73，79，97，共 9 个.

【作业 5】已知两个质数的和为 91，请问这两个数的乘积是（　　）

【解析】91 为奇数，$91=89+2$，乘积为 $89\times2=178$.

【作业 6】如果 a、b 均为质数，且一个是奇数，一个是偶数，已知 $31a+95b=2019$，则 $a+b=$________.

【解析】有一个是奇数一个为偶数，$95b$ 的乘积由 b 的奇偶性决定，如果 b 为偶数 2，则 $95b$ 乘积为 190，算出 a 为 59，$a+b=59+2=61$；如果 b 为奇数，$95b$ 乘积个位为 5，$31a$ 乘积个位为 4，b 为奇数，a 只能为偶数 2，个位不可能为 4，矛盾.所以结果 $a+b=59+2=61$.

【作业 7】万尼亚想了一个三位质数，各位数字都不相同.如果个位数字等于前两个数字的和，那么这个数是几？

【解析】因为是质数所以个位数不可能为偶数 0，2，4，6，8 也不可能是奇数 5．如果末位数字是 3 或 9，那么数字和就将是 3 或 9 的两倍，因而能被它们整除，这就不是质数了．所以个位数只能是 7．这个三位质数可以是 167，257，347 或 617 中间的任一个.

【作业 8】若 A、$\overline{1A}$、$\overline{2A}$ 都是质数，则 $A=$__________.（$\overline{1A}$ 是指十位数字为 1，个位数字为 A 的两位数)

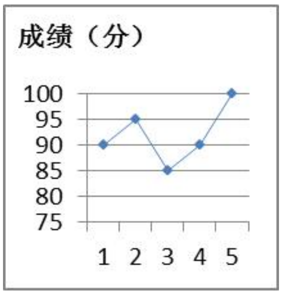
【解析】A 是质数，只能为 2、3、5、7，但是 12、15、27 都不是质数，所以 $A=3$.

【作业 9】在 19、197、2009 这三个数中，质数的个数是（　）.

（*A*）　0　　(*B*)　1　　(*C*)　2　　(*D*)　3

【解析】19 是常见的质数，197 容易检验知也是质数，本题主要是考查 2009 这个数是否是质数.实际上，2009=7×41，是个合数，所以在 19，197，2009 这三个数中有 2 个质数.正确答案为 *C*.

【作业 10】 下图是顺顺五次测验成绩的统计图，请问他的平均分是多少？



【解析】 92 分.

【作业 11】已知 9 个数的平均数是 9，如果把其中一个数改为 9 后，这 9 个数的平均数变为 8，那么这个被改动的数是多少？

【解析】 原来的 9 个数的总和是 $9\times9=81$，把其中一个数改为 9 后，9 个数的总和是：$9\times8=72$，所以被改动的数是 $(81-72)+9=18$.

第六讲最值问题初步作业

【作业 1】3 个连续奇数相乘，所得乘积的个位数字最小可能是多少？

【解析】积的个位数字，只与乘数的个位数字有关.考虑 3 个连续奇数的个位的所有情况：

$1\times3\times5\to5$；$3\times5\times7\to5$；$5\times7\times9\to5$；$7\times9\times1\to3$；$9\times1\times3\to7$.所以最小是 3.

【作业 2】三个自然数的和是 19，它们的乘积最大可能是多少？

【解析】 在和相同的情况下，差越小，积越大.

$19=6+6+7$，乘积最大为 $6\times6\times7=252$.

【作业 3】有一类自然数，它的各个数位上的数字之和为 56，这类自然数中最小的是几？

【解析】 数位越少，数越小.56÷9=6……2，最小为 2999999.

【作业 4】把 75 分成两个自然数的和，使得他们的乘积最大，应该怎么分？

【解析】 和一定差小积大，75÷2=37……1，75 分成 37 和 38.

【作业 5】把 64 分成几个自然数的和，再求这几个自然数的乘积，要使得他们的乘积最大，应该怎么分？

【解析】 多三少二不拆一，64÷3=21……1，所以把 64 分成 20 个 3 和两个 2.

【作业 6】用 24 根长 1 厘米的火柴棒围成一个矩形，这个矩形的面积最大是多少？如果用 22 根火柴棒呢？

【解析】 在和相同的情况下，差越小，积越大.$24=4\times6$，那么我们围成一个 6×6 的正方形，面积最大，为 36 平方厘米.而 22 不能被 4 整除，那么我们让这个矩形的长和宽尽量接近.$22=2\times(5+6)$，那么这个矩形的面积最大为 $5\times6=30$ 平方厘米.

【作业 7】一个多位数的各位数字互不相同，而且各位数字之和为 23.这样的多位数最小可能是多少？最大可能是多少？

【解析】 要让这个多位数尽量小，那么首先位数必须少.易知，最小是三位数，先让其中两个数最大，那么剩下一个数必然最小.$23=9+8+6$，这个数是 689.

要让这个多位数尽量大，那么位数必须尽量多.$1+2+3+4+5+6=21$，那么最多可以是 7 位数（加上 0）.先让其中 6 位最小，那么剩下一位最大.$23=0+1+2+3+4+5+8$，这个数是 8543210.

【作业 8】请将 6、7、8、9 填入算式“口口×口口”的方格中.要使得算式结果最大，应该怎么填？

【解析】要使得算式结果最大，首先要保证首位尽量大.那么十位填 8 和 9，个位填 6，7.在两数和固定的情况下，差小积大，那么方格中填 96×87.

【作业 9】4 个小朋友，每人的体重都是整数千克，而且其中任意 3 人体重之和都大于 99 千克.这 4 个小朋友体重之和最小是多少千克？

【解析】 如果有其中 3 人的体重和比 99 大很多，必然会造成“浪费”，为了避免这种“浪费”，

让任意 3 人都刚好有 99*kg* 最好.那么先让每人都是 33*kg*，那么任意 3 人体重都是 99*kg*，此时只要给其中 2 人增加 1*kg*，那么任意 3 人的体重都超过 99*kg*.这 4 人体重和是 $33+33+34+34=134kg$.

【作业 10】在有 3 个数码相同的四位数中，除 6111 外，与 6111 最接近的是________.

【解析】 6111 中已有 3 个相同的数字 1，所以首先容易想到将 6 改动，变为 5 或 7，这样得到的数与 6111 之差为 1000．再仔细考虑，不妨将 3 个 1 中的 2 个 1 换成 6．为使差尽可能小，自然是将后 2 个 1 换成 6 得到 6166，此时差为 55．若将 6166 中的 1 换成 0 则得到 6066，它比 6111 小，与 6111 之差仅为 $100-55=45$．于是 6066 才是所求的答案.

【作业 11】某车队用大、小两种卡车运送 100 吨货物，如果每辆载重为 8 吨的大卡车需耗油 15 升，而每辆载重为 2 吨的小卡车需耗油 4 升，那么耗油量最少是________升.

【解析】 同样运送 8 吨货物，用 1 辆大卡车要耗油 15 升，用 4 辆小卡车要耗油 $4\times4=16$ 升．$15<16$，故宜尽可能多地使用大卡车．$100\div8=12\cdots4$，所以应选用 12 辆大卡车，$4\div2=2$ 辆小卡车，这时耗油量将达到最少，是 $15\times12+4\times2=188$ 升.

【作业 12】一个布袋中装有红、黄、绿 3 种颜色的小球各 10 个，其中红色小球上均标有数字 6，黄色小球上均标有数字 7，绿色小球上均标有数字 8．小华从袋中摸出若干个球并把标在这些球上的数字相加，得到的结果是 59，那么他最多可能拿出了多少个红球？

【解析】 我们知道 6，8 是偶数，7 是奇数，又若干个偶数之和总是偶数，但 59 是奇数，故小华摸出的球中至少有一个黄色小球．除去这个小球外的其余球上所标的数字之和为 $59-7=52$．经计算可知 $52-7$，$52-8$，$52-2\times7$，$52-7-8$ 均不能被 6 除尽，只有 $52-2\times8=36$ 能被 6 除尽，商是 6．因此最多可能拿出了 6 个红球.

第七讲数字谜综合作业

【作业 1】在如图所示的减法竖式中，相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.请问这些字母各代表哪个数字？

$$\begin{array}{r} A\ A\ B\ A\ A \\ -\quad B\ A\ C\ A \\ \hline C\ A\ B\ D \end{array}$$

【解析】首位可以判断 $A=1$；个位 $A-A=D$，所以 $D=0$.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ B\ 1\ 1 \\ -\quad B\ 1\ C\ 1 \\ \hline C\ 1\ B\ 0 \end{array}$$

0 和 1 被用了后，C 能选的数都比 1 大，所以十位不够减需要借位，则 $B-1-1=1$，推出 $B=3$，那么 $C=8$.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 3\ 1\ 1 \\ -\quad 3\ 1\ 8\ 1 \\ \hline 8\ 1\ 3\ 0 \end{array}$$

【作业 2】在如图所示的加法竖式中，相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.当 $G=5$，$D=0$，$H=6$ 时，请问 I 代表什么数字？

$$\begin{array}{r} A\ A\ B \\ +\ C\ D\ E\ F \\ \hline G\ D\ H\ I \end{array}$$

【解析】根据题意：

$$\begin{array}{r} A\ A\ B \\ +\ C\ 0\ E\ F \\ \hline 5\ 0\ 6\ I \end{array},$$

C 和 G 不同，说明有进位，$C=4$，那么 $A=9$.而 E 不能等于 6，所以 $B+F$ 不能进位：

$$\begin{array}{r} 9\ 9\ B \\ +\ 4\ 0\ 7\ F \\ \hline 5\ 0\ 6\ I \end{array}.$$

现在还剩下 1，2，3，8 这 4 个数字可以选，所以 I 只能是 $1+2=3$.

【作业 3】在如图所示的加法竖式中，相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.那么 *A*、*B*、*C* 各代表什么数字？

$$\begin{array}{r} A\ B \\ B\ A \\ +\quad A\ B \\ \hline C\ C\ A \end{array}$$

【解析】 个位 $2B+A$ 可能等于 A，$A+10$ 或 $A+20$，B 在首位 B 不能为 0，所以不可能等于 A，如果等于 $A+20$，那么 $B=10$ 也不可能，所以 $2B+A=A+10$，那么 $B=5$；那么十位 $2A+6=11$ 或者 22，$2A$ 是偶数，所以不可能和为 11，所以 $2A+6=22$，推出 $A=8$.

$$\begin{array}{r} 8\ 5 \\ 5\ 8 \\ +\quad 8\ 5 \\ \hline 2\ 2\ 8 \end{array}$$

【作业 4】请将下面竖式补充完整.

$$\begin{array}{r} \square\ \square \\ \times\quad 8\ \square \\ \hline \square\ \square\ \square \\ \square\ \square\ \\ \hline \square\ \square\ \square\ \square \end{array}$$

【解析】 第二个乘数的个位乘以第一个乘数得到的是三位数，而 8 乘以第一个乘数得到的是 2 位数，说明第二个乘数的个位比 8 大，那么只能是 9;

一个两位数乘以 9 得到的是 3 位数，而乘以 8 得到的是 2 位数，那么这个两位数只能是 12，由此可得：

$$\begin{array}{r} \boxed{1}\ \boxed{2} \\ \times\quad 8\ \boxed{9} \\ \hline \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{8} \\ \boxed{9}\ \boxed{6}\ \phantom{\boxed{0}} \\ \hline \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{6}\ \boxed{8} \end{array}$$

【作业 5】请将下面竖式补充完整，并求出 A、B、C、D 各代表什么数字？

$$\begin{array}{cccc}
 & & A & B \\
\times & & C & D \\
\hline
 & 2 & \square & \square \\
6 & \square & D & \\
\hline
\square & \square & D & 1
\end{array}$$

【解析】首先我们可以填出

$$\begin{array}{cccc}
 & & A & B \\
\times & & C & D \\
\hline
 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} \\
6 & \square & D & \\
\hline
\square & \square & D & 1
\end{array},$$

因为 $201 = 3\times 67$，所以

$$\begin{array}{cccc}
 & & 6 & 7 \\
\times & & C & 3 \\
\hline
 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} \\
6 & \square & 3 & \\
\hline
\square & \square & 3 & 1
\end{array}$$

进而填出答案:

$$\begin{array}{cccc}
 & & 6 & 7 \\
\times & & 9 & 3 \\
\hline
 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} \\
6 & \boxed{0} & 3 & \\
\hline
\boxed{6} & \boxed{2} & 3 & 1
\end{array}$$

A=6，B=7，C=9，D=3.

【作业 6】请将下面竖式补充完整.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \square & \square \\
\times & & \square & \square & \square \\
\hline
 & & & 2 & \square \\
1 & \square & 9 & & \\
\hline
\square & 8 & \square & \square & 1
\end{array}$$

【解析】

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & \boxed{2} & \boxed{1} \\
\times & & \boxed{9} & \boxed{0} & \boxed{1} \\
\hline
 & & & 2 & \boxed{1} \\
1 & \boxed{8} & 9 & & \\
\hline
\boxed{1} & 8 & \boxed{9} & \boxed{2} & 1
\end{array}$$

【作业 7】请将下面竖式补充完整.

$$\begin{array}{rrr|rrrrr}
 & & & & & \square & \square & \square \\
\hline
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
 & & & 3 & 7 & 2 & & \\
\hline
 & & & & \square & \square & \square & \\
 & & & & 4 & 9 & 6 & \\
\hline
 & & & & & \square & \square & \square \\
 & & & & & \square & \square & \square \\
\hline
 & & & & & & & 0
\end{array}$$

【解析】除数应该是 372 的因数，同时也是 496 的因数；$372=2\times2\times3\times31$，$496=2\times2\times2\times2\times31$，因为除数是个 3 位数，所以被除数只能是 124，由此可得

$$\begin{array}{rrr|rrrrr}
 & & & & & \boxed{3} & \boxed{4} & 1 \\
\hline
\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} & \square & \square & \square & \square & \square \\
 & & & 3 & 7 & 2 & & \\
\hline
 & & & & \square & \square & \square & \\
 & & & & 4 & 9 & 6 & \\
\hline
 & & & & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} \\
 & & & & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} \\
\hline
 & & & & & & & 0
\end{array}$$

那么，被除数$=124\times341=42284$.

【作业 8】在如图所示的乘法竖式中，相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字.那么 *A*、*B*、*C*、*D*、*E* 各代表什么数字？

$$\begin{array}{rrrr}
 & & A & B \\
\times & & A & B \\
\hline
 & C & A & B \\
 & B & D & \\
\hline
 & E & A & B
\end{array}$$

【解析】 个位B和B的乘积得到的个位还是B，那么B可能为0，1，5，6.观察可知，B为首位，所以不可以是0；又因为B乘以$\overline{AB}$得到的是三位数，而A乘以$\overline{AB}$得到的是两位数，说明B比A大，那么B也不可能是1；所以B只能是5，或者6.

又因为

$$\begin{array}{r} C\ \ A\ \ B \\ +\ \ B\ \ D\ \ \ \\ \hline E\ \ A\ \ B \end{array},$$

所以D应该为0.

当$B=5$时，

$$\begin{array}{r} A\ \ 5 \\ \times\ \ \ \ \ \ A\ \ 5 \\ \hline C\ \ A\ \ 5 \\ 5\ \ 0\ \ \ \ \\ \hline E\ \ A\ \ 5 \end{array},$$

A为偶数，$\overline{A5}\times A=50$，推出$A=2$，带入成立；

当$B=6$时，

$$\begin{array}{r} A\ \ 6 \\ \times\ \ \ \ \ \ A\ \ 6 \\ \hline C\ \ A\ \ 6 \\ 6\ \ 0\ \ \ \ \\ \hline E\ \ A\ \ 6 \end{array},$$

$\overline{A6}\times A=60$，无解.

【作业9】(1)已知等腰三角形的两条边的长度分别是7*cm*和15*cm*，它的周长是多少厘米？

(2)有4根小棒，他们的长度分别是2*cm*,4*cm*,5*cm*,8*cm*,选出其中的三根，能围出多少个不同的三角形？

【解析】（1）由于三角形的两边之和要大于第三边，所以等腰三角形的腰不可能为7*cm*，否则$7+7=14<15$，所以周长为$7+15+15=37\ cm$.

（2）由于三角形的两边之和要大于第三边，所以可以围出的三角形有：（2,4,5）和（4,5,8）两组.

【作业10】（1）在一个直角三角形中，一个锐角是55°，另一个锐角是多少度？

（2）在三角形*ABC*中，∠*A*－∠*B*=10°，∠*B*－∠*C*=10°，求，∠*A*、∠*B*、∠*C*的度数.

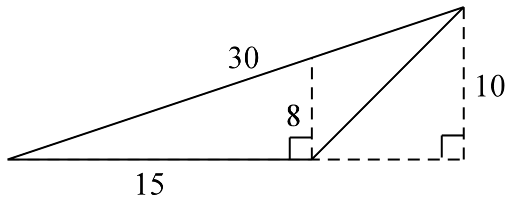
【解析】（1）三角形内角和为180°，所以另一个锐角的度数为$180-90-55$=35度.

（2）由题意得，$\angle B=\angle C+10^\circ$，$\angle A=\angle B+10^\circ=\angle C+20^\circ$，

又∵三角形内角和为 180°，即 $\angle A+\angle B+\angle C=180^{\circ}$

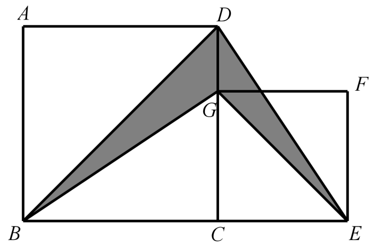
∴ $\angle C+20^{\circ}+\angle C+10^{\circ}+\angle C=180^{\circ}$，解得 $\angle C=50^{\circ}$，$\angle A=50^{\circ}+20^{\circ}=70^{\circ}$，$\angle B=50^{\circ}+10^{\circ}=60^{\circ}$

【作业 11】三角形的底和高如图所示，求三角形的面积.



【解析】 短的虚线不是三角形的高，所以三角形的面积应该为 $15\times10\div2=75$.

【作业 12】如图把两个正方形拼一起，小正方形的边长是 8*cm*，大正方形的边长是 12*cm*，那么图中阴影部分的面积是多少？



【解析】 阴影部分可以分成 ΔBDG 和 ΔDGE 两个三角形，ΔBDG 底为 $12-8=4cm$，高为 12，所以 ΔBDG 的面积为 $4\times12\div2=24cm^2$；ΔDGE 底为 $12-8=4cm$，高为 8，所以 ΔDGE 的面积为 $4\times8\div2=16cm^2$.所以阴影部分的面积为 $24+16=40cm^2$

第八讲 定义新运算作业

【作业 1】我们规定：$A○B$ 表示 **A**、**B** 中较大的数，$A\triangle B$ 表示 **A**、**B** 中较小的数.则 $(10\triangle 8-6\triangle 5)\times(11○13+15\triangle 20)=$ ________.

【解析】 $(10\triangle 8-6\triangle 5)\times(11○13+15\triangle 20)=(8-5)\times(13+15)=3\times 28=84$.

【作业 2】怪物星球定义一种新的运算“&”为 $A\&B=(A+3B)\times(A+B)$ ，即计算结果为 A 与 $3B$ 的和乘 **A** 与 **B** 的和的积，则算式 5&7 的结果是多少？

【解析】 312

【作业 3】计算题：对于任意自然数，定义：$n\,!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times 3\times 2\times 1$ ，如：$2\,!=2\times 1$ ，$3\,!=3\times 2\times 1$.那么，$1\,!+2\,!+3\,!+4\,!+5\,!=$ ________.

【解析】 $1\,!+2\,!+3\,!+4\,!+5\,!=1+2+6+24+120=153$.

【作业 4】规定运算“☆”为：若 $a>b$，则 $a☆b=a+b$；若 $a=b$，则 $a☆b=a-b+1$；若 $a<b$，则 $a☆b=a\times b$.那么，$3☆2+4☆4+5☆7=$ ________.

【解析】 $3☆2+4☆4+5☆7=(3+2)+(4-4+1)+(5\times 7)=41$.

【作业 5】规定新运算※：如果 ***a***，***b*** 是两个整数，那么 $a※b=3a-2b$.若 $x※(4※1)=7$ ，则 ***x***=________

【解析】 因为 $4※1=3\times 4-2\times 1=10$ ，所以 $x※(4※1)=x※10=3x-20=7$，$x=9$.

【作业 6】如果 $a※b$ 表示 $a\times b+a$，例如 $3※4=3\times 4+3=15$.那么，当 $x※5$ 比 $5※x$ 大 **100** 时，x= ________.

【解析】 $(5x+x)-(5x+5)=100$，$x=105$.

【作业 7】规定 $1※2=1+2=3$ ，$2※3=2+3+4=9$ ，$5※4=5+6+7+8=26$.如果 $a※15=165$ ，那么 ***a***＝________.

【解析】 方法一：$a*15$ 相当于连续的 15 个自然数相加，平均数为第 8 项的 $165\div 15=11$，而第一项就为 $11-7=4$.

方法二：

$a*15=a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+14)=15a+(1+14)\times 14\div 2=15a+105=165$

$a=(165-105)\div 15=4$.

【作业 8】 定义 $f(1)=1,\ f(2)=1+2=3,\ f(3)=1+2+3=6,$ ……，那么 $f(100)=$ ________.

【解析】 $f(100)=1+2+\ldots+100=5050$.

【作业 9】已知 ***a***、***b*** 为自然数，$a\triangle b=2a+b$ ，$a\triangle 2a\triangle 3a\Delta 4a\triangle 5a\triangle 6a\triangle 7a\triangle 8a\triangle 9a=3039$ ，$a=$ ________.

【解析】 $a\triangle 2a=2a+2a=4a$，$4a\triangle 3a=8a+3a=11a$，$11a\Delta 4a=22a+4a=26a$，

$26a\vartriangle 5a=52a+5a$=$57a$,$57a\vartriangle 6a=114a+6a$=$120a$，$120a\vartriangle 7a=240a+7a$=$247a$，

$247a\vartriangle 8a=494a+8a$=$502a$，$502a\vartriangle 9a=1004a+9a$=$1013a$,$1013a$=3039，$a$=3 .

【作业 10】已知： $a\Delta b=3a+2b$，$a\nabla b=3a-2b$,**又知，** $7\Delta x\nabla 9=93$ **，那么 x 为________.**

【解析】 设 $7\Delta x$ 为 a， $a\nabla 9=93,3a-2\times 9=93,3a=111,a=37$ 则 $7\Delta x=37,\ 3\times 7+2x=37,$

$2x=16,x=8$.

【作业 11】 $\left(100+15\right)\div 5$

【解析】 $\left(100+15\right)\div 5=100\div 5+15\div 5=20+3$ =23

【作业 12】 $\left(120-18\right)\div 6$

【解析】 $\left(120-18\right)\div 6=120\div 6-18\div 6=20-3$=17

【作业 13】 $134\div 7+6\div 7$

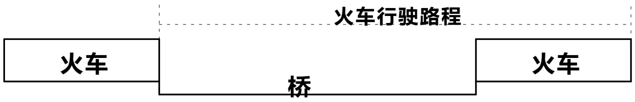
【解析】$134\div 7+6\div 7=\left(134+6\right)\div 7$ =$140\div 7$ =20

第九讲火车过桥作业

【作业 1】一辆长 200 米的火车路过途中一个路标，花了 20 秒，请问火车的速度是多少？

【解析】 10 米/秒

【作业 2】一列火车经过南京长江大桥，大桥长 6700 米，这列火车长 100 米，火车每分钟行 400 米，这列客车经过长江大桥需要多少分钟？



【解析】 从火车头上桥，到火车尾离桥，这是火车通过这座大桥的全过程，也就是过桥的路程＝桥长＋车长．通过“过桥的路程”和“车速”就可以求出火车过桥的时间．

所以过桥路程为：$6700+100=6800$ (米)，过桥时间为：$6800\div400=17$ (分钟)．

【作业 3】已知某铁路桥长 1000 米，一列火车从桥上通过，测得火车从开始上桥到完全下桥共用 120 秒，整列火车完全在桥上的时间为 80 秒，求火车的速度和长度？

【解析】 从火车上桥到下桥用 120 秒走的路程＝桥长＋火车长，完全在桥上 80 秒走的路程＝桥长－火车长，可知 120 秒比 80 秒多 40 秒，走的路程多两个火车长，即一个车长用时间为 $40\div2=20$ (秒)．则走一个桥长 1000 米所用时间为：$120-20=100$ (秒)，所以车速：$1000\div100=10$ (米/秒)，火车长：$10\times20=200$ (米)．

【作业 4】小明以每分钟 60 米的速度沿铁路边步行，一列长 252 米的货车从对面而来，从他身边通过用了 12 秒钟，求列车的速度?

【解析】 小明以每分钟 60 米的速度沿铁路边步行，单位换算后方方速度是：60 米/分钟＝1 米/秒，可以把火车就看成两点，头和尾，头遇到人的时候实际上尾和人相距 252 米，用时 12 秒，所以速度和为：$252\div12=21$（米/秒），列车速度为：$21-1=20$（米/秒）．

【作业 5】小明沿着铁路边的便道步行，一列客车从身后开来，在身旁通过的时间是 15 秒钟，客车长 105 米，每小时速度为 28.8 千米．求步行人每小时行多少千米?

【解析】 车速的单位换算为：28.8 千米/小时＝8 米/秒，本题是火车与人的追及问题：追及路程为 105 米，追及时间是 15 秒，速度差为：$105\div15=7$（米/秒），所以行人速度为：$8-7=1$（米/秒），1 米/秒＝3.6 千米/小时．

【作业 6】一列火车通过一个长 460 米的隧道用了 48 秒，经过一棵树用了 25 秒，请问这列火车的速度是多少？长度是多少？

【解析】 时间差：$48-25=23$ 秒，火车速度：$460\div 23=20$ 米/秒，火车长度 $48\times 20-460=25\times 20=500$ 米.

【作业 7】一列客车长 190 米，一列货车长 240 米，两车分别以每秒 20 米和 23 米的速度相向行进，在双轨铁路上，两车从车头相遇到车尾相离共需要多少时间？

【解析】 两车从车头相遇到车尾相离，相向而行走的路程是两辆火车的车身的长度 $240+190=430$ 米. 除以两辆车的速度和 $23+20=43$ 米，$430\div 43=10$ 秒.

【作业 8】两列火车，一列长 120 米，每秒行 20 米；另一列长 160 米，每秒行 15 米，两车相向而行，从车头相遇到车尾离开需要几秒钟？

【解析】 两车从车头相遇到车尾相离，相向而行走的路程是两辆火车的车身的长度 $120+160=280$（米），除以两辆车的速度和 $20+15=35$ 米，$280\div 35=8$（秒）.

【作业 9】慢车的车身长是 142 米，车速是每秒 17 米，快车车身长是 173 米，车速是每秒 22 米，慢车在前面行驶，快车从后面追上到完全超过慢车需要多少时间？

【解析】 根据条件可知，本题属于两列火车的追及情况，$(142+173)\div(22-17)=63$（秒）.

【作业 10】把 101 分成两个自然数的和，使得他们的乘积最大，应该怎么分？

【解析】 和一定差小积大，101÷2=50……1，应该把 101 分成 50 和 51.

【作业 11】把 100 分成几个自然数的和，再求这几个自然数的乘积，要使得他们的乘积最大，应该怎么分？

【解析】 多三少二不拆一，100÷3=33……1，应该把 100 分成 32 个 3 和 2 个 2.

第十讲对应法初步作业

【作业 1】计算：$(2+4+6+...+2018)-(1+3+5+...+2017)$.

【解析】 把括号去掉，得到

$$\begin{aligned}&2+4+6+\cdots 2018-1-3-5-\cdots-2017\\&=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(2018-2017)\\&=1\times1009\\&=1009\end{aligned}$$

【作业 2】连续 9 个自然数的和为 54，那么以这 9 个自然数中最大的一个数为第一项的连续 9 个自然数的和是多少？

【解析】 考察两组自然数之间的关系可以发现：后一组自然数的每一项比前一组自然数的对应项大 8，因此，后一组自然数的和应为 $54+8\times9=126$.

【作业 3】将自然数 1,2,3，…，1000 依次无间隔地写成一个多位数：12345678910…9989991000．求这个多位数的所有数码和．

【解析】0 和 999 对应，1 和 998 对应，2 和 997 对应…499 和 500 对应，它们的数字之和都为 $9+9+9=27$，共 500 组；加上 1000 的数字和为 1：$27\times500+1=13501$.

【作业 4】 下面数字方阵中共有 400 个数，所有这些数之和等于多少？

1	2	3	...	19	20
2	3	4	...	20	21
3	4	5	...	21	22
4	5	6	...	22	23
	......			......	
20	21	22	...	38	39

【解析】 1 和 39 对应成 40，2 和 38 对应成 40，……，一共有 200 组，每组 40，所以和是 $200\times40=8000$.

1	2	3	...	19	20
2	3	4	...	20	21
3	4	5	...	21	22
	......			......	
19	20	21	...	37	38
20	21	22	...	38	39

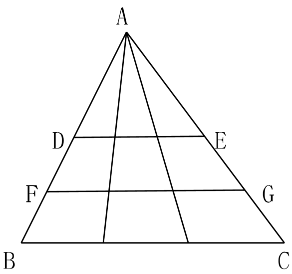
【作业 5】 从 1001 到 2019 的整数中，十位数字与个位数字相同的数有多少个？

【解析】 十位和个位相同的数 1011,1022，…，2011 可以与“合并”后的三位数建立一一对应关系：101,102,103，…，201；共有 $201-101+1=101$ 个.

【作业 6】32 名乒乓球运动员参加单打比赛，两两成对进行淘汰赛，请问要决出冠军，一共要比赛多少场？

【解析】 一场比赛与淘汰掉一名运动员可建立“一对一“的对应关系．要淘汰多少名运动员，就要进行多少场比赛，所以一共要打 31 场．

【作业 7】请问图中一共有________个三角形．



【解析】 可用数线段的方法数如右图所示的三角形（对应法），因为 DE 上有 6 条线段，每条线段的两端点与点 A 相连，可构成一个三角形，共有 6 个三角形，同样一边在 FG 和 BC 上的三角形也有 6 个，所以图中共有 18 个三角形．

【作业 8】鸡兔同笼共有 26 只脚，若将鸡兔互换，则共有 28 只脚，问鸡兔各有多少只？

【解析】 将互换前的鸡兔看作第一笼，将互换后的鸡兔看作第二笼，两笼一共有 $26+28=54$ 只脚，一只鸡与一只兔对应成一组，所以每组有 6 只脚，一共有 $54\div 6=9$ 组，即鸡兔共有 9 只．假设 9 只全是鸡，那么有 18 只脚，兔子有：$(26-18)\div(4-2)=4$ 只，鸡有 $9-4=5$ 只．

【作业 9】100 名学生参加数学考试，平均分 63 分，其中男生平均分是 60 分，女生平均分是 70 分，那么男生比女生多多少人？

【解析】 可以假设每个男生都是 60 分，每个女生都是 70 分．3 个女生给出 21 分，恰好够 7 个男生达到平均分，所以共有 70 个男生和 30 个女生．男生比女生多 40 人．

【作业 10】甲乙丙三人在一次考试中平均分为 86 分，甲乙的平均分为 82 分，乙丙的平均分为 90 分，则甲丙的平均分是多少？

【解析】甲乙丙三人总分为 $86\times 3=258$ 分，甲乙两人的总分为 $82\times 2=164$ 分，乙丙两人的总分为 $90\times 2=180$ 分，推出丙的分数为 94 分，甲的分数为 78 分.所以甲丙两人的平均分为 86 分．

【作业 11】某校男老师的平均年龄是 32 岁，女老师的平均年龄是 27 岁，全体老师的平均年龄是 30 岁．如果男老师比女老师多 13 人，那么该校共有多少名老师？

【解析】解:设女老师有 x 人,则男老师有 $(x+13)$ 人.方程为 $32(x+13)+27x=30(x+x+13)$，解得 $x=26$.男老师为 $26+13=39$ 人，总人数为 $26+39=65$ 人．

第十一讲体育比赛中的数学作业

【作业 1】32 名 4 年级学生进行围棋比赛，比赛按淘汰赛的方式进行，即每一场淘汰 1 人，直到决出冠军为止，那么一共需要进行多少场比赛？

【解析】每进行一场比赛就淘汰一个人，最后只剩下冠军了，也就是说淘汰了 31 人，因此进行了 31 场比赛．

【作业 2】32 名 4 年级学生进行围棋比赛，比赛按淘汰赛的方式进行，即每一场淘汰 1 人，直到最终决出冠、亚、季军各 1 人．那么一共需要进行多少场比赛？

【解析】每进行一场比赛就淘汰一个人，最后只剩下冠军了，也就是说淘汰了 31 人，因此进行了 31 场比赛．但注意决出季军需要多进行一次比赛，因此需要$31+1=32$场比赛．

【作业 3】二年级六个班进行拔河单循环赛，每个班要进行几场比赛？六个班一共要进行几场比赛？

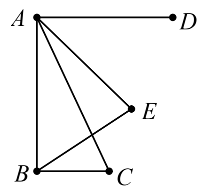
【解析】每个班要进行 5 场，一共要进行$6\times5\div2=15$（场）比赛．

【作业 4】武侯区的几个学校举行足球比赛，每两个学校都要赛一场，共赛了 28 场，那么有几个学校参加了比赛？

【解析】假设有n个学校参加比赛，那么就有$n\times(n-1)\div2$场比赛，现在已知共赛了 28 场，那么$n=8$，也就是有 8 个学校参加了比赛．

【作业 5】A、B、C、D、E五位同学一起比赛象棋，每两人都要比赛一盘．到现在为止，A已经赛 4 盘，B赛 3 盘，C赛 2 盘，D赛 1 盘．问：此时E同学赛了几盘？

【解析】画 5 个点表示五位同学，两点之间连一条线段表示赛一场，建议教师让学生动手按要求画一画．



根据题意，A已经赛 4 盘，说明A与B、C、D、E各赛一盘，A应与B、C、D、E点相连．D赛 1 盘，是与A点相连的．B赛 3 盘，是与A、C、E点相连的．C赛 2 盘，是与A、B点相连的．从图上E点的连线条数可知，E同学赛了 2 盘．

【作业 6】东东、西西、北北三人进行乒乓球单循环赛，结果 3 人获胜的场数各不相同．问第一名胜了几场？

【解析】三人进行单循环赛，即每两人都要赛一场，共进行$3\times2\div2=3$（场）比赛．每场比赛都有一人获胜，每人都赛 2 场．由题意知三人获胜的场数各不相同，所以三人

获胜的场数分别为 2、1、0．显然，第一名是胜了 2 场．

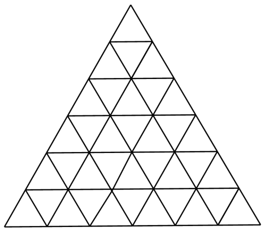
【作业 7】在中国象棋比赛中，有胜平负三种结果：获胜得 2 分，战平得 1 分，失败得 0 分．现在六个人进行单循环赛，已知其中五个人的分数分别是 7、6、5、4、3，那么最后一个人分数是多少？

【解析】 6 人单循环共比 15 场，每场双方合计总得 2 分，则总分固定为 30 分，最后一个人得 5 分．

【作业 8】小明和 *A*、*B*、*C*、*D*、*E* 共 6 人进行中国象棋单循环比赛，获胜得 2 分，战平得 1 分，失败得 0 分．已知结束后几人成绩如下：*A*：4 胜 1 负；*B*：3 胜 1 负 1 平；*C*：2 胜 1 负 2 平；*D*：1 胜 2 负 2 平；*E*：0 胜 3 负 2 平．那么计算积分，小明最后胜负情况如何？得了几分，第几名？

【解析】 胜场数=负场数，前面所有人 10 胜 8 负，故而小明 0 胜 2 负 3 平或者 1 胜 3 负 1 平，这两者都是得 3 分，应为第五名．

【作业 9】请看下图，共有________个三角形.



【解析】 假设每个小三角形的边长为 1，那么

边长为 1 的三角形有：$1+3+5+7+9+11=36$ 个；

边长为 2 的三角形有：$(1+2+3+4+5)+(1+2+3)=21$ 个；

边长为 3 的三角形有：$(1+2+3+4)+1=11$ 个；

边长为 4 的三角形有：$1+2+3=6$ 个：

边长为 5 的三角形有：$1+2=3$ 个；

边长为 6 的三角形有：1 个；

共有 $36+21+11+6+3+1=78$ 个.

【作业 10】 下列各数中，哪些是质数？哪些是合数？

113、217、349、1023、9997

【解析】 质数：113、349

合数：217、1023、9997

$7\times31=217$；$11\times93=1023$；$13\times769=9997$

第十二讲多位数计算作业

【作业 1】计算：$9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{100个9}$.

【解析】 利用凑整求和的思想来计算.

原式$=10-1+100-1+1000-1+\cdots+1\underbrace{00\cdots0}_{100个0}-1=\underbrace{11\cdots1}_{100个1}0-100=\underbrace{11\cdots1}_{98个1}010$.

【作业 2】求$3+33+333+...+\underbrace{33...3}_{2007个3}$的末三位数字.

【解析】 原式的末三位和每个数字的末三位有关系，有 2007 个 3，2006 个 30，2005 个 300，则$2007\times3+2006\times30+2005\times300=6021+60180+601500=667701$，原式末三位数字为 701.

【作业 3】 $\underbrace{99....9}_{2007个9}\times\underbrace{55....5}_{2007个5}$乘积的各位数字之和是________.

【解析】 $\underbrace{99....9}_{2007个9}\times\underbrace{55....5}_{2007个5}=\underbrace{55....5}_{2007个5}\times\left(1\underbrace{00....0}_{2007个0}-1\right)$

$=\underbrace{55....5}_{2007个5}\underbrace{00....0}_{2007个0}-\underbrace{55....5}_{2007个5}$

$=\underbrace{55....5}_{2006个5}\underbrace{44....4}_{2007个4}5$

各位数字之和是$2007\times(4+5)=18063$.

【作业 4】求3333333×6666666乘积的各位数字之和.

【解析】 法 1：本题可用找规律方法：

$3\times6=18$；$33\times66=2178$；$333\times666=221778$；$3333\times6666=22217778$；……

所以：$\underbrace{33....3}_{n个3}\times\underbrace{66....6}_{n个6}=\underbrace{22...2}_{(n-1)个2}1\underbrace{77...7}_{(n-1)个7}8$，则原式数字之和$2\times6+1+7\times6+8=63$

法 2：原式$=9999999\times2222222=(10000000-1)\times2222222$

$=22222220000000-2222222=22222217777778$

所以，各位数字之和为$7\times9=63$.

【作业 5】计算$\underbrace{333\cdots3}_{2004个3}\times582$.

【解析】 我们可以把$\underbrace{333\cdots3}_{2004个3}$转化为$\underbrace{999\cdots9}_{2004个9}\div3$，进而可以进行下一步变形，具体为：

原式$=\underbrace{333\cdots3}_{2004个3}\times582=\underbrace{999\cdots9}_{2004个9}\div3\times582=\underbrace{999\cdots9}_{2004个9}\times194=(1\underbrace{000\cdots0}_{2004个0}-1)\times194$

$=194\underbrace{00...0}_{2004个0}-194=1939\underbrace{9...99}_{2001个9}806$

【作业 6】试求$1993\times123\times999999$乘积的数字和为多少？

【解析】

原式$=245139\times(1000000-1)$

$=245139000000-245139$

$=245138754861$

所以原式的计算结果的数字和为$2+4+5+1+3+8+7+5+4+8+6+1=54$.

【作业7】计算： $200920092009\times20082008-200820082008\times20092009$；

【解析】 原式$=2009\times100010001\times2008\times10001-2008\times100010001\times2009\times1\,0001=0$；

【作业8】计算： $55555\times666667+44445\times666666-155555$.

【解析】 原式$=55555\times666666+55555+44445\times666666-155555$
$=(55555+44445)\times666666-100000$ $=66666500000$

【作业9】已知当 a 大于或等于 b 时，规定 $a\triangle b=3\times a+4\times b$；当 a 小于 b 时，规定 $a\triangle b=4\times a+3\times b$，按此规定计算：$(6\triangle4)\triangle35$ 等于多少？

【解析】 $6\triangle4=3\times6+4\times4=34$，$(6\triangle4)\triangle35=34\triangle35=4\times34+3\times35=136+105=241$.

【作业10】规定新运算#：如果 a，b 是两个整数，那么 $a\#b=3a-2b$．若 $x\#(4\#1)=7$，则 x 等于多少？.

【解析】 因为 $4\#1=3\times4-2\times1=10$，所以 $x\#(4\#1)=x\#10$，$x=9$.

【作业11】已知： $a\Delta b=3a+2b$，$a\nabla b=3a-2b$，**又知，** $7\Delta x\nabla9=93$，**那么 x 等于多少？**

【解析】 设 $7\Delta x$ 为 a，$a\nabla9=93,3a-2\times9=93,3a=111,a=37$ 则

$7\Delta x=37$，$3\times7+2x=37$，$2x=16$，$x=8$.

第十三讲 基本图形面积综合作业

【作业1】一个正方形的对角线长为20厘米，那么这个正方形的面积是________平方厘米．

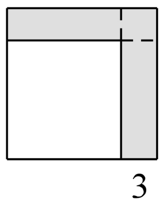
【解析】$20\times20\div2=200cm^2$．

【作业2】一个梯形的上底与下底的和为15厘米，已知上底是下底的2倍，高是上底的2倍，那么梯形的面积是多少平方厘米？

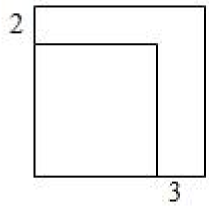
【解析】下底：$15\div(1+2)=5cm$；上底：$15-5=10cm$；高：$10\times2=20cm$；梯形的面积是$15\times20\div2=150cm^2$．

【作业3】已知大正方形比小正方形边长多3厘米，大正方形的面积比小正方形的面积多39平方厘米．那么大、小正方形的面积各是多少平方厘米？

【解析】小正方形的边长是：$(39-3\times3)\div2\div3=5cm$；小正方形的面积是$5^2=25cm^2$；大正方形的面积是$(5+3)^2=64cm^2$．



【作业4】如图，一块正方形钢板，一边截下2分米宽的长条，另一边截下3分米宽的长条，剩下部分面积比原来减少了44平方分米．则原正方形的面积为多少平方分米？

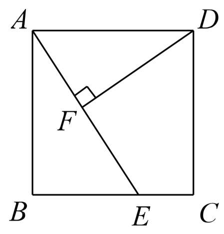


【解析】设正方形的边长为a分米，则$(a-3)\times2+3\times a=44$，$2a-6+3a=44$，$5a-6=44$，$5a=50$，$a=10$；原来长方形的面积是：$10\times10=100$（平方分米）．

【作业5】一块长方形的玻璃，长减少25厘米，宽减少5厘米，面积就减少了1775平方厘米，如果这时剩下的恰好是1个正方形，那么原长方形的面积是________平方厘米.

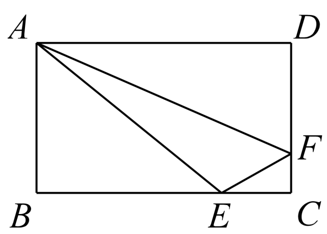
【解析】$(1775-5\times25)\div(5+25)=55$厘米；原长方形面积为：$(55+25)\times(55+5)=4800$平方厘米．

【作业6】如图，正方形*ABCD*的边长为8厘米，*AE*的长为10厘米，*BE*的长为6厘米，则*DF*的长为多少厘米？



【解析】连接 DE，$S_{\Delta ADE}=8\times8\div2=32cm^2$；$DF=S_{\Delta ADE}\times2\div AE=32\times2\div10=64\div10=6.4cm$

【作业 7】如图，*AE* 和 *AF* 把长方形 *ABCD* 分成面积相等的三部分，已知 *BC*=9 厘米，*CD*=6 厘米，则△*AEF* 的面积是________平方厘米.

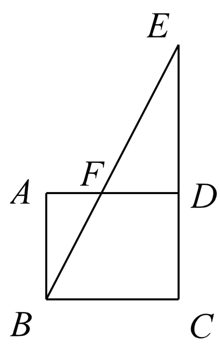


【解析】 长方形 $ABCD$ 的面积是 $6\times9=54cm^2$； $S_{\Delta ABE}=S_{\Delta ADF}=S_{四边形AECF}=54\div3=18cm^2$；

所以 $BE=18\times2\div6=6cm$，$DF=18\times2\div9=4cm$；所以 $EC=BC-BE=9-6=3cm$，

$FC=DC-DF=6-4=2cm$； $S_{\Delta CEF}=3\times2\div2=3cm$； 所以 $S_{\Delta AEF}=18-3=15cm$.

【作业 8】图中 *ABCD* 是长方形，三角形 *EFD* 的面积比三角形 *ABF* 的面积大 6*cm*²，其中 *BC*=6*cm*，*AB*=4*cm*，求 *ED* 的长.



【解析】$\because S_{长ABCD}=6\times4=24cm^2$

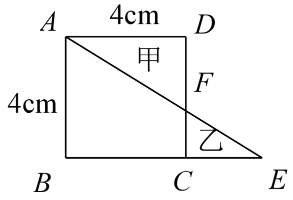
$\therefore S_{\Delta BCE}-S_{长ABCD}=\left(S_{\Delta DEF}+S_{梯BCDF}\right)-\left(S_{\Delta ABF}+S_{梯BCDF}\right)=S_{\Delta DEF}-S_{\Delta ABF}=6cm^2$

$\therefore S_{\Delta BCE}=S_{长ABCD}+6=30cm^2$；

$\therefore EC=S_{\Delta BEF}\times2\div BC=30\times2\div6=10cm$

$\therefore ED=EC-DC=10-4=6cm$

【作业 9】如图所示，甲三角形的面积比乙三角形的面积大 **6** 平方厘米，求 ***CE*** 的长度.



【解析】$\because S_{正ABCD}=4\times4=16cm^2$

$\therefore S_{正ABCD}-S_{\Delta ABE}=\left(甲+S_{梯ABCF}\right)-\left(乙+S_{梯ABCF}\right)=甲-乙=6cm^2$

$\therefore S_{\Delta ABE}=S_{正ABCD}-6=10cm^2$；

$\therefore BE=S_{\Delta ABE}\times2\div AB=10\times2\div4=5cm$

$\therefore CE=BE-BC=5-4=1cm$

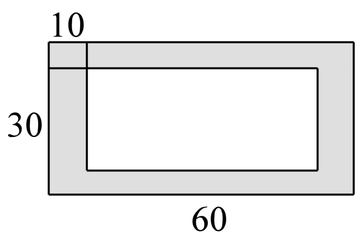
【作业 10】一堆钢管，最下层有 **6** 根，最上层有 **2** 根，每相邻两层都相差 **1** 根，钢管有________ 根.

【解析】层数：$(6-2)\div1+1=5$ 层；总数：$(2+6)\times5\div2=20$ 根

【作业 11】合唱队排队，第一排 **4** 人，最后一排 **10** 人，每相邻两排相差 **2** 人，合唱队共有________ 人.

【解析】层数：4 层：总数：$(4+10)\times4\div2=28$ 人.

【作业 12】如图，在一个长为 **60** 厘米，宽为 **30** 厘米的长方形黑板上涂满白色，现有一块长为 **10** 厘米的长方形黑板擦，用它在黑板内紧紧沿着黑板的边擦黑板一周（黑板擦只作平移，不旋转）. 如果黑板上没有擦到部分的面积恰好是黑板面积的一半，那么这个黑板擦的宽是多少厘米？



【解析】没擦到部分的面积：$60\times30\div2=900$（平方厘米）

没擦到部分长方形的宽：$900\div(60-10-10)=900\div40=22.5cm$

黑板擦的宽$(30-22.5)\div2=7.5\div2=3.75cm$，故答案为：3.75.

第十四讲 逻辑推理作业

【作业1】甲、乙、丙、丁在比较他们的身高，甲说："我最高．"乙说："我不最矮．"丙说："我没甲高，但还有人比我矮．"丁说："我最矮．"实际测量的结果表明，只有一人说错了．请将他们按身高次序从高到矮排列出来．

【解析】丁不可能说错，否则就没有人最矮了．由此知乙没有说错．若甲也没有说错，则没有人说错，矛盾．所以只有甲一人说错．所以丁是最矮的，甲不是最高的，丙没甲高，但还有人比他矮，那么只能是甲第二高，丙第三高，乙最高．所以他们的身高次序为乙、甲、丙、丁．

【作业2】甲、乙、丙三人中有一人是牧师，有一人是骗子，还有一人是赌棍．牧师从不说谎，骗子总说谎，赌棍有时说真话有时说谎话．甲说："丙是牧师．"乙说："甲是赌棍．"丙说："乙是骗子．"请问：甲、乙、丙三人中谁是牧师？谁是骗子？谁是赌棍？

【解析】甲说丙是牧师，如果甲是牧师，则两人都是牧师，与条件矛盾，所以甲不是牧师.如果甲是骗子，那么丙不是牧师，只能丙是赌棍而乙是牧师，这时乙的话不符合事实，与乙是牧师矛盾．如果甲是赌棍，那么乙说了真话，所以乙是牧师，丙是骗子，符合要求．

【作业3】在一次数学竞赛中，$ABCDE$ 五位同学分别得了前五名（没有并列同一名次的），关于各人的名次大家作出了下面的猜测：A 说："第二名是 D，第三名是 B．" B 说："第二名是 C，第四名是 E．"C 说："第一名是 E，第五名是 A．"A 说："第三名是 C，第四名是 A．"E 说："第二名是 B，第五名是 D．"结果每人都只猜对了一半，他们的名次如何？

【解析】假设 A 猜的第一句是真的，那么 B 猜的第二句是真的，即第四名是 E，那么 C 猜的"E 是第一名"是错的，A 是第五名，那么 D 猜的 C 是第三名是对的，那么 B 就是第一名，从而 E 说的全是错的，所以假设不成立．所以 A 猜的第二句是真的，即 B 是第三名，那么 D 猜的第一句是错的，从而 A 是第四名，所以 C 猜的第二句是错的，E 是第一名，从而 B 猜的 C 是第二名是对的，E 猜的第五名是 D 正确，所以，第一名是 E，第二名是 C，第三名是 B，第四名是 A，第五名是 D．

【作业4】甲、乙、丙三人，他们的籍贯分别是辽宁、广西、山东，他们的职业分别是教师、工人、演员．已知：(1)甲不是辽宁人，乙不是广西人；(2)辽宁人不是演员，广西人是教师；(3)乙不是工人．

求这三人各自的籍贯和职业．

【解析】由题意可画出下面三个表：

	辽宁	广西	山东
甲	×		
乙		×	
丙			

表1

	教师	工人	演员
甲			
乙		×	
丙			

表2

	辽宁	广西	山东
教师		√	
工人			
演员	×		

表3

表 3 补全为表 4．由表 4 知，工人是辽宁人，而乙不是工人，所以乙不是辽宁人，由此可将表 1 补全为表 5．

	辽宁	广西	山东
教师	×	√	×
工人	√	×	×
演员	×	×	√

表 4

	辽宁	广西	山东
甲	×	√	×
乙	×	×	√
丙	√	×	×

表 5

所以，甲是广西人，职业是教师；乙是山东人，职业是演员；丙是辽宁人，职业是工人．

方法二：将能判断的条件先列入图表中，广西人是教师，但是乙不是广西人，所以乙不是教师，乙又不是工人，所以乙为演员．在对应的地方打上“√”，对应的行列均打“×”．但是辽宁人不是演员，所以乙不是辽宁人，乙就是山东人，所以甲是广西人，职业是教师；乙是山东人，职业是演员；丙是辽宁人，职业是工人．

辽宁	广西	山东		教师	工人	演员
×	√	×	甲	√	×	×
×	×	√	乙	×	×	√
√	×	×	丙	×	√	×

甲是广西人，职业是教师；乙是山东人，职业是演员；丙是辽宁人，职业是工人．

【作业 5】*A*，*B*，*C*，*D* 分别是中国、日本、美国和法国人．已知：(1)*A* 和中国人是医生；(2)*B* 和法国人是教师；(3)*C* 和日本人职业不同；(4)*D* 不会看病．问：*A*，*B*，*C*，*D* 各是哪国人？

【解析】 有(1)(2)可知，A、B 都不是中国人和法国人，再由(1)(4)知，D 也不是中国人，所以，C 是中国人，由(3)，日本人也是教师，从而推知，D 是法国人，得下表：

	中国人	日本人	美国人	法国人
A	×			×
B	×			×
C	√	×	×	×
D	×	×	×	√

最后由 C 是中国人及(1)(3)，推知日本人是教师，再由(2)知 B 是日本人．

A 是美国人，B 是日本人，C 是中国人，D 是法国人．

【作业 6】桌子上摆着金匣子、银匣子和铜匣子．金匣子上写着一句话：“珠宝不在此匣中．”银匣子上写着一句话：“珠宝在金匣中．”铜匣子上写着一句话：“珠宝不在此匣中．”现已知道，这三句话中只有一句话是真的，那么珠宝在哪个匣子中？

【解析】 金匣子和银匣子上的话恰好是矛盾的，也就是这两句话必定一真一假．三句话只有一句是真的，那么铜匣子上的话一定是假的．所以珠宝就在铜匣子中．

【作业 7】老师在 3 个小箱中各放一个彩色球，让小明、小强、小亮、小佳四人猜一下各个箱子中放了什么颜色的球.

小明说："1 号箱中放的是黄色的，2 号箱中放的是黑色的，3 号箱中放的是红色的."

小亮说："1 号箱中放的是橙色的，2 号箱中放的是黑色的，3 号箱中放的是绿色的."

小强说："1 号箱中放的是紫色的，2 号箱中放的是黄色的，3 号箱中放的是蓝色的."

小佳说："1 号箱中放的是橙色的，2 号箱中放的是绿色的，3 号箱中放的是紫色的."

老师说："你们中有一个人恰好猜对了两个，其余的三人都只猜对一个."

那么 3 号箱子中放的是________色的球.

【解析】 这道题可以用对比分析法来解：

1 号2 号3 号
黄 黑 红
橙 黑 绿
紫 黄 蓝
橙 绿 紫

因为有一个人恰好猜对了两个，其余三人都只猜对了一个. 那么必有 5 个箱子被猜对了，那么至少有两个号码被猜对了两次，所以根据四个人的猜的情况知道：1 号为橙色，2 号必为黑色，那么 3 号为蓝色.

【作业 8】有 3 户人家，父亲分别姓王、张、陈，母亲分别姓刘、李、胡，每家一个孩子，分别叫明明（女）、宁宁（女）、松松（男）. 已知：

①王爸爸和李妈妈的孩子都参加了女子体操队；

②张爸爸的女儿不叫宁宁；

③陈和胡不是一家.

请问：哪些人是一家？

【解析】

	明明	宁宁	松松
王	×	√	×
张	√	×	×
陈	×	×	√

	刘	李	胡	
王	×	×	√	宁宁
张	×	√	×	明明
陈	√	×	×	松松

综上可知：张、李和明明是一家；陈、刘和松松是一家；王、胡和宁宁是一家.

【作业 9】口袋中有三种颜色的筷子各十根．问：

（1）至少取出多少根才能保证 2 双颜色不同的筷子？

（2）至少取出多少根才能保证 2 双颜色相同的筷子？

【解析】（1）要保证"2 双颜色不同的筷子"；

考虑极端情况：颜色尽可能相同，先将三种颜色的筷子中的一种全部取完，共 10 根，此时不满足，然后其余两种颜色各取一根，还不满足条件；

接下来的两种筷子中随意取一根，必然能够保证出现 2 双颜色不同的筷子．

故至少需要取出：$10+2\times1+1=13$ 根筷子．

（2）要保证"2 双颜色相同的筷子"；

考虑极端情况：颜色尽可能不同，先各种颜色各取 1 双 1 根；

接下来随意取一根，必然能够保证出现 2 双颜色相同的筷子．

故至少需要取出：$3\times3+1=10$ 根筷子．

【作业 10】**在 89~300 中至少要取几个不同的数，才能保证其中一定有一个数是 3 的倍数？**

【解析】89~300 中，最小的 3 的倍数是 90，$90\div3=30$ ；最大 3 的倍数是 300，$300\div3=100$．

3 的倍数有 $100-30+1=71$ 个，共有 $300-89+1=212$ 个数，保证一定有 3 的倍数：

$212-71+1=142$